MATEMATICKÁ ANALÝZA 4 - LETNÍ SEMESTR 2019–2020
POČETNÍ PŘÍKLADY

LUBOŠ PICK

Obsah

1. Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad 1.1. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte fundamentální systém řešení a uhodněte alespoň jedno partikulární řešení.

$$y'' - 5y' + 4y = e^{3x};$$
$$y''' - y'' + y' - y = \sin x;$$
$$y'' - y = e^x\left(x^2 + 1\right).$$

Návod: Partikulární řešení hledejte po řadě ve tvaru $y = ae^{3x}$, $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ a $y = ae^x x^2 + be^x x + ce^x$, dosaďte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c.

Příklad 1.2. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte reálný fundamentální systém řešení a uhodněte partikulární řešení.

$$y'' + 4y = \cos(nx); \quad y''' - y = x^3 - 1.$$

Návod: Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y = a\sin(nx) + b\cos(nx)$, respektive ve tvaru $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dosaďte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c, d.

Příklad 1.3. Zrekonstruujte nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, jestliže víte, že její fundamentální systém řešení je

$$[e^x, xe^x]; \quad \left[x, x^2\right].$$

Příklad 1.4. Metodou snižování řádu vyřešte rovnici

$$y''' = \frac{1}{4\sqrt{y'}}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = y''(0) = 1.$$

Návod: Položte $z = y'$.

Příklad 1.5. Nalezněte reálný fundamentální systém řešení následujících lineárních homogenních diferenciálních rovnic:

$$y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0;$$
$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0;$$
$$y'' + 4y' + 13y = 0;$$
$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Příklad 1.6. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} - 3y'' + 2y = x^3 + \sin x.$$

Příklad 1.7. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = x \sin x.$$

Příklad 1.8. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x} + 5 \sin x.$$

Příklad 1.9. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 5y' + 6y = \sin(e^{-x}).$$

Příklad 1.10. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Příklad 1.11. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = \sin x.$$

Příklad 1.12. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 2x - y - 2z \\ z' &= 2z - x + y. \end{aligned}$$

Příklad 1.13. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y - z \\ y' &= 3x - 4y - 3z \\ z' &= 2x - 4y. \end{aligned}$$

Příklad 1.14. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 2z - y \\ y' &= x + 2z \\ z' &= y - x - z. \end{aligned}$$

Příklad 1.15. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y - z \\ y' &= y - x + z \\ z' &= x - y. \end{aligned}$$

Příklad 1.16. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 5y - 2z \\ y' &= -2x - 2y + z \\ z' &= -x - y + z. \end{aligned}$$

Příklad 1.17. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= 2z - y. \end{aligned}$$

Příklad 1.18. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 2y + 4z \\ z' &= x - z. \end{aligned}$$

Příklad 1.19. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 2y + z + e^t \\ y' &= -x + 2y - z \\ z' &= -2x + 3y - z, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Příklad 1.20. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= -x + 3z, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Příklad 1.21. Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + e^t \\ y' &= 2x + y + e^t, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Příklad 1.22. Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - z \\ y' &= 2x + y - 2z \\ z' &= 2x + y - 2z. \end{aligned}$$

(i) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

(ii) Určete množinu všech $[x_0, y_0, z_0] \in \mathbb{R}^3$, pro která je maximální řešení uvedené soustavy (x, y, z) vyhovující podmínce $y(0) = [x_0, y_0, z_0]$ konstantní.

2. Metrické prostory III

Příklad 2.1. Uvažujme prostor spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ s následující metrikou

$$\varrho_{\text{int}}(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Ukažte, že tento metrický prostor je první kategorie a není úplný a že jeho jednotková koule je řídká.

Příklad 2.2. Nalezněte metrický prostor (P, ϱ) a posloupnost neprázdných uzavřených množin $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ takovou, že $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$.

Příklad 2.3. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ukažte, že množina

$$\{f \in \mathcal{C}([a, b]) \colon \exists x \in (a, b) \colon f'(x) \in \mathbb{R}\}$$

je 1. kategorie v prostoru $\mathcal{C}([a, b])$.

Příklad 2.4. Ukažte, že prostor ℓ_2 je separabilní a jeho jednotková koule není totálně omezená.

Příklad 2.5. Ukažte, že metrický prostor (P, ϱ) je totálně omezený právě tehdy, když z každé posloupnosti prvků P lze vybrat cauchyovskou podposloupnost.

Příklad 2.6. Je sjednocení dvou souvislých množin souvislá množina?

Příklad 2.7. Je průnik dvou souvislých množin souvislá množina?

Příklad 2.8. Je vzor souvislé množiny při spojitém zobrazení souvislá množina?

Příklad 2.9. Je množina $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ souvislá?

Příklad 2.10. Nechť P je souvislý metrický prostor, který obsahuje více než jeden bod. Dokažte, že P je nespočetný.

Příklad 2.11. Ukažte, že každý normovaný lineární prostor je souvislý.

Příklad 2.12. Nechť $P = \mathbb{R}$ a

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{je-li } x \neq 0, y = 0; \\ \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x = 0, y \neq 0; \\ 0 & \text{je-li } x = y; \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x \neq 0, y \neq 0, x \neq y. \end{cases}$$

Určete, zda
(i) (P, ϱ) je metrický prostor;
(ii) (P, ϱ) je úplný;
(iii) (P, ϱ) je kompaktní.
Určete diam P. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru (P, ϱ).

Příklad 2.13. Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Určete, zda
(i) (P, ϱ) je metrický prostor;
(ii) (P, ϱ) je úplný;
(iii) (P, ϱ) je kompaktní.
Určete diam P. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru (P, ϱ). Jsou jednobodové množiny otevřené?

Příklad 2.14. Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n + 1.$$

Zobrazení T zřejmě nemá pevný bod. Lze odtud usoudit, že T není kontrakce na P? Jestliže ne, dokažte to nějak jinak.

Příklad 2.15. Nechť $P = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $\varrho(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n^2.$$

Zobrazení T zřejmě nemá pevný bod. Dokažte, že přesto je T kontrakce na P. Jak je to možné?

Příklad 2.16. V prostoru $C([0, 1])$ se supremovou metrikou definujeme pro dvě dané funkce $g, h \in C([0, 1])$ *úsečku*:

$$f : [0, 1] \to C([0, 1]), \quad f(a) = g + a(h - g).$$

Dokažte, že: (a) úsečka je křivka;
(b) f je stejnoměrně spojitá na $[0, 1]$;
(c) $C([0, 1])$ je křivkově souvislý prostor.
Všimněte se, že stačí dokázat jen jedno z tvrzení (i)–(iii). Které?

Příklad 2.17. Zkoumejte, jaké vlastnosti musíme vyžadovat od metrického prostoru, aby v něm bylo možno nějakým rozumným způsobem zadefinovat úsečku a aby platila analogie tvrzení z předcházejícího příkladu. Pro jakou třídu metrických prostorů takto automaticky zajistíme křivkovou souvislost?

Příklad 2.18. Ukažte na příkladu, že uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislá množina.
Návod: Graf funkce $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (0, 1)$.

Příklad 2.19. Ukažte příklad množin A, B takových, že $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$, A je křivkově souvislá množina, B není křivkově souvislá množina.
Návod: V $\mathbb{R}^2$ vezměte všechny úsečky délky 1 vycházející z počátku a mající směrnice $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. To je množina A. Množinu B vytvořte tak, že k A přidáte ještě úsečku $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\, x \in [\frac{1}{2}, 1], y = 0\}$. Je A křivkově souvislá? Co je $\overline{A}$? Platí $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$? Je B křivkově souvislá?

3. Křivkový a plošný integrál

3.1. **Area formule a integrace skalárních funkcí.**

Příklad 3.1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^n$. Spočtěte $\mathcal{H}^1$-míru úsečky spojující body a, b.

Výsledek: $\|a - b\|$

Příklad 3.2. Spočtěte $\mathcal{H}^1$-míru množiny $M = \{[3t, 3t^2, 2t^3];\, t \in [0, 1]\}$.

Výsledek: 5

Příklad 3.3. Spočtěte $\mathcal{H}^1$-míru množiny (graf kardioidy)

$$M = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 = \big(1+\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)^2\Big\}.$$

Výsledek: 8

Příklad 3.4. Spočtěte obsah sféry v $\mathbb{R}^3$ o poloměru $r>0$.

Výsledek: $4\pi r^2$

Příklad 3.5. Nechť $k,n \in \mathbb{N}, k \le n$. Ukažte, že vektory $u^1,\dots,u^k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $\operatorname{vol}[u^1,\dots,u^k] \neq 0$.

Příklad 3.6. Spočtěte obsah části povrchu rotačního hyperboloidu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ z = xy, x^2+y^2 \le 1\}.$$

Výsledek: $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$

Příklad 3.7. Spočtěte

$$\int_c (x+y)\,d\mathcal{H}^1,$$

kde c je obvod trojúhelníka s vrcholy $[0,0],[0,1],[1,0]$.

Výsledek: $1+\sqrt{2}$

Příklad 3.8. Spočtěte

$$\int_c y^2\,d\mathcal{H}^1,$$

kde c je oblouk cykloidy $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t), t \in [0,2\pi], a>0$.

Výsledek: $\frac{256}{15}a^3$

Příklad 3.9. Spočtěte

$$\int_c \sqrt{x^2+y^2}\,d\mathcal{H}^1,$$

kde c je kružnice se středem v bodě $[\frac{1}{2},0]$ a poloměru $\frac{1}{2}$.

Výsledek: 2

Příklad 3.10. Spočtěte

$$\int_c (x^2+y^2+z^2)\,d\mathcal{H}^1,$$

kde c je oblouk šroubovice, zadaný parametricky $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ t \in [0,2\pi]$.

Výsledek: $(2\pi a^2 + \frac{1}{3}(2\pi)^3 b^2)\sqrt{a^2+b^2}$

Příklad 3.11. Nechť $f\colon [a,b] \to (0,\infty),\ f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ a

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ \sqrt{y^2+z^2} = f(x)\}.$$

Dokažte, že

$$\mathcal{H}^2(M) = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt.$$

Příklad 3.12. Spočtěte délku křivky

$$c = \{[r,\varphi] \in \mathbb{R}^2;\ r = a\sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right),\ \varphi \in [0,3\pi]\},$$

kde $a>0$.

Výsledek: $\frac{3}{2}\pi a$

Příklad 3.13. Spočtěte délku křivky v $\mathbb{R}^3$, zadané předpisem

$$y = a\arcsin\frac{x}{a}, \quad z = \frac{a}{4}\log\frac{a-x}{a+x}$$

od bodu $[0,0,0]$ do bodu $[x_0,y_0,z_0]$, kde $a>0$.

Výsledek: $|x_0|+|z_0|$

Příklad 3.14. Určete, která křivka má větší délku, zda kružnice o poloměru a nebo elipsa s poloosami $\frac{a}{2}$, $2a$, kde $a > 0$.

Výsledek: elipsa

Příklad 3.15. Spočtěte

$$\int_c e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\mathcal{H}^1,$$

kde c je křivka v $\mathbb{R}^2$ složená ze tří oblouků, zadaných v polárních souřadnicích pomocí následujících parametrizací:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0,\ r \in [0,a], \\ r &= a,\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ \varphi &= \frac{\pi}{4},\ r \in [0,a], \end{aligned}$$

kde $a > 0$.

Výsledek: $\frac{\pi a e^a}{4} + 2(e^a - 1)$

Příklad 3.16. Spočtěte

$$\int_c \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) d\mathcal{H}^1,$$

kde c je obvod astroidy zadaný předpisem

$$c = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{3}}\}$$

pro nějaké $a > 0$.

Výsledek: $4a^{\frac{14}{3}}$

Příklad 3.17. *Těžiště* drátu tvaru křivky c v $\mathbb{R}^2$ s lineární hustotou $f(x,y)$ má souřadnice $T = [x_0, y_0]$, kde

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_c x f(x,y)\, d\mathcal{H}^1, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_c y f(x,y)\, d\mathcal{H}^1,$$

přičemž $M = \int_c f(x,y)\, d\mathcal{H}^1$ je hmotnost drátu. Určete souřadnice těžiště oblouku homogenní cykloidy, zadané parametricky

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, \pi],$$

kde $a > 0$.

Výsledek: $T = \left[\frac{4a}{3}, \frac{4a}{3}\right]$

Příklad 3.18. Spočtěte

$$\int_c |y|\, d\mathcal{H}^1,$$

kde c je Bernoulliova lemniskáta, zadaná rovnicí

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 \left(x^2 - y^2\right)$$

pro nějaké $a > 0$.

Výsledek: $2a^2(2 - \sqrt{2})$

Příklad 3.19. Spočtěte obsah 2-plochy M v $\mathbb{R}^3$, zadané předpisem

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\, z = ax + by,\ x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad a, b > 0.$$

Výsledek: $\pi\sqrt{1 + a^2 + b^2}$

Příklad 3.20. Spočtěte obsah stěny nádoby tvaru rotačního paraboloidu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\, z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right),\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Výsledek: $\frac{2}{3}\pi \left(2\sqrt{2} - 1\right)$

Příklad 3.21. Spočtěte obsah povrchu anuloidu, jehož průřez má poloměr R_2, přičemž vzdálenost středu průřezové kružnice od jeho osy je R_1, $R_1 > R_2$.

Výsledek: $4\pi R_1 R_2$

Příklad 3.22. Spočtěte

$$\int_M z \, d\mathcal{H}^2,$$

kde M je helikoid, zadaný parametrizací

$$M = \{[t\cos s, t\sin s, s] \in \mathbb{R}^3;\ t \in [0,a], s \in [0,2\pi]\}.$$

Výsledek: $\pi^2 \left(a\sqrt{1+a^2} + \log\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right)$

Příklad 3.23. Těžiště plochy M je dáno vzorcem

$$T = [x_t, y_t, z_t] = \frac{1}{\int_M d\mathcal{H}^2} \left(\int_M x \, d\mathcal{H}^2, \int_M y \, d\mathcal{H}^2, \int_M z \, d\mathcal{H}^2 \right).$$

Vypočítejte těžiště homogenního rotačního paraboloidu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 2z,\ 0 \le z \le 2\}.$$

Výsledek: $T = \left[0, 0, \frac{50\sqrt{5}+2}{50\sqrt{5}-10}\right]$

Příklad 3.24. Podle Pascalova zákona je hydrostatická síla působící v daném bodě povrchu tělesa dána výrazem

$$F_i = \varrho g \int_M h n_i \, d\mathcal{H}^2, \quad i = 1,2,3,$$

kde h je hloubka v daném bodě a n_i je i-tá složka vnější jednotkové normály k ploše M. Dokažte, že (v souladu s Archimédovým zákonem) hydrostatická síla, která působí na stěny nádoby tvaru rotačního paraboloidu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = z,\ 0 \le z \le 1\},$$

je rovna

$$F(0, 0, -\frac{\pi \varrho g}{2}).$$

3.2. **Plochy a orientace.**

Příklad 3.25. Dokažte, že $\{0\} \times (0,1)^2$ je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.26. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$ je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$.

Příklad 3.27. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$, $H \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $F\colon H \to \mathbb{R}^{n-k}$, $F \in \mathcal{C}^1(H)$ a $\operatorname{rank} F'(x) = n-k$ pro každé $x \in H$. Dokažte, že je-li $M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ F(x) = 0\}$ neprázdná, potom je M k-plocha v $\mathbb{R}^n$.

Příklad 3.28. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$, a $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní k-plocha. Dokažte, že $0 < \mathcal{H}^k(M) < \infty$.

Příklad 3.29. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Dokažte, že v $\mathbb{R}^n$ platí $\lambda^n\big(B(0,1)\big) = n\mathcal{H}^{n-1}\big(H(B(0,1))\big)$.

3.3. **Integrace vektorových funkcí.**

Příklad 3.30. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_c (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy,$$

kde c je část oblouku paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $[-1,1]$ a koncovým bodem $[1,1]$.

Výsledek: $-\frac{14}{15}$

Příklad 3.31. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_c \frac{(x+y)\, dx - (x-y)\, dy}{(x^2+y^2)},$$

kde c je kladně orientovaná kružnice o poloměru a se středem v počátku.

Výsledek: -2π

Příklad 3.32. Spočtěte křivkový integrál
$$\int_c (2a - y, x) \cdot \, dc,$$
kde c je cykloida zadaná parametricky
$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi],$$
jejíž orientace je dána touto paramaterizací, a kde $a > 0$.

Výsledek: $-2\pi a^2$

Příklad 3.33. Spočtěte křivkový integrál
$$\int_c \frac{-y^2\, dx + x^2\, dy}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}},$$
kde c je část oblouku asteroidy zadané rovnicí
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$
pro nějaké $a > 0$, z bodu $[0, a]$ do bodu $[a, 0]$.

Výsledek: -$\frac{3}{16}\pi a^{\frac{4}{3}}$

Příklad 3.34. Spočtěte křivkový integrál
$$\int_c yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz,$$
kde c je jeden závit šroubovice zadané parametricky
$$\varphi(t) = \left(a \cos t, a \sin t, \frac{b}{2\pi} t\right), \quad t \in [0, 2\pi],$$
jejíž orientace je dána touto paramaterizací a kde $a, b > 0$.

Výsledek: 0

Příklad 3.35. Spočtěte křivkový integrál
$$\int_c y\, dx + z\, dy + x\, dz,$$
kde c je průsečnice ploch zadaných rovnicemi
$$z = xy, \quad x^2 + y^2 = 1,$$
jejíž orientace je dána kladnou orientací průmětu této křivky do roviny xy.

Výsledek: $-\pi$

Příklad 3.36. Spočtěte práci silového pole $F(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ po obvodu křivky
$$\{[t^2, 2t, 4t^3];\, t \in [0, 1]\},$$
jejíž orientace je dána touto paramaterizací.

Výsledek: $\frac{5}{2}$

Příklad 3.37. Spočtěte práci silového pole, které působí v každém bodě $[x, y, z]$, $[x, y] \neq [0, 0]$ (mimo osu z) silou nepřímo úměrnou druhé mocnině vzdálenosti od osy z a míří kolmo k ose z. Určete, jaká práce se vykoná při pohybu hmotného bodu po čtvrtkružnici
$$c = \{[\cos t, 1, \sin t];\, t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\}.$$

Výsledek: $k\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, kde k je konstanta úměrnosti.

Příklad 3.38. Kapalina proudí rychlostí $V(x, y) = (x, 2y)$. Určete množství kapaliny, která proteče za jednotku času elipsou, zadanou rovnicí
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Výsledek: 18π

Příklad 3.39. Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál

$$\int_c xy^2\,dy - x^2y\,dx,$$

kde c je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=a^2$, $a>0$.

Výsledek: $\frac{\pi a^4}{2}$

Příklad 3.40. Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_c (x+y)\,dx - (x-y)\,dy,$$

kde c je elipsa $\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$ orientovaná v kladném smyslu.

Výsledek: $-2\pi ab$

Příklad 3.41. Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_c e^x(1-\cos y)\,dx - e^x(y-\sin y)\,dy,$$

kde c je kladně orientovaná hranice množiny

$$\Omega=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : 0<x<\pi, 0<y<\sin x\right\}.$$

Výsledek: $-\frac{1}{5}(e^\pi-1)$

Příklad 3.42. Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál

$$\int_c (-y^3+\log x)\,dx + (x^3+y^2)\,dy,$$

kde c je kladně orientovaná hranice množiny

$$\Omega=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ 1<x^2+y^2<16,\ 0<x<y<\sqrt{3}x\right\}.$$

Výsledek: $\frac{63\pi}{12}$

Příklad 3.43. Spočtěte tok vektorového pole $F(x,y,z)=(xz,xy,z)$ hranicí množiny

$$\Omega=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1,\ 0<z<1\}.$$

Výsledek: $\frac{3\pi}{2}$

Příklad 3.44. (Steinerova hypocykloida) Uvažujme křivku

$$\varphi(t)=[2\cos t+\cos 2t, 2\sin t-\sin 2t],\ t\in[0,2\pi].$$

Dokažte, že se jedná o jednoduchou uzavřenou po částech regulární křivku a spočtěte obsah množiny ohraničené touto křivkou.

Výsledek: 2π

Příklad 3.45. Spočtěte integrál

$$\int_M z\,dx\,dy,$$

kde M je kladně orientovaná plocha sféry

$$M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}.$$

Výsledek: $\frac{4}{3}\pi$

Příklad 3.46. Spočtěte integrál

$$\int_M (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy,$$

kde M je kuželová plocha

$$M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2=z^2,\ z\in[0,h]\}.$$

s vnější orientací.

Výsledek: 0

Příklad 3.47. Spočtěte integrál

$$\int_M x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy,$$

kde M je vnější povrch sféry

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,\ a,b,c,R > 0\}.$$

Výsledek: $\frac{8\pi(a+b+c)R^3}{3}$

Příklad 3.48. Spočtěte integrál

$$\int_M x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy,$$

kde M je vnější povrch sféry

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a > 0\}.$$

Výsledek: $\frac{4\pi R^3}{3}$

Příklad 3.49. Spočtěte integrál

$$\int_M \frac{dy\, dz}{x} + \frac{dz\, dx}{y} + \frac{dx\, dy}{z},$$

kde M je vnější povrch elipsoidu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a,b,c > 0\}.$$

Výsledek: $4\pi\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)$

Příklad 3.50. Spočtěte integrál

$$\int_M xz\, dy\, dz + xy\, dz\, dx + yz\, dx\, dy,$$

kde M je vnitřně orientovaný povrch jehlanu ohraničeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1$.

Výsledek: $-\frac{1}{8}$

Příklad 3.51. Spočtěte tok vektorového pole $F(x,y,z) = (x,y,z)$ ven z válce

$$P = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le a^2,\ z \in [-h,h]\},\ a,h > 0.$$

Výsledek: $6\pi h a^2$

Příklad 3.52. Spočtěte tok vektorového pole $F(x,y,z) = (yz, -xz, x^2 + y^2)$ nahoru plochou zadanou parametricky

$$\Phi(r,t) = (e^r \cos t, e^r \sin t, r)\,.$$

Výsledek: $\frac{\pi(e^4-1)}{3}$

Příklad 3.53. Užitím Stokesovy věty vypočtěte

$$\int_c (y+z)\, dx + (z+x)\, dy + (x+y)\, dz,$$

kde

$$c = \{[a \sin^2 t, 2a \sin t \cos t, a \cos^2 t],\ t \in [0,\pi]\}, \quad a > 0,$$

a c je orientovaná ve směru růstu parametru t.

Výsledek: 0

Příklad 3.54. Spočtěte tok vektorového pole $F(x,y,z) = [y - z, z - x, x - y]$ kuželovou plochou

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = z^2, z \in [0,h]\},$$

která je orientována vnější normálou.

Výsledek: 0

Příklad 3.55. Užitím Stokesovy věty vypočtěte integrál

$$\int_c y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

kde kružnice

$$c = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = a^2, x+y+z = 0\}$$

je orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu z kladné části osy x.

Výsledek: $-\pi a^2\sqrt{3}$

Příklad 3.56. Užitím Stokesovy věty vypočtěte integrál

$$\int_c (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz,$$

kde

$$c = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 2Rx,\ x^2+y^2 = 2rx,\ 0 < r < R,\ z > 0\},$$

a kterou orientujeme tak, že menší část sférické plochy $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 2Rx\}$, kterou tato křivka vymezuje, zůstává „po levé ruce stojíme-li na vnější straně sféry".

Výsledek: $2\pi R r^2$

Příklad 3.57. Spočtěte tok vektorového pole $F(x,y,z) = (z,0,x^2)$ ve směru osy z parabolickou plochou

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 = z, x,y \in [-1,1]\}.$$

Výsledek: $\frac{4\pi}{3}$

Příklad 3.58. Užitím Stokesovy věty vypočtěte

$$\int_c (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$$

kde 1-plocha

$$c = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1\}, \qquad a > 0, h > 0,$$

je orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu z kladné části osy x.

Výsledek: $-2\pi a(a+h)$

Příklad 3.59. Užitím Stokesovy věty vypočtěte integrál

$$\int_c y^2z^2\,dx + x^2z^2\,dy + x^2y^2\,dz,$$

kde 1-plocha

$$c = \{[a\cos t, a\cos 2t, a\cos 3t] \in \mathbb{R}^3;\ t \in [0,2\pi]\}$$

je orientována ve směru růstu parametru t.

Výsledek: 0

4. Číselné řady II

Příklad 4.1. Vyšetřete konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cos\left(\pi \frac{n^2}{n+1}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^\alpha + \sin \frac{n\pi}{4}}, \quad \alpha > 0, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\sin(n^2a)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\cos(n^2a)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\cos(n^2a)}{n}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.2. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{R}$ konverguje absolutně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}.$$

Příklad 4.3. Dokažte, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(ak)}{k} \right| < 2\sqrt{\pi}.$$

Příklad 4.4. Dokažte následující *Kroneckerovo lemma*: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a nechť $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Potom

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = o\left(\frac{1}{b_n}\right) \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = o\left(b_n\right).$$

Příklad 4.5. Utvořte Cauchyův součin daných řad a spočítejte jeho součet:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!},$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n},$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n.$$

Příklad 4.6. Zkoumejte konvergenci (a eventuální součet) následujících zobecněných řad:

$$\text{(i)} \quad \sum_{(i,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2} x^i y^k, \quad |x|,|y| < 1$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2} \frac{1}{n!k!(n+k+1)},$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{nk(n+k+2)},$$

$$\text{(iv)} \quad \sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2} \frac{n!k!}{(n+k+2)!},$$

$$\text{(v)} \quad \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha k^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

$$\text{(vi)} \quad \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{(n+k)^p}, \quad p > 0,$$

$$\text{(vii)} \quad \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} n x^{nk}, \quad |x| < 1.$$

Výsledky.

- Příklad 4.1: (i), (ii), (iii) konvergují, (iv) konverguje pro $\alpha > \frac{1}{2}$ a diverguje pro $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, (v) konverguje, (vi), (vii) a (viii) konvergují pro každé $a \in \mathbb{R}$.
- Příklad 4.2: Řada konverguje absolutně právě tehdy, pokud $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro ostatní $a \in \mathbb{R}$ konverguje neabsolutně.
- Příklad 4.5: (i) $e^{\frac{5}{2}}$, (ii) $-\frac{1}{2}\log 2$, (iii) $\frac{1}{(1-x^2)^2}$.

Příklad 4.7. Dokažte následující *Kummerovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Nechť D_n je posloupnost kladných reálných čísel. Označme

$$p_n = D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1}.$$

Potom

(i) jestliže $\liminf p_n > 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

(ii) jestliže $\limsup p_n < 0$ a navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D_n}$ diverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 4.8. Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Raabeovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Potom

(i) jestliže $\liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

(ii) jestliže $\limsup n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 4.9. Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Gaussovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Nechť existuje omezená posloupnost reálných čísel b_n a konstanta $k \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{k}{n} + \frac{b_n}{n^2}.$$

Potom

(i) jestliže $k > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

(ii) jestliže $k \leq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

5. Funkce s omezenou variací a absolutně spojité funkce

Příklad 5.1. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{x^2}) & \text{pro } x \in (0,1], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

je diferencovatelná, ale nemá omezenou variaci na $[0,1]$.

Příklad 5.2. Dokažte, že má-li funkce na intervalu $[a,b]$ omezenou derivaci, pak tam má omezenou variaci.

Příklad 5.3. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{x}) & \text{pro } x \in (0,1], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

má omezenou variaci na $[0,1]$.

Příklad 5.4. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta > 0$. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos(\frac{\pi}{x^\beta}) & \text{pro } x \in (0,1], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

má omezenou variaci na $[0,1]$ právě tehdy, když $\alpha > \beta$.

Příklad 5.5. Dokažte, že každá funkce s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ je na tomto intervalu omezená.

Příklad 5.6. Dokažte, že prostor funkcí s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ tvoří algebru vzhledem k násobení.

Příklad 5.7. Rozhodněte, zda prostor funkcí s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ tvoří algebru vzhledem ke skládání.

Příklad 5.8. Dokažte, že je-li f lipschitzovská a g má omezenou variací na intervalu $[a,b]$, pak $f \circ g$ má omezenou variací na $[a,b]$.

Příklad 5.9. Dokažte, že je-li f spojitá a $|f|$ má omezenou variací na intervalu $[a,b]$, pak i f má omezenou variací na $[a,b]$. Dokažte, že předpoklad spojitosti nelze odstranit.

Příklad 5.10. Rozhodněte, zda prostor funkcí s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ tvoří svaz.

Příklad 5.11. (i) Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log(\frac{1}{x})} & \text{pro } x \in (0,\frac{1}{2}], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

má omezenou variaci na $[0,\frac{1}{2}]$, ale není α-Hölderovská pro žádné $\alpha > 0$.

(ii) Nechť

$$x_n = \sum_{k-n}^{\infty} \frac{1}{k \log^2 k}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(0) = f(x_n) = 0, \quad f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

a f je lineární na intervalech $[x_{n+1}, \frac{x_n+x_{n+1}}{2}]$ a $[\frac{x_n+x_{n+1}}{2}, x_n]$. Dokažte, že f je α-Hölderovská pro každé $\alpha \in (0,1)$, ale nemá na intervalu $[0,x_2]$ omezenou variaci.

Příklad 5.12. Nechť R je Riemannova funkce. Rozhodněte, pro která $\alpha > 0$ má funkce R^α omezenou variaci na $[0, 1]$.

Příklad 5.13. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x^\beta}) & \text{pro } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že f je absolutně spojitá na $[0, 1]$ pokud $0 < \beta < \alpha$ a že f není absolutně spojitá na $[0, 1]$ pokud $0 < \alpha \le \beta$.

Příklad 5.14. Položme

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\sin(\frac{1}{x})| & \text{pro } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a $g(x) = \sqrt{x}$. Dokažte, že

- funkce f je absolutně spojitá na $[0, 1]$,
- funkce g je absolutně spojitá na $[0, 1]$,
- funkce $f \circ g$ je absolutně spojitá na $[0, 1]$,
- funkce $g \circ f$ není absolutně spojitá na $[0, 1]$.

Příklad 5.15. Nechť funkce f a g jsou absolutně spojité a g je monotónní na intervalu $[a, b]$. Dokažte, že potom je funkce $f \circ g$ absolutně spojitá na $[a, b]$.

6. Fourierovy řady

Příklad 6.1. Rozviňte funkci

$$f(x) := \arcsin \cos x, \quad x \in (-\pi, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Příklad 6.2. Rozviňte funkci

$$f(x) := \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|, \quad x \in \mathbb{R},$$

do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Příklad 6.3. Rozviňte funkci

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in (-\pi, 0] \\ x^2, & x \in [0, \pi) \end{cases},$$

do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet.

Příklad 6.4. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Rozviňte funkci

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x, & x \in (-\pi, 0], \\ \beta x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Příklad 6.5. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Rozviňte funkci

$$f(x) := 1 - \sin(ax), \quad x \in (-\pi, \pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet.

Příklad 6.6. Rozviňte funkci

$$f(x) := \sin(3x) + 4x, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin 2n}{n}.$$

Příklad 6.7. Nechť $a \in \mathbb{Z}$. Rozviňte funkci

$$f(x) := \cos(ax), \quad x \in (0, \pi),$$

do *sinové* Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k-1)}{4-(2k-1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^2}{(4-(2k-1)^2)^2},$$

Příklad 6.8. Rozviňte funkci

$$f(x) := \sin(x), \quad x \in (0, \pi),$$

do *cosinové* Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

Příklad 6.9. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) := \begin{cases} x + \sin^3 x, & x \in (-\pi, 0], \\ \pi - x + \sin^3 x, & x \in (0, \pi), \end{cases}$$

a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 6.10. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) := \begin{cases} \sin x \cos^2 x, & x \in (-\pi, 0], \\ x^2 + \sin x + \cos^2 x, & x \in (0, \pi), \end{cases}$$

a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 6.11. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) = \sin(\frac{x}{2})$$

a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 6.12. Nechť funkce f je definována na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \operatorname{sign}(\sin(2x)) + \cos^3 x + \sin^3 x.$$

Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet její Fejérovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 6.13. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ x + \frac{\pi}{2}, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0), \\ -x + \frac{\pi}{2}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi), \end{cases}$$

a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.