Statistika

(MD360P03Z, MD360P03U)
ak. rok 2007/2008

Karel Zvára

karel.zvara@mff.cuni.cz
http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼zvara

8. října 2007

charakteristiky variability

- měří nestejnost (**variabilitu**) hodnot spojité veličiny
- obecně pro míru variability $s(x)$

$$\begin{aligned} s(a+x) &= s(x), \\ s(b\cdot x) &= b\cdot s(x), \qquad b>0 \end{aligned}$$

- přičtením stejné konstanty a (posunutím) se charakteristika variability nezmění (nezávisí na poloze)
- vynásobení kladnou konstantou znamená, že stejnou konstantou nutno vynásobit charakteristiku variability
- **rozpětí** [range] $R = x_{(n)} - x_{(1)}$
- **kvartilové rozpětí** [quartile range] $R_Q = Q_3 - Q_1$

rozptyl (variance)

- (výběrový) **rozptyl** (variance) [variance] [VAR.VÝBĚR][var(x)]
(nevyhovuje druhému požadavku, místo toho: $s^2_{a+b\cdot x} = b^2 \cdot s^2_x$)

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{n-1}\left((x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\cdot\bar{x}^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k} n_j(x_j^*-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} n_j x_j^{*2} - n\cdot\bar{x}^2\right) \end{aligned}$$

- nechť $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 8$, pak je
$\bar{x} = (1+3+8)/3 = 12/3 = 4$

$$s_x^2 = \frac{1}{3-1}\left((1-4)^2 + (3-4)^2 + (8-4)^2\right) = \frac{26}{2} = 13 \doteq 3{,}6^2$$

směrodatná odchylka

- rozptyl měří průměrný čtverec vzdálenosti od průměru
- **směrodatná odchylka** [std. deviation]: odmocnina z rozptylu [SMODCH.VÝBĚR][sd(x)]

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

- zcela vyhovuje požadavkům na míry variability
- výhoda směrodatné odchylky:
stejný fyzikální rozměr jako původní data
- výběrový rozptyl z *třídních* četností:
Sheppardova korekce (jsou-li všechny intervaly délky h):

$$\text{odečti } \frac{h^2}{12}$$

příklad – věk matek

- rozpětí: $R = 38 - 18 = 20$
- kvartilové rozpětí: $R_Q = 28 - 23 = 5$
- rozptyl

$$s^2 = \frac{1}{98}\left((26^2 + 35^2 + \ldots + 21^2 + 23^2) - 99 \cdot \left(\frac{2544}{99}\right)^2\right)$$
$$= 16{,}97 \doteq 4{,}12^2$$

- směrodatná odchylka je 4,12

Var. řada věku matek

příklad – věk matek 2

- pomocí třídních četností

$$s^2 = \frac{1}{98}\left((5 \cdot 19^2 + 27 \cdot 22^2 + \ldots + 2 \cdot 37^2) - 99 \cdot \left(\frac{2547}{99}\right)^2\right)$$
$$= 16{,}36 = (4{,}05)^2$$

- navíc Sheppardova korekce

$$s^2 = 16{,}36 - \frac{3^2}{12} = (3{,}95)^2$$

střední odchylka

- **střední odchylka** [mean deviation]: průměr odchylek od mediánu (někdy od průměru) [mean(abs(x-median(x)))]

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \tilde{x}|$$

- **střední diference**: průměr vzájemných vzdáleností všech n^2 dvojic

$$\Delta = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|$$
$$= \frac{2}{n^2}\sum\sum_{j>i} \left(x_{(j)} - x_{(i)}\right)$$

normované charakteristiky rozptýlenosti

- dosud zavedené charakteristiky variability závisejí na volbě měřítka (např. délka v m nebo v km)
- hledáme charakteristiky nezávislé na měřítku, nutně *poměrové* měřítko, *kladné* hodnoty
- umožní **porovnání** z různých souborů
- **variační koeficient** [sd(x)/mean(x)]

$$v = \frac{s_x}{\bar{x}}$$

- **(Giniho) koeficient koncentrace**

$$G = \frac{\Delta}{2\bar{x}}\left(= \frac{2\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_{(i)}}{n\sum_{i=1}^{n} x_i} - \frac{n+1}{n}\right)$$

například měří nerovnoměrnost příjmů, velikostí územních jednotek, souvisí s plochou u Lorenzovy křivky

z-skór, standardizace

- variační koeficient v, Giniho koeficient G – příklady bezrozměrných veličin (zásluhou průměru ve jmenovateli závisí G i v na posunutí!)
- z-skóry [STANDARDIZE(x;průměr(x);smodch.výběr(x))] *[(x-mean(x))/sd(x)] nebo [c(scale(x))]

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

- dostaneme nulový průměr ($\bar{z} = 0$), jednotkový rozptyl ($s_z = 1$)
- z-skóry jsou bezrozměrné $\Rightarrow$ umožní hodnotit vlastnosti nezávislé na poloze a variabilitě, např. tvar rozdělení
- $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 2, s_x = 1$
  $z_1 = \frac{1-2}{1} = -1, z_2 = \frac{2-2}{1} = 0, z_3 = \frac{3-2}{1} = 1$

charakteristiky tvaru: šikmost

- invariantní vůči posunutí i změně měřítka:

$$\gamma(a + x) = \gamma(x)$$
$$\gamma(b \cdot x) = \gamma(x) \qquad b > 0$$

- **šikmost** $\sqrt{b_1}$ – **průměr** z 3. mocnin z-skórů [SKEW()] [mean(scale(x)^3)]

$$\sqrt{b_1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^3$$

- pro symetrický histogram $\sqrt{b_1}$ blízké nule
- doprava protažený histogram pro $\sqrt{b_1} >> 0$
- doleva protažený histogram pro $\sqrt{b_1} << 0$

charakteristiky tvaru: špičatost

- **špičatost** b_2 – **průměr** ze 4. mocnin z-skórů (někdy se odečítá 3) [KURT()] [mean(scale(x)^4)]

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right)^4$$

- někdy se počítají odhady populační šikmosti a špičatosti jinak (Excel: s_x jinak, Fisherovo g_1, g_2 – pro zajímavost)

$$g_1 = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2} \sqrt{b_1}, \qquad g_2 = \frac{(n+1)(n-1)}{(n-2)(n-3)} \left(b_2 - \frac{3(n-1)}{n+1} \right)$$

- šikmost a špičatost slouží k hodnocení, zda lze předpokládat *normální rozdělení* (bude zavedeno později)

přehled závislostí

- abychom mohli vyšetřovat závislost, musíme na jedné statistické jednotce měřit aspoň dva znaky
- postupy (i grafické) závisí na měřítcích obou znaků
  - kvalitativní – kvalitativní (vzdělání – pracovní zařazení)
  - kvalitativní – kvantitativní (vzdělání – roční příjem)
  - kvantitativní – kvantitativní (věk – roční příjem)
- zatím popisné charakteristiky a grafy, prokazování závislosti později

kvalitativní – kvalitativní

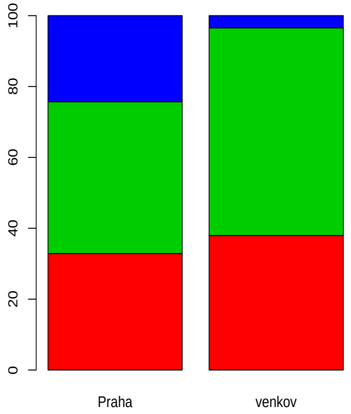
- kvalitativní data – znak v nominálním (ordinálním) měřítku
- hodnoty vyjadřujeme pomocí četností
- dva znaky – četnosti možných **dvojic hodnot** n_{ij} (**sdružené četnosti**)
- zapisujeme do **kontingenční tabulky** [contingency table] [table(x,y)] nebo [xtabs(∼x+y)]
- doplňujeme **marginální četnosti** [marginal frequencies]
  - součty po řádcích a po sloupcích
  - četnosti jednotlivých hodnot každého ze znaků zvlášť
- oba znaky nula-jedničkové – kontingenční tabulka 2×2, **čtyřpolní tabulka** [fourfold table]

příklad – vzdělání matek

(pozor na orientaci grafu!)

vzdělání	porodnice Praha	porodnice venkov	celkem
základní	23	11	34
střední	30	17	47
VŠ	17	1	18
celkem	70	29	99

vzdělání	porodnice Praha	porodnice venkov	celkem
základní	32,9 %	37,9 %	34,3 %
střední	42,8 %	58,6 %	47,5 %
VŠ	24,3 %	3,5 %	18,2 %
celkem	100 %	100 %	100 %

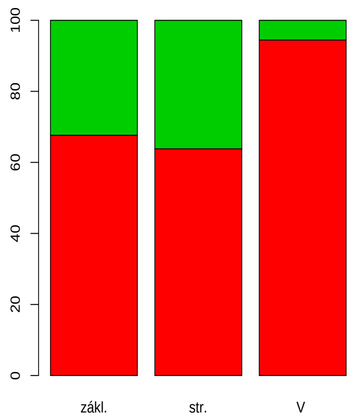


příklad – vzdělání matek

(pozor na orientaci)

vzdělání	porodnice Praha	porodnice venkov	celkem
základní	23	11	34
střední	30	17	47
VŠ	17	1	18
celkem	70	29	99

vzdělání	porodnice Praha	porodnice venkov	celkem
základní	67,6 %	32,4 %	100 %
střední	63,8 %	36,2 %	100 %
VŠ	94,4 %	6,6 %	100 %
celkem	70,7 %	29,3 %	100 %



kvalitativní – kvantitativní

- podle kvalitativní proměnné rozdělíme hodnoty kvantitativní proměnné do dílčích souborů
- porovnáme charakteristiky dílčích souborů (zejména charakteristiky polohy) mezi sebou, pokud se hodně liší, svědčí to pro závislost
- celkový průměr = vážený průměr dílčích souborů
- celkový rozptyl $\doteq$ vážený průměr rozptylů + vážený rozptyl průměrů (přesně jen pro populační rozptyly s n ve jmenovateli)
- snáze jako **rozklad součtu čtverců**

příklad: platy u tří skupin zaměstnanců

skup.	příjem	n_j	$\bar{x}_j$	s_j	s_j^2
žlutí	200 150	2	175,00	35,4	1250,0
modří	80 70 60 60	4	67,50	9,6	91,7
černí	20 20 18 18 15 15 10 10	8	15,75	4,0	16,2
celkem	746	14	53,29	57,7	3334,4

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 175{,}0 + 4 \cdot 67{,}50 + 8 \cdot 15{,}75}{2+4+8} = 53{,}29$$

$$s^2 = 3334{,}4 > \frac{2 \cdot 1250{,}0 + 4 \cdot 91{,}7 + 8 \cdot 16{,}2}{2+4+8} = 214{,}0$$

- nevážený (nesmyslný) průměr by byl 86,08!
- rozptyl celkem je mnohem větší, než jsou rozptyly ve skupinách
- příčina: nestejné průměry

rozklad součtu čtverců

- velikost kolísání **všech** platů (celková variabilita):

$$SST = (200-53{,}29)^2 + (150-53{,}29)^2 + (80-53{,}29)^2 + \dots + (10-53{,}29)^2 = 43\,346{,}86$$

- velikost kolísání **uvnitř** skupin:

$$SSE = (200-175)^2 + (150-175)^2 + (80-67{,}5)^2 + \dots + (10-15{,}75)^2 = 1\,638{,}5$$

- kolísání průměrů (**mezi** skupinami):

$$SSA = 2 \cdot (175-53{,}29)^2 + 4 \cdot (67{,}5-53{,}29)^2 + 8 \cdot (15{,}75-53{,}29)^2 = 41\,708{,}36$$

- kontrola: 1 638,5+41 708,36=43 346,86

rozklad součtu čtverců obecně

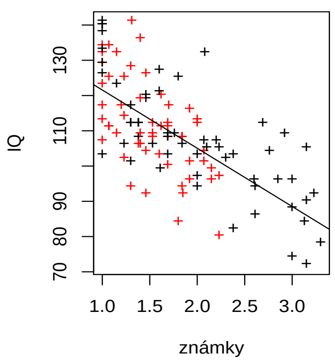
- x_{ij} j-tá hodnota v i-té skupině (plat j-té osoby v i-té skupině)
- n_i počet hodnot v i-té skupině, k počet skupin
- $\bar{x}_{i\bullet}$ průměr v i-té skupině (průměrný plat v i-té skupině)
- $\bar{x}_{\bullet\bullet}$ celkový průměr (průměr všech platů)

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{\bullet\bullet})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} n_i\,(\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet})^2 \\ &= SSA + SSE \end{aligned}$$

kvantitativní – kvantitativní

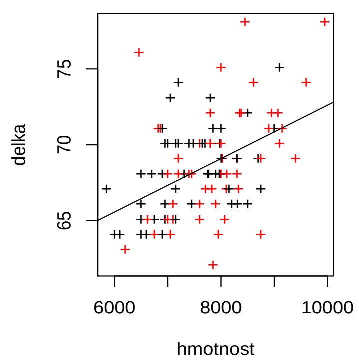
[plot(iq~zn7,data=Iq,col=1+divka,pch="+")]

záporná korelace



$r = -0{,}69$

kladná korelace



$r = 0{,}45$

popis závislosti spojitých veličin

- (výběrová) **kovariance** [covariance] [cov(vek.o,vek.m)]

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- zřejmě je $s_{xx} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) = s_x^2$, $s_{yy} = s_y^2$
- (Pearsonův, momentový) **korelační koeficient** [(Pearson, product-moment) correlation coefficient]
- lze zapsat pomocí z-skórů [cor(vek.o,vek.m)]

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \cdot \frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right)$$

příklad: hmotnost a délka dětí (24. týden věku)

- délka [cm]: $\bar{x} = 68{,}5 \quad s_x = 3{,}28$
- hmotnost [g]: $\bar{y} = 7690, \quad s_y = 845$
- kovariance [cm · g]: $s_{xy} = 1257$
- korelační koeficient: $r = \frac{1257}{3{,}28 \cdot 845} = 0{,}45$
- hmotnost [kg]: $\bar{y} = 7{,}69 \quad s_y = 0{,}845$
- kovariance [cm · kg]: $s_{xy} = 1{,}257$
- korelační koeficient: $r = \frac{1{,}257}{3{,}28 \cdot 0{,}845} = 0{,}45$
- které charakteristiky závisí na použitém měřítku?

vlastnosti Pearsonova korelačního koeficient

- vypovídá o směru závislosti
- při $r < 0$ s rostoucím x v průměru y klesá (např. IQ a známky)
- při $r > 0$ s rostoucím x v průměru y roste (např. váha a výška)
- platí $-1 \leq r \leq 1$
- $|r| = 1$ jedině tehdy, když body $[x; y]$ leží na přímce
- vzájemné nezávislosti x, y odpovídají r blízká nule (upřesníme!)
- nemusí zachytit křivočarou (nelineární) závislost