Statistika

(D360P03Z, D360P03U)

akademický rok 2007/2008

Karel Zvára
karel.zvara@mff.cuni.cz
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zvara

pracovní verze ze září 2007

literatura

- Z. Pavlík, K. Kühnl: Úvod do kvantitativních metod pro geografy, SPN Praha, 1981
- K. Zvára: Biostatistika, Karolinum Praha, 1998, 2000, 2001, 2003, 2006
- T. H. Wonnacot, R. J. Wonnacot: Statistika pro obchod a hospodářství, Victoria Publishing Praha, 1992

cvičení, zápočet, zkouška

- cvičení v počítačových učebnách PUA (suterén Albertov 6), Z3 (Albertov 6, u schodů do suterénu), B5 (Viničná 7, 1. patro)
- MS Excel, volně šiřitelný program R (http://cran.r-project.org/)
- (aktivní účast na cvičení, maximálně dvě absence) $\&$ (napsání zápočtového testu) $\Rightarrow$ zápočet
- obsah cvičení více přizpůsoben studovanému oboru
- přednášky formulovány obecněji
- zkouška nejspíš písemná, kombinovaná s ústní, zápočet **musí** zkoušce **předcházet**; přihlašování ke zkoušce přes SIS

přehled témat (1)

- popisná statistika (měřítka, charakteristiky polohy, variability, souvislost znaků)
- statistika v geografických/demografických/sociálních vědách
- pravděpodobnost (základní kombinatorické pojmy, klasická definice, podmíněná pravděpodobnost, nezávislost)
- náhodná veličina (rozdělení, střední hodnota, rozptyl, hustota, distribuční funkce)
- důležitá rozdělení (normální, binomické, Poissonovo, vzájemné vztahy)

přehled témat (2)

- princip statistického usuzování (populace a výběr, parametry a jejich odhady)
- interval spolehlivosti pro parametr, volba rozsahu výběru
- testování hypotéz (chyba 1. druhu, 2. druhu, hladina testu, síla testu, p-hodnota)
- testy (o populačním průměru, populačním podílu či podílech, nezávislosti, regresních koeficientech)
- regrese jako popis závislosti spojitých veličin
- kontingenční (čtyřpolní) tabulky

příklad statistického zjišťování

- zjišťování se týká 200 mužů středního věku
- v souboru je 80 kuřáků a 120 nekuřáků
- 85 mužů má oči modré, 25 hnědé, 90 jiné barvy
- 27 mužů má jen základní vzdělání, 44 neúplné střední, 65 maturitu, 64 vysokoškolské
- 22 se jich narodilo v roce 1942, 19 v roce 1943, 25 v roce 1944, . . . , 18 v roce 1951
- hmotnosti jednotlivých mužů jsou 83, 92, . . . , 63 kg
- Co mají tyto údaje společného? Čím se údaje liší?

příklad statistického zjišťování

- zjišťování se týká příjmů obyvatel
- hodnotíme hrubý příjem za rok
- přihlížíme k místu trvalého bydliště (velikost obce, který kraj)
- přihlížíme k vzdělání (druh, doba školní docházky)
- přihlížíme k věku a pohlaví
- Co mají tyto údaje společného? Čím se údaje liší?

co měříme (zjišťujeme) a kde

- měříme na mnoha **statistických jednotkách** (osoba, domácnost, obec, okres, stát, pokusné pole . . .)
- měříme (zjišťujeme) hodnoty **znaků**
- zjištěnou hodnotu vyjadřujeme ve zvoleném **měřítku** (stupnici)
- na jedné jednotce můžeme měřit několik znaků (závislost)
- měříme na skupinách jednotek – **souborech**
- zajímají nás **hromadné** vlastnosti ve velkých souborech
- můžeme **porovnávat** vlastnosti znaku **mezi soubory**

měřítka (1)

- **nula-jedničkové** (muž/žena, kuřák/nekuřák)
- **nominální** (země původu, barva očí) jednoznačně dané hodnoty
- **ordinální** (dosažené vzdělání, stupeň bolesti) jednoznačně dané hodnoty, možné hodnoty jsou *uspořádané*
- **intervalové** (teplota v Celsiově stupnici, rok narození) konstantní vzdálenosti mezi sousedními hodnotami, nula jen konvence; o *kolik* stupňů je je dnes tepleji, než bylo vloni?
- **poměrové** (hmotnost, výška, HDP, počet obyvatel, věk) násobek zvolené jednotky, nula = neexistence měřené vlastnosti *kolikrát* je A starší (vyšší . . .) než B

měřítka (2)

- **kvalitativní**: nula-jedničkové, nominální, často i ordinální
- u kvalitativních se zpravidla udávají **četnosti** jednotlivých hodnot (kolikrát která hodnota nastala)
- **kvantitativní** (spojité): intervalové, poměrové, někdy ordinální (není spojité)
- hodnoty kvantitativních – čísla
- zařazení znaku k určitému měřítku může záviset na účelu šetření

veličina

- číselně vyjádřený výsledek měření
- *hodnoty* znaků v intervalovém, poměrovém měřítku jsou husté – **spojitá veličina**
- *četnosti hodnot* znaků v nula-jedničkovém, nominálním (či ordinálním) měřítku – **diskrétní veličina**
- pro veličiny máme charakteristiky některých jejich hromadných vlastností (**charakteristiky polohy, variability, tvaru rozdělení**)
- popisné charakteristiky (statistiky) mají jedním číslem vyjádřit danou vlastnost

příklad: 100 hodů kostkou

počty puntíků coby různé obrázky – nominální znak

kostka A

4	2	5	6	3	1	1	2	2	2
2	4	5	3	1	1	3	5	5	5
4	3	2	5	5	5	2	2	5	2
2	6	5	5	2	3	6	6	4	6
5	4	1	4	2	2	4	5	2	5
5	5	3	3	5	3	6	6	6	5
3	5	4	5	1	1	4	3	2	4
1	2	4	6	6	3	4	6	1	2
6	6	1	2	6	2	4	3	2	3
1	1	6	5	2	6	4	4	6	3

kostka B

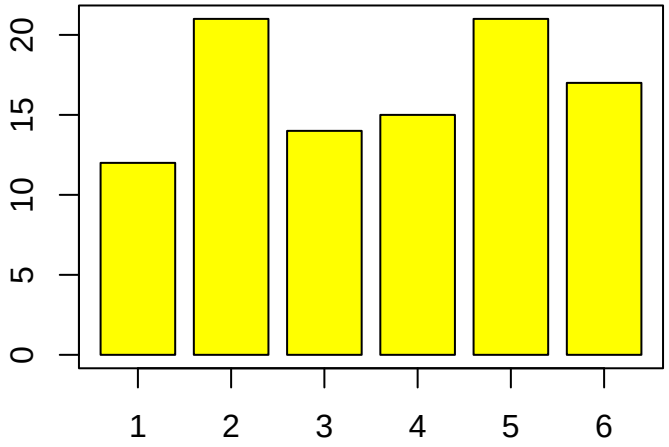
1	4	6	2	3	2	6	1	5	2
5	6	5	5	6	4	2	4	5	6
3	6	3	6	5	6	1	3	5	1
6	6	2	1	1	2	6	3	2	3
4	4	1	6	6	2	6	3	2	6
2	6	1	2	6	1	5	5	6	5
6	6	5	1	6	6	6	1	2	6
6	2	5	6	2	6	6	5	6	4
6	1	2	6	2	1	6	6	6	6
6	5	1	5	6	6	1	6	6	6

hody kostkou jako hromadný jev

- chceme 100 zjištěných hodnot (počtů puntíků) vyjádřit názorně, aby vypovídaly o vlastnostech kostky
- n_j (absolutní) **četnost** [frequency] hodnoty – kolikrát nastala
- $f_j = \frac{n_j}{n}$ **relativní četnost** hodnoty (lze vyjádřit v %) – v jakém dílu měření nastala (nutně platí $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{j=1}^{k} n_j$)
- tabulka četností (absolutních, relativních)
- grafické vyjádření četností – **histogram** [histogram] (velikost plochy je úměrná četnosti)
- rozhodování o kvalitě kostky (zda je symetrická) je úlohou **statistické indukce** [inference] – později

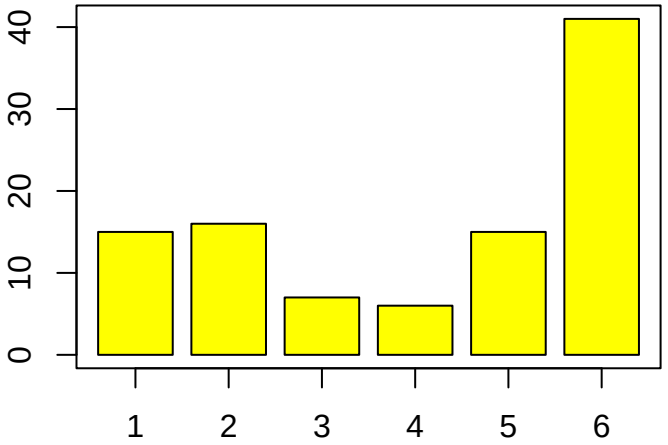
četnosti výsledků hodů kostkou A

	n_j	$f_j = n_j/n$
𝍸 𝍸 ||	12	0,12
𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	21	0,21
𝍸 𝍸 |||	14	0,14
𝍸 𝍸 𝍸	15	0,15
𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	21	0,21
𝍸 𝍸 𝍸 ||	17	0,17
$n = 100$		



četnosti výsledků hodů kostkou B

četnosti	n_j	$f_j = n_j/n$
𝍸	15	0,15
𝍸|	16	0,16
𝍸 ||	7	0,07
𝍸|	6	0,06
𝍸 𝍸	15	0,15
𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸|	41	0,41
	$n = 100$	



příklad: věk 99 matek

99 zjištěných hodnot – soubor naměřených hodnot

26	35	21	25	27	24	24	30	23	18
35	21	25	26	26	19	29	22	21	27
26	30	28	28	27	29	27	26	21	23
24	21	28	25	34	24	21	28	25	28
22	26	32	22	32	25	21	25	24	32
24	22	31	33	23	30	26	27	25	24
24	23	25	23	26	28	24	25	25	26
28	28	22	23	20	20	21	31	24	21
29	28	26	38	20	23	25	37	33	23
27	23	21	25	21	33	22	29	21	

příklad: věk 99 matek – **variační řada**

uspořádaný soubor hodnot – variační řada

18	19	20	20	20	21	21	21	21	21
21	21	21	21	21	21	21	22	22	22
22	22	22	23	23	23	23	23	23	23
23	23	24	24	24	24	24	24	24	24
24	24	25	25	25	25	25	25	25	25
25	25	25	25	26	26	26	26	26	26
26	26	26	26	27	27	27	27	27	27
28	28	28	28	28	28	28	28	28	29
29	29	29	30	30	30	31	31	32	32
32	33	33	33	34	35	35	37	38	

variační řada, pořadí

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ původní (neuspořádaná) data – hodnoty znaku v měřítku aspoň ordinálním uvedené v původním pořadí, bez ohledu na případná opakování
- **variační řada** $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ [sort(x)]
  data uspořádána tak, aby hodnoty neklesaly (**závorky u indexů**)
- **pořadí** [rank] – umístění pozorování ve variační řadě; shodným hodnotám dáváme průměrné pořadí [rank(x)]

x_j	22	15	17	15	21	13	18
pořadí R_j	7	2,5	4	2,5	6	1	5

třídění, třídní četnosti

- spojitá veličina s velkým počtem naměřených hodnot
- obor hodnot rozdělíme na nepřekrývající se třídy (intervaly), nejlépe stejné délky (ne vždy je to praktické)
- všechna pozorování z daného intervalu nahradíme zástupnou hodnotou (zpravidla středem intervalu) x_j^*
- zjistíme (**absolutní**) **četnosti** $n_1, \ldots, n_k$ jednotlivých tříd
- **kumulativní četnosti** udávají počet hodnot v dané třídě a třídách předcházejících $(1 \leq j \leq k)$ [cumsum( )]

$$N_j = n_1 + n_2 + \ldots + n_j = \sum_{i=1}^{j} n_i$$

věk matek – třídní četnosti $k = 7$

interval	x_j^*	n_j	$f_j = n_j/n$	N_j	N_j/n
do 20	19	5	0,051	5	0,051
21 až 23	22	27	0,273	32	0,324
24 až 26	25	32	0,322	64	0,646
27 až 29	28	19	0,192	83	0,838
30 až 32	31	8	0,081	91	0,919
33 až 35	34	6	0,061	97	0,980
36 až 38	37	2	0,020	99	1,000

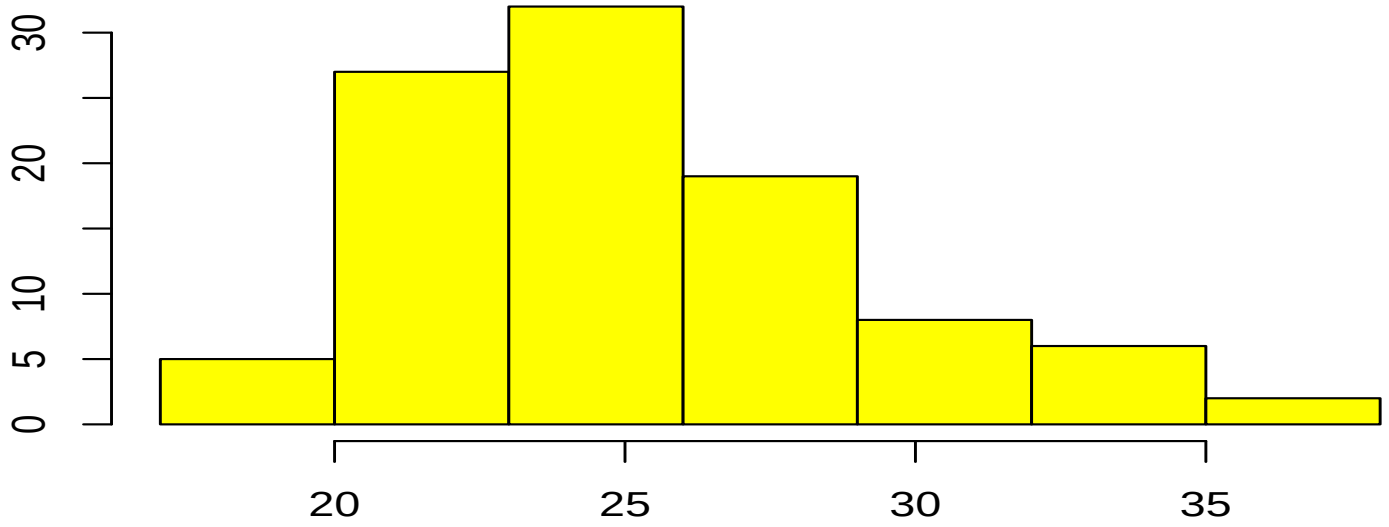
grafické znázornění třídních četností

- **histogram** je založen na třídění do intervalů, výjimečně zobrazuje přímo četnosti jednotlivých hodnot (barplot) [hist( )]
- každé třídě odpovídá obdélník o **ploše úměrné četnosti** (absolutní nebo relativní)
- při stejných šířkách intervalů h odpovídají četnostem výšky obdélníků (protože základny jsou stejně dlouhé)
- počet intervalů k: 5–15 tak, aby středy byly okrouhlé, pomůckou Sturgesovo pravidlo

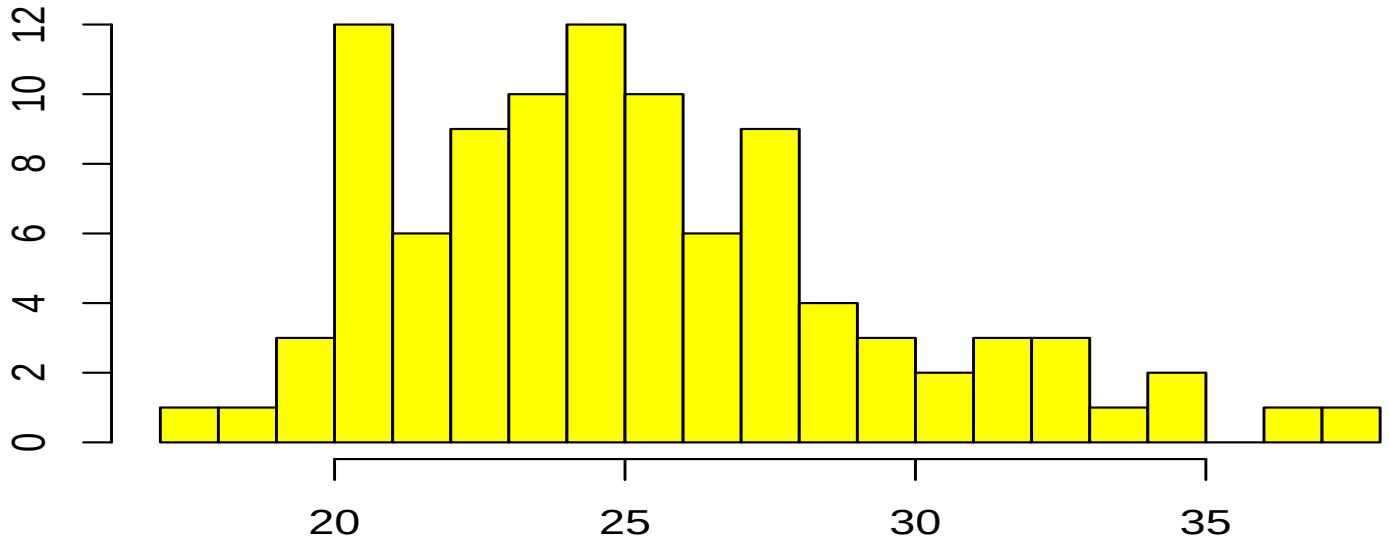
$$k \approx 1 + 3{,}3 \cdot \log_{10} n = 1 + \log_2 n$$

- příklad věk matek: $k \approx 1 + 3{,}3 \cdot \log_{10} 99 \approx 7{,}6$

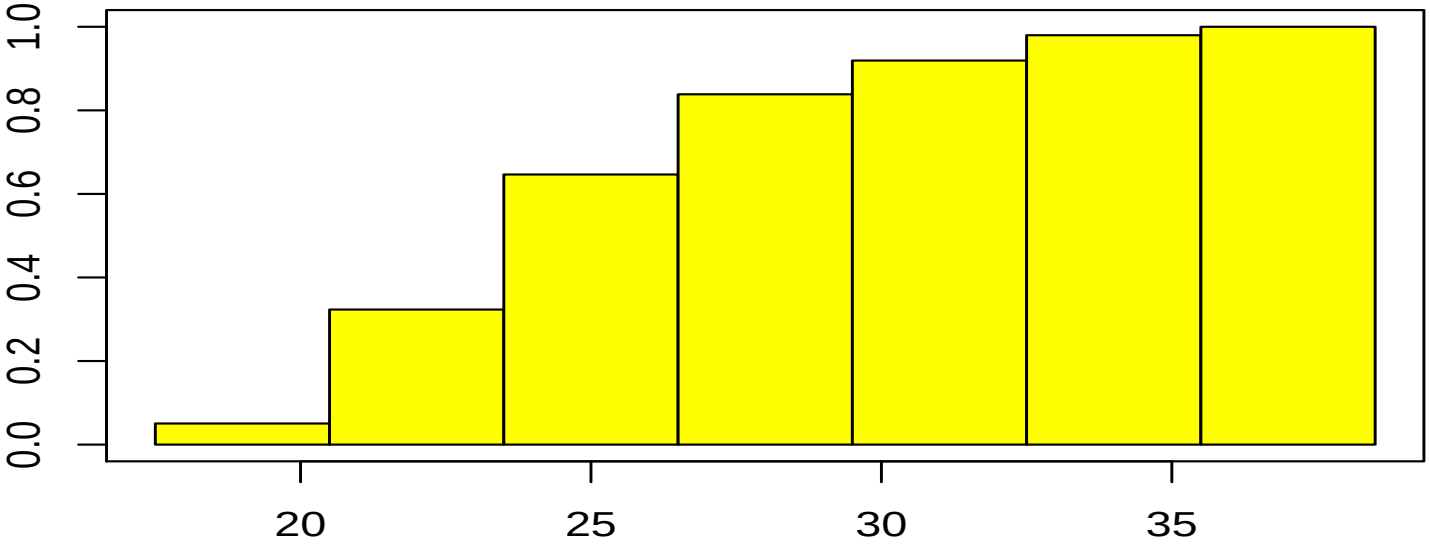
histogram, h **=3 (**k **=7)** [hist(vek.m,seq(17,38,by=3),col="yellow")]



histogram, $h = 1$ [hist(vek.m,seq(17,38,by=1),col="yellow")]



příklad: věk matek (kumulativní relativní četnosti)



třídění při nestejně dlouhých intervalech

- někdy jsou data nepravidelně rozmístěna, zpravidla jsou u levého okraje intervalu hodnot (věkové či příjmové složení obyvatelstva)
- je vhodné zvolit délky intervalů tak, aby delší byly násobkem kratších
- při nestejně dlouhých intervalech musí zjištěné četnosti odpovídat **plocha**, nikoliv výška; pak se na svislou osu nanáší **relativní** četnosti

příklad: tolary

měsíční příjmy 99 osob v tolarech

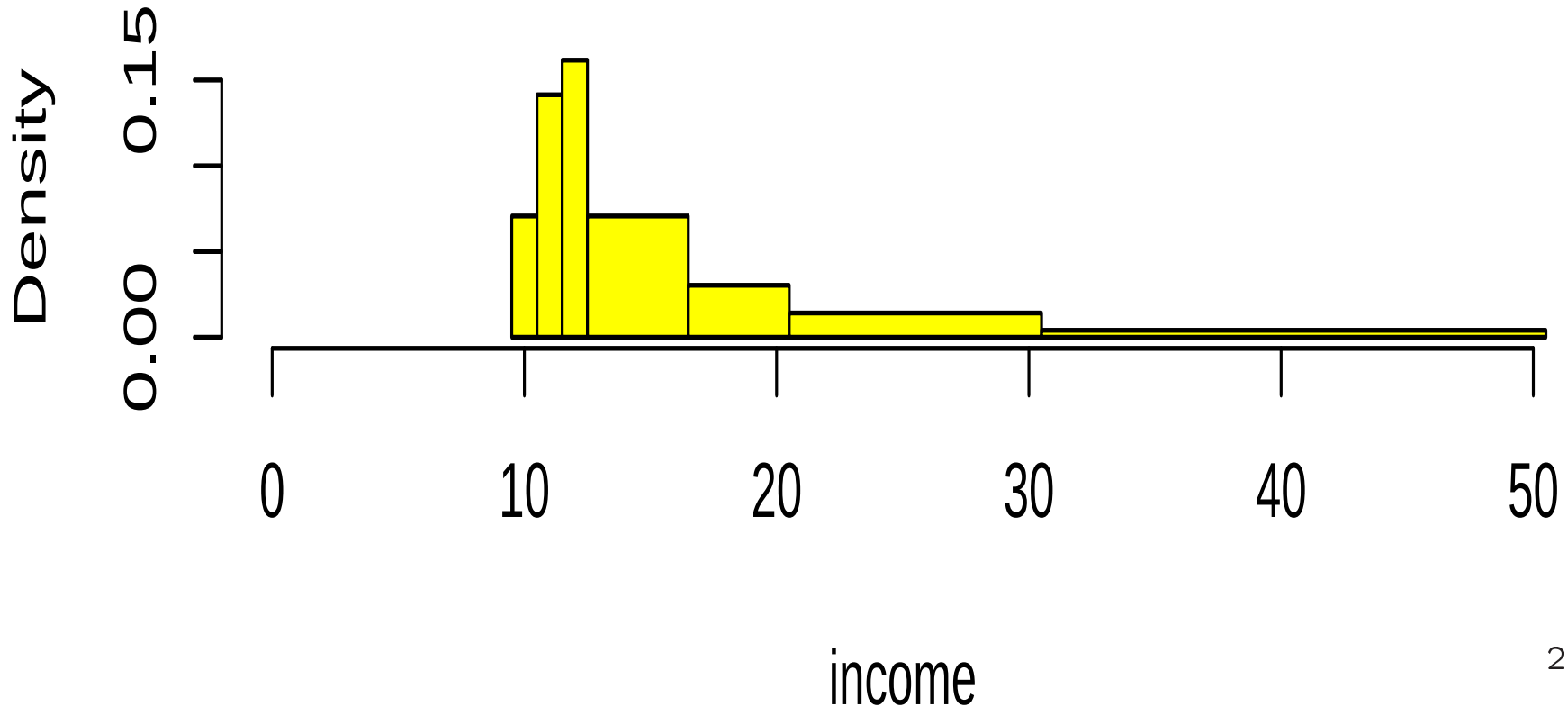
četnosti

x_j	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_j	7	14	16	10	6	3	9	3	1	5	3

x_j	21	22	24	26	27	28	32	35	36	40	43	45	47
n_j	4	3	3	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1

třídní četnosti

třída	10	11	12	13–16	17–20	21–30	31–50	celkem
x_j^*	10	11	12	14,5	18,5	25,5	40,5	
n_j^*	7	14	16	28	12	14	8	99
hustota	7	14	16	7	3	1,4	0,4	


Density
0.00
0.15
0
10
20
30
40
50
income

snaha charakterizovat vlastnost jediným číslem výběrové charakteristiky polohy (1)

- **medián** (prostřední hodnota) $\tilde{x}$ [median] [median(x)]

$$\tilde{x} = x_{(\frac{n+1}{2})} \qquad \text{pro } n \text{ liché}$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}\left(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}\right) \qquad \text{pro } n \text{ sudé}$$

medián je číslo, které dělí data na dvě stejně velké části (velkých hodnot a malých hodnot)
(závorky u indexů jsou nutné: znamenají, že hodnoty byly předem uspořádány do variační řady)

charakteristiky polohy (2)

- **dolní (horní) kvartil** Q_1 (Q_3) [lower (upper) quartile] vyděluje čtvrtinu nejmenších (největších) hodnot
- kvartil – speciální případ **percentilu** x_p [percentile] pro $p = 0{,}25$ ($p = 0{,}75$), přičemž x_p vyděluje $100p$ % nejmenších hodnot od ostatních [quantile(x,probs=c(1/4,3/4))]
- výpočet percentilů – mnoho vzorečků
- medián je také percentilem, totiž $x_{0,5}$

pro zajímavost algoritmus výpočtu percentilu v R
(jedna z možných definic – Gumbel(1939))

- najde se celé číslo k splňující
  ($\lfloor x \rfloor$] znamená celou část z x)

$$\frac{k-1}{n-1} \leq p < \frac{k}{n-1}$$

  tedy

$$k = \lfloor 1 + (n-1) \cdot p \rfloor$$

- provede se lineární interpolace mezi $x_{(k)}$ a $x_{(k+1)}$
  ($\{x\}$ znamená zlomkovou část x, o kolik přesahuje celé číslo)

$$q = \{1 + (n-1) \cdot p\} = (1 + (n-1) \cdot p) - k$$
$$x_p = (1-q) \cdot x_{(k)} + q \cdot x_{(k+1)}$$

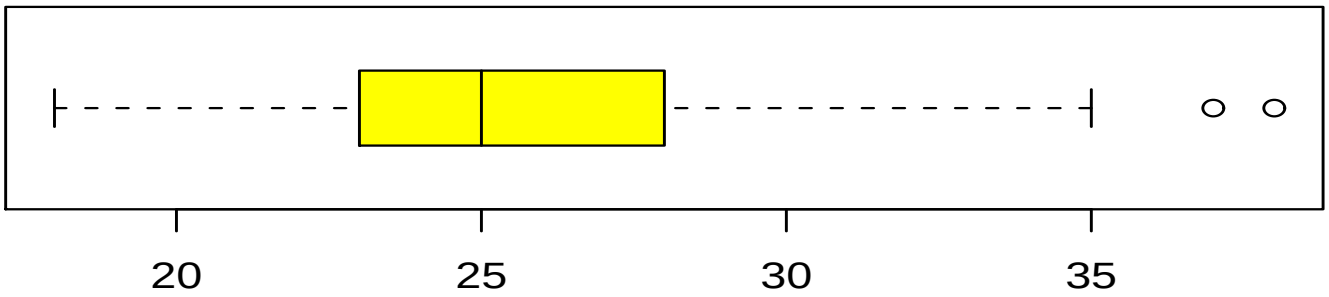
příklad: věk 99 matek – variační řada

variační řada, medián $\tilde{x}$ =25, kvartily Q_1 =23, Q_3 =28

18	19	20	20	20	21	21	21	21	21
21	21	21	21	21	21	21	22	22	22
22	22	22	23	23	23	23	23	23	23
23	23	24	24	24	24	24	24	24	24
24	24	25	25	25	25	25	25	25	25
25	25	25	25	26	26	26	26	26	26
26	26	26	26	27	27	27	27	27	27
28	28	28	28	28	28	28	28	28	29
29	29	29	30	30	30	31	31	32	32
32	33	33	33	34	35	35	37	38	

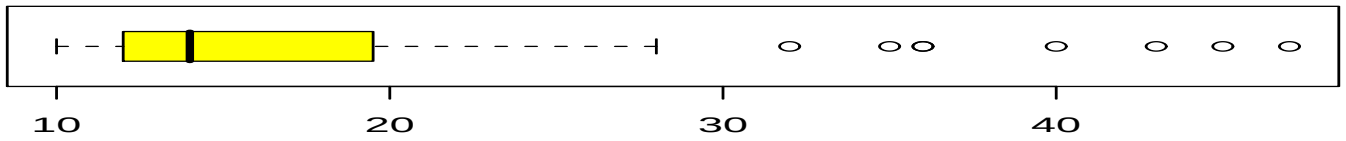
krabicový diagram

- **krabicový diagram** [box-plot] zobrazuje kvartily, medián, minimum, maximum, případně odlehlá pozorování: od bližšího kvartilu dál než $3/2 \cdot (Q_3 - Q_1)$ [boxplot(x)]
- příklad: věk matek ($Q_1 = 23$, $Q_3 = 28$, dvě odlehlá pozorování)



příklad: tolary

10	10	10	10	10	10	10	11	11	11
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
11	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	13	13	13
13	13	13	13	13	13	13	14	14	14
14	14	14	15	15	15	16	16	16	16
16	16	16	16	16	17	17	17	18	19
19	19	19	19	20	20	20	21	21	21
21	22	22	22	24	24	24	26	27	27
28	32	35	36	36	40	43	45	47	



charakteristiky polohy (3)

- **průměr** [mean] (kdyby bylo všech n hodnot stejných) [mean(x)]

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- **vážený průměr**: [weighted mean] založen na četnostech

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1 x_1^* + \ldots + n_k x_k^*) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j^* = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{n} x_j^* = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j x_j^*}{\sum_{j=1}^{k} n_j}$$

- obecněji s vahami $w_1, \ldots, w_k$ hodnot $x_1^*, \ldots, x_k^*$

$$\boxed{\frac{\sum_{j=1}^{k} w_j x_j^*}{\sum_{j=1}^{k} w_j}}$$

charakteristiky polohy (4)

- u nula-jedničkového měřítka: průměr = relativní četnost jedniček
- **modus** $\hat{x}$ [mode] nejčastější hodnota (lze počítat také pro nominální či ordinální měřítko)
- modus nemusí být určen jednoznačně

příklad – věk matek

- průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{99}(26 + 35 + \ldots + 21 + 23) = \frac{2544}{99} \doteq 25{,}7$$

- vážený průměr založený na třídění (str. 20)

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 19 + 27 \cdot 22 + 32 \cdot 25 + 19 \cdot 28 + 8 \cdot 31 + 6 \cdot 34 + 2 \cdot 37}{5 + 27 + 32 + 19 + 8 + 6 + 2}$$
$$= \frac{2547}{99} \doteq 25{,}7$$

- modus není určen jednoznačně: $\hat{x} = 21$, $\hat{x} = 25$

příklad – tolary

- průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{99}\left(26 + 20 + \ldots + 12 + 10\right) = \frac{1687}{99} \doteq 17{,}04$$

- vážený průměr založený na četnostech jednotlivých hodnot

$$\bar{x} = \frac{7 \cdot 10 + 14 \cdot 1 + 16 \cdot 12 + 10 \cdot 13 + \cdots + 1 \cdot 47}{7 + 14 + 16 + \cdots + 8} = \frac{1687}{99} \doteq 17{,}04$$

- vážený průměr založený na třídních četnostech (str. 26)

$$\bar{x} = \frac{7 \cdot 10 + 14 \cdot 1 + 16 \cdot 12 + 28 \cdot 14{,}5 + 12 \cdot 18, + 14 \cdot 25{,}5 + 8 \cdot 40{,}5}{7 + 14 + 16 + \cdots + 8}$$

$$= \frac{1725}{99} \doteq 17{,}42$$

- modus: $\hat{x} = 12$

charakteristiky polohy (5)

- **alfa-useknutý průměr** [trimmed mean]: nejprve se oddělí (usekne) 100α % nejmenších a 100α % největších hodnot, ze zbytku se spočítá průměr
- je robustní vůči odlehlým hodnotám
- volí se zpravidla $\alpha = 0{,}1$ (0,15)
- věk matek [mean(vek.m,trim=0.1)]

$$\frac{1}{99-18}\left(x_{(10)} + x_{(11)} + \ldots + x_{(89)} + x_{(90)}\right) = 25{,}3$$

(průměr počítán pouze z černých čísel)

vyloučí se $\lfloor 0{,}1 \cdot 99 \rfloor = \lfloor 9{,}9 \rfloor = 9$ ($\lfloor x \rfloor$ znamená celou část z x)
nejmenších a 9 největších hodnot

18	19	20	20	20	21	21	21	21	21
21	21	21	21	21	21	21	22	22	22
22	22	22	23	23	23	23	23	23	23
23	23	24	24	24	24	24	24	24	24
24	24	25	25	25	25	25	25	25	25
25	25	25	25	26	26	26	26	26	26
26	26	26	26	27	27	27	27	27	27
28	28	28	28	28	28	28	28	28	29
29	29	29	30	30	30	31	31	32	32
32	33	33	33	34	35	35	37	38	

vlastnosti charakteristik polohy

- změníme-li všechny hodnoty x_i tak, že přidáme ke každé stejnou konstantu a, změní se o tutéž konstantu také charakteristika polohy (posunutí)
- změníme-li všechny hodnoty x_i tak, že je vynásobíme kladnou konstantou b, toutéž konstantou musíme vynásobit původní charakteristiku polohy, abychom dostali charakteristiku polohy pro upravená data (změna měřítka)
- obecně pro míru polohy $m(x)$

$$m(a + x) = a + m(x),$$
$$m(b \cdot x) = b \cdot m(x), \qquad b > 0$$

- v **obou** případech míra polohy **reaguje**

charakteristiky variability (1)

- měří nestejnost (**variabilitu**) hodnot spojité veličiny
- obecně pro míru variability $s(x)$

$$s(a + x) = s(x),$$
$$s(b \cdot x) = b \cdot s(x), \qquad b > 0$$

- přičtením stejné konstanty a (posunutím) se charakteristika variability nezmění (nezávisí na poloze)
- vynásobení kladnou konstantou znamená, že stejnou konstantou nutno vynásobit charakteristiku variability
- **rozpětí** [range] $R = x_{(n)} - x_{(1)}$
- **kvartilové rozpětí** [quartile range] $R_Q = Q_3 - Q_1$

charakteristiky variability (2)

- (výběrový) **rozptyl** (variance) [variance] [var(x)]
  (nevyhovuje druhému požadavku, místo toho: $s^2_{a+b\cdot x} = b^2 \cdot s^2_x$)

$$
\begin{aligned}
s_x^2 &= \frac{1}{n-1}\left((x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\cdot\bar{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k} n_j(x_j^*-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} n_j x_j^{*2} - n\cdot\bar{x}^2\right)
\end{aligned}
$$

- nechť je $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 8$, pak dostaneme $\bar{x} = 4$ a

$$
s_x^2 = \frac{1}{3-1}\left((1-4)^2 + (3-4)^2 + (8-4)^2\right) = \frac{26}{2} = 13 \doteq 3{,}6^2
$$

charakteristiky variability (3)

- rozptyl měří průměrný čtverec vzdálenosti od průměru
- **směrodatná odchylka** [std. deviation]: odmocnina z rozptylu [sd(x)]

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

- vyhovuje obecnému požadavku
- výhoda směrodatné odchylky:
  stejný fyzikální rozměr jako původní data
- výběrový rozptyl z *třídních* četností:
  Sheppardova korekce (jsou-li všechny intervaly délky h):

$$\text{odečti } \frac{h^2}{12}$$

příklad – věk matek

- rozpětí: $R = 38 - 18 = 20$
- kvartilové rozpětí: $R_Q = 28 - 23 = 5$
- rozptyl

$$s^2 = \frac{1}{98}\left((26^2 + 35^2 + \ldots + 21^2 + 23^2) - 99 \cdot \left(\frac{2544}{99}\right)^2\right)$$
$$= 16{,}97 \doteq 4{,}12^2$$

- směrodatná odchylka je 4,12

příklad – věk matek

- pomocí třídních četností

$$s^2 = \frac{1}{98}\left(\left(5 \cdot 19^2 + 27 \cdot 22^2 + \ldots + 6 \cdot 34^2 + 2 \cdot 37^2\right) - 99 \cdot \left(\frac{2547}{99}\right)^2\right)$$
$$= 16{,}36 = (4{,}05)^2$$

- navíc Sheppardova korekce

$$s^2 = 16{,}36 - \frac{3^2}{12} = (3{,}95)^2$$

charakteristiky variability (4)

- **střední odchylka** [mean deviation]: průměr odchylek od mediánu (někdy od průměru) [mean(abs(x-median(x)))]

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \tilde{x}|$$

- **střední diference**: průměr vzájemných vzdáleností všech n^2 dvojic

$$\Delta = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|$$

$$= \frac{2}{n^2}\sum\sum_{j>i}\left(x_{(j)} - x_{(i)}\right)$$

normované charakteristiky rozptýlenosti

- dosud zavedené charakteristiky variability závisejí na volbě měřítka (např. délka v m nebo v km)⇒ hledáme charakteristiky nezávislé na měřítku, nutně *poměrové* měřítko, *kladné* hodnoty
- umožní **porovnání** z různých souborů
- **variační koeficient** [sd(x)/mean(x)]

$$v = \frac{s_x}{\bar{x}}$$

- **(Giniho) koeficient koncentrace**

$$G = \frac{\Delta}{2\bar{x}} \left(= \frac{2\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_{(i)}}{n\sum_{i=1}^{n} x_i} - \frac{n+1}{n} \right)$$

  například měří nerovnoměrnost příjmů, velikostí územních jednotek, souvisí s plochou u Lorenzovy křivky

z-skór, standardizace

- variační koeficient v, Giniho koeficient G – příklady bezrozměrných veličin (zásluhou průměru ve jmenovateli závisí G na posunutí!)
- z-skóry [(x-mean(x))/sd(x)] nebo [c(scale(x))]

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

- dostaneme nulový průměr ($\bar{z} = 0$), jednotkový rozptyl ($s_z = 1$)
- z-skóry jsou bezrozměrné $\Rightarrow$ umožní hodnotit vlastnosti nezávislé na poloze a variabilitě, např. tvar rozdělení
- $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3 \Rightarrow \bar{x} = 2, s_x = 1 \Rightarrow z_1 = \frac{1-2}{1} = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$

šikmost, špičatost

- **šikmost** $\sqrt{b_1}$ – **průměr** z 3. mocnin z-skórů [mean(scale(x)^3)]
- **špičatost** b_2 – **průměr** ze 4. mocnin z-skórů (někdy se odečítá 3)

$$\sqrt{b_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)^3 \qquad b_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)^4$$

- někdy se počítají odhady populační šikmosti a špičatosti jinak (Excel: Fisherovo g_1, g_2 – pro zajímavost)

$$g_1 = \frac{\sqrt{n(n-1)b_1}}{n-2}, \qquad g_2 = \frac{(n+1)(n-1)}{(n-2)(n-3)}\left(b_2 - \frac{3(n-1)}{n+1}\right)$$

dvojice znaků (veličin)

- na jedné statistické jednotce se měří aspoň dva znaky
- lze vyšetřovat závislost
- postupy (i grafické) závisí na měřítcích obou znaků
  - kvalitativní – kvalitativní
  - kvalitativní – kvantitativní
  - kvantitativní – kvantitativní
- zatím popisné charakteristiky, prokazování závislosti později

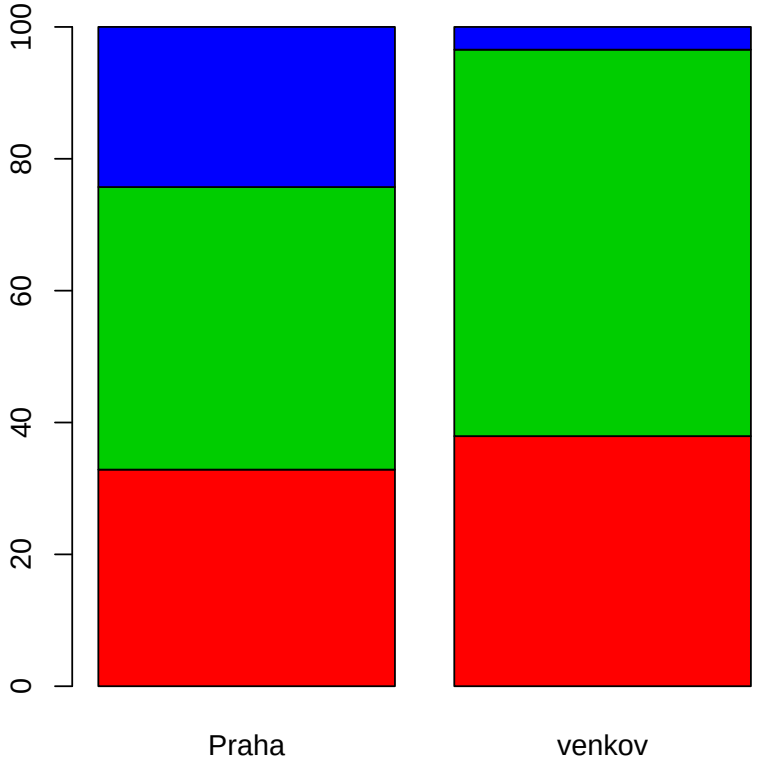
kvalitativní – kvalitativní

- kvalitativní data – nominální (ordinální) měřítko, vyjadřujeme pomocí četností
- dva znaky – četnosti možných **dvojic hodnot** n_{ij}
- zapisujeme do **kontingenční tabulky** [contingency table]
  [table(x,y)] nebo [xtabs(∼x+y)]
- doplňujeme **marginální četnosti** [marginal frequencies] – součty po řádcích a po sloupcích - četnosti jednotlivých znaků zvlášť
- oba znaky nula-jedničkové – kontingenční tabulka 2×2, **čtyřpolní tabulka** [fourfold table]

příklad – vzdělání matek (pozor na orientaci)

vzdělání	porodnice		celkem
	Praha	venkov	
základní	23	11	34
střední	30	17	47
VŠ	17	1	18
celkem	70	29	99

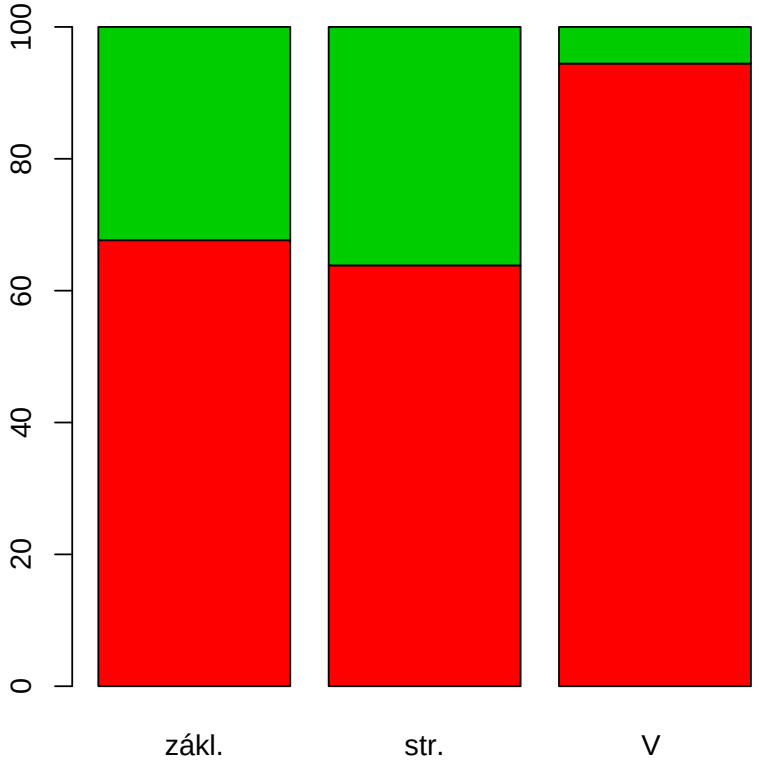
vzdělání	porodnice		celkem
	Praha	venkov	
základní	32,9 %	37,9 %	34,3 %
střední	42,8 %	58,6 %	47,5 %
VŠ	24,3 %	3,5 %	18,2 %
celkem	100 %	100 %	100 %



příklad – vzdělání matek (pozor na orientaci)

vzdělání	porodnice		celkem
	Praha	venkov	
základní	23	11	34
střední	30	17	47
VŠ	17	1	18
celkem	70	29	99

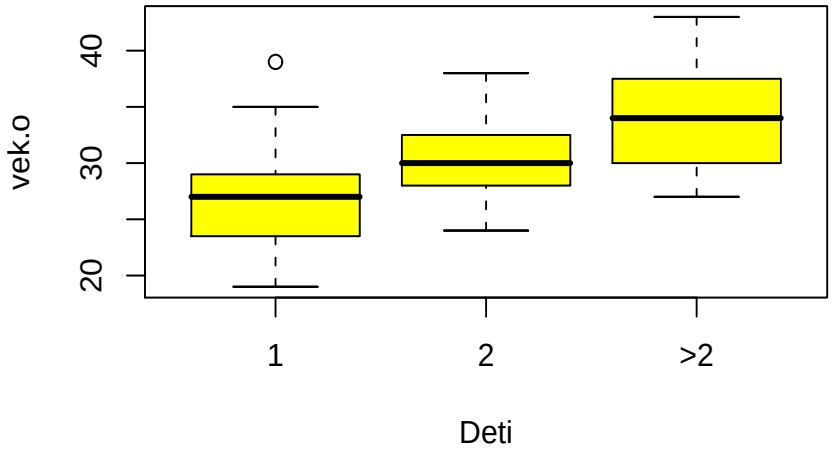
vzdělání	porodnice		celkem
	Praha	venkov	
základní	67,6 %	32,4 %	100 %
střední	63,8 %	36,2 %	100 %
VŠ	94,4 %	6,6 %	100 %
celkem	70,7 %	29,3 %	100 %



dvojice kvalitativní – kvantitativní

- podle kvalitativní proměnné rozdělíme hodnoty kvantitativní proměnné do dílčích souborů
- porovnáme charakteristiky dílčích souborů (zejména charakteristiky polohy) mezi sebou, pokud se hodně liší, svědčí to pro závislost
- celkový průměr = vážený průměr dílčích souborů
- celkový rozptyl = vážený průměr rozptylů + vážený rozptyl průměrů (přesně jen pro populační rozptyly s n ve jmenovateli)
- snáze jako **rozklad součtu čtverců**

příklad: věk otce $\sim$ pořadí dítěte [boxplot(pocet.deti∼Poradi)]



dětí	rozsah	průměr	sm. odch.
1	56	26,9	4,23
2	32	30,5	3,94
>2	11	34,4	5,32
celkem	99	28,9	4,94

$$\bar{x} = \frac{56 \cdot 26{,}9 + 32 \cdot 30{,}5 + 11 \cdot 34{,}4}{56 + 32 + 11} = \frac{2860}{99} = 28{,}9$$

$$s^2 = 4{,}94^2 = 24{,}4 > \frac{56 \cdot 4{,}23^2 + 32 \cdot 3{,}94^2 + 11 \cdot 5{,}32^2}{56 + 32 + 11} = 18{,}29 = 4{,}28^2$$

rozklad součtu čtverců

- velikost kolísání věku otců popíše součet čtverců odchylek od **celkového** průměru

$$SST = (30 - 28{,}9)^2 + (38 - 28{,}9)^2 + \ldots = 2391{,}8$$

- kolísání průměrů

$$SSA = 56 \cdot (26{,}9 - 28{,}9)^2 + 32 \cdot (30{,}5 - 28{,}9)^2 + 11 \cdot (34{,}4 - 28{,}9)^2 = 643{,}1$$

- kolísání uvnitř skupin (odečítají se vždy jen průměry ve skupinách)

$$\begin{aligned} SSE = {} & (28 - 26{,}9)^2 + (26 - 26{,}9)^2 + \ldots + (23 - 26{,}9)^2 \\ & + (38 - 30{,}5)^2 + (32 - 30{,}5)^2 + \ldots + (25 - 30{,}5)^2 \\ & + (30 - 34{,}4)^2 + (30 - 34{,}4)^2 + \ldots + (36 - 34{,}4)^2 = 1748{,}6 \end{aligned}$$

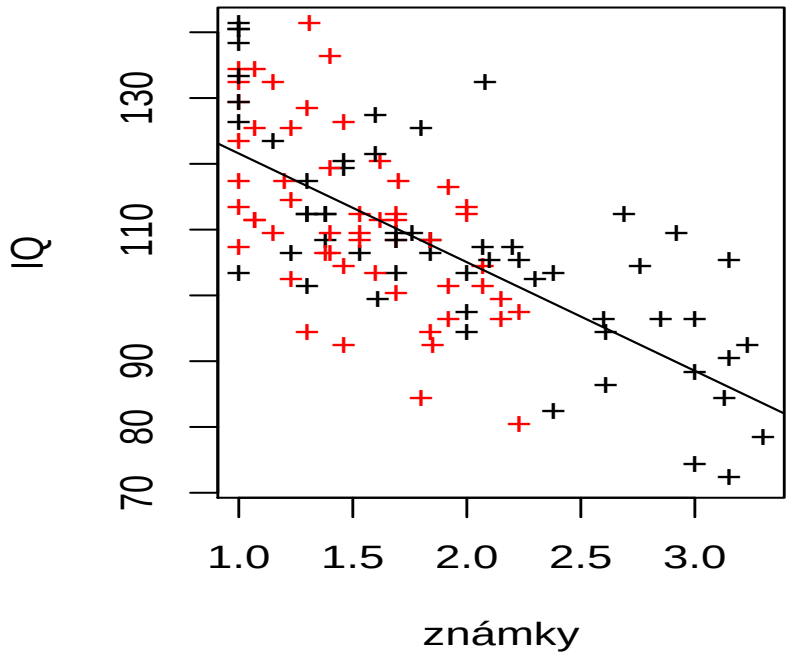
- až na zaokrouhlení jsme ověřili, že je $SST = SSA + SSE$

rozklad součtu čtverců

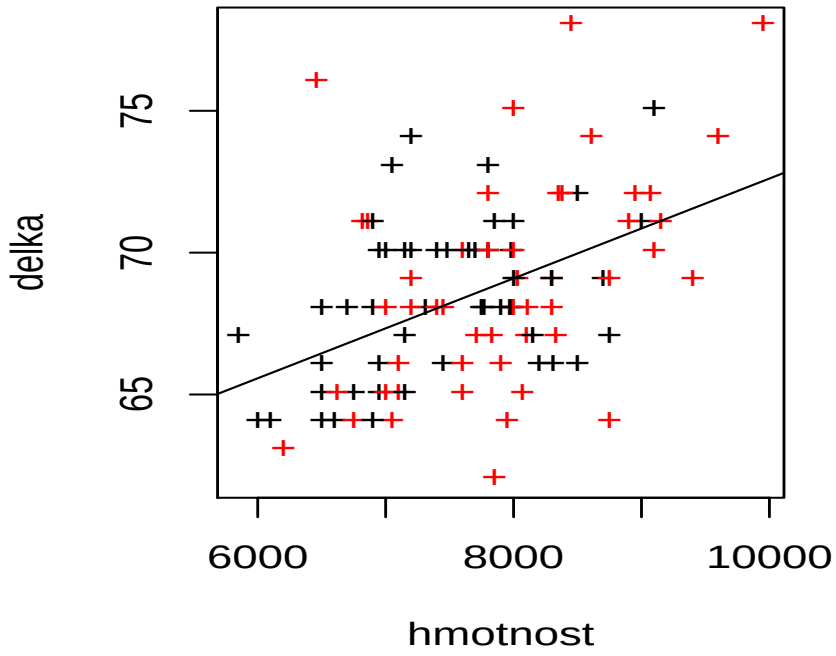
- x_{ij} j-tá hodnota v i-té skupině (věk j-tého otce v i-té skupině)
- n_i počet hodnot v i-té skupině, k počet skupin
- $\bar{x}_{i\bullet}$ průměr v i-té skupině (průměrný věk v i-té skupině)
- $\bar{x}_{\bullet\bullet}$ celkový průměr (průměr mezi všemi otci)

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_{\bullet\bullet}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} n_i\left(\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet\bullet}\right)^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}\right)^2 \\ &= SSA + SSE \end{aligned}$$

dvojice kvantitativních veličin [plot(iq zn7,data=Iq,col=1+divka,pch="+"



$r = -0{,}69$



$r = 0{,}45$

závislost spojitých veličin [cor(vek.o,vek.m)]

- (výběrová) **kovariance** [covariance] [cov(vek.o,vek.m)]

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- zřejmě je $s_{xx} = s_x^2,\ s_{yy} = s_y^2$
- (Pearsonův, momentový) **korelační koeficient** [(Pearson, product-moment) correlation coefficient] lze zapsat pomocí z-skórů

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\cdot\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

příklad: hmotnost a délka dětí (24. týden věku)

- délka [cm]: $\bar{x} = 68{,}5 \quad s_x = 3{,}28$
- hmotnost [g]: $\bar{y} = 7690, \quad s_y = 845$
- kovariance [cm · g]: $s_{xy} = 1257$
- korelační koeficient: $r = \frac{1257}{3{,}28 \cdot 845} = 0{,}45$
- hmotnost [kg]: $\bar{y} = 7{,}69 \quad s_y = 0{,}845$
- kovariance [cm · kg]: $s_{xy} = 1{,}257$
- korelační koeficient: $r = \frac{1{,}257}{3{,}28 \cdot 0{,}845} = 0{,}45$
- Které charakteristiky závisí na použitém měřítku?

vlastnosti Pearsonova korelačního koeficientu

- vypovídá o směru závislosti
- při $r < 0$ s rostoucím x v průměru y klesá (např. IQ a známky)
- při $r > 0$ s rostoucím x v průměru y roste (např. váha a výška)
- platí $-1 \leq r \leq 1$
- $|r| = 1$ jedině, když body $[x; y]$ leží na přímce
- vzájemné nezávislosti x, y odpovídají r blízká nule
- nemusí zachytit křivočarou (nelineární) závislost

charakteristiky polohy v geografii/demografii

- často známe jen průměry v dílčích souborech a četnosti: průměry se použijí jako x_j^*, četnosti standardně
- příklad: věk nových profesorů a docentů UK 2002:
  41 profesorů, průměrný věk 51,1 ($n_1 = 41,\ x_1^* = 51{,}1$)
  77 docentů, průměrný věk 47,8 ($n_2 = 77,\ x_2^* = 47{,}8$)
  celkový průměr (**vážený průměr**):

  [weighted.mean(c(51.1,47.8),c(41,77))]

$$\frac{41 \cdot 51{,}1 + 77 \cdot 47{,}8}{41 + 77} = 48{,}9$$

  nikoliv [mean(c(51.1,47.8))]

$$\frac{51{,}1 + 47{,}8}{2} = 49{,}4$$

charakteristiky polohy v geografii/demografii (2)

- **geografický střed**
  - bod
  - průsečík průměrné zeměpisné šířky a průměrné zeměpisné délky; průměry vážené velikostí sledovaného jevu
- **geografický medián** – obdoba mediánu,
  - čára, která rozděluje geografické objekty do dvou disjunktních skupin
  - hodnocená vlastnost určí váhy objektů
  - uspořádání hodnocení znaků dáno zvolenou geografickou vlastností (např. zeměpisnou délkou)

míry nerovnoměrnosti $G = \frac{\Delta}{2\bar{x}}$

- Giniho index charakterizuje nerovnoměrnost rozdělení bohatství (příjmů, . . .) jediným číslem
- průměrný rozdíl v bohatství vztažený k dvojnásobku průměru
- mají-li všichni stejně ($x_{(1)} = \ldots = x_{(n)} > 0$), je nutně $\Delta = 0$ a tedy $G = 0$
- má-li jeden všechno, ostatní nic ($0 = x_{(1)} = \ldots = x_{(n-1)} < x_{(n)} = a$), pak je

$$\bar{x} = \frac{a}{n} \qquad \Delta = \frac{2(n-1)a}{n^2}$$

$$G = \frac{2(n-1)a}{n^2} \cdot \frac{n}{2a} = \frac{n-1}{n}$$

- Lorenzova křivka je jemnějším nástrojem

příklad: tolary (rozdělení příjmů)

jaké procento nejchudších získá desetinu celkového bohatství?
četnosti (celkový měsíční příjem je 1687)

x_j	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_j	7	14	16	10	6	3	9	3	1	5	3

x_j	21	22	24	26	27	28	32	35	36	40	43	45	47
n_j	4	3	3	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1

sčítejme příjmy nejchudších, dokud nenasčítáme 10 % z 1687

$$(7 \cdot 10 + 8 \cdot 11)/1687 = 158/1687 = 0{,}0937 = 9{,}37\ \%$$
$$(7 \cdot 10 + 9 \cdot 11)/1687 = 169/1687 = 0{,}1002 = 10{,}02\ \%$$

u jaké části z 99 osob jsme sčítali příjmy?

$$(7 + 8)/99 = 15/99 = 0{,}152 = 15{,}2\ \%$$
$$(7 + 9)/99 = 16/99 = 0{,}162 = 16{,}2\ \%$$

příklad: tolary (rozdělení příjmů)

jaké procento nejchudších získá polovinu celkového bohatství?

četnosti (celkový měsíční příjem je 1687)

x_j	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_j	7	14	16	10	6	3	9	3	1	5	3

x_j	21	22	24	26	27	28	32	35	36	40	43	45	47
n_j	4	3	3	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1

sčítejme příjmy nejchudších, dokud nenasčítáme 10 % z 1687

$$(7 \cdot 10 + \ldots + 9 \cdot 16 + 17)/1687 = 836/1687 = 0{,}4956 = 49{,}56\ \%$$
$$(7 \cdot 10 + \ldots + 9 \cdot 16 + 2 \cdot 17)/1687 = 853/1687 = 0{,}5056 = 50{,}56\ \%$$

u jaké části z 99 osob jsme sčítali příjmy?

$$(7 + \ldots + 9 + 1)/99 = 66/99 = 0{,}6667 = 66{,}67\ \%$$
$$(7 + \ldots + 9 + 2)/99 = 67/99 = 0{,}6768 = 67{,}68\ \%$$

příklad: tolary (rozdělení příjmů)

jaké procento získají čtyři (tj. asi 4 %) nejbohatší resp. nejchudší?

četnosti (celkový měsíční příjem je 1687)

x_j	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_j	7	14	16	10	6	3	9	3	1	5	3

x_j	21	22	24	26	27	28	32	35	36	40	43	45	47
n_j	4	3	3	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1

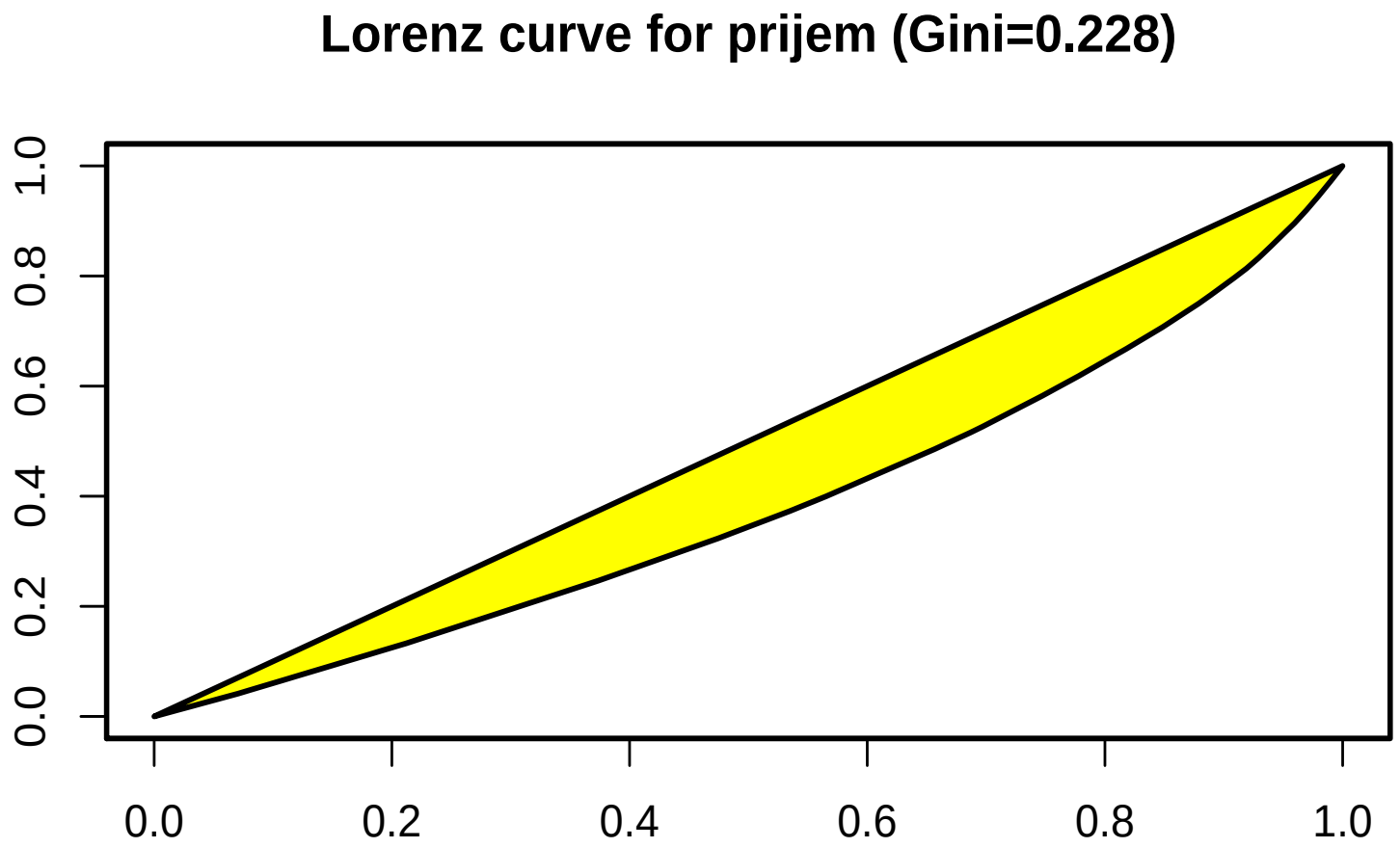
sečteme příjmy oněch čtyř nejbohatších

$$(47 + 45 + 43 + 40)/1687 = 175/1687 = 0{,}1037 = 10{,}37\ \%$$

čtyři nejbohatší tedy dostanou přes 10 % bohatství,

kdežto čtyři nejchudší dostanou

$$(4 \cdot 10)/1687 = 40/1687 = 0{,}0237 = 2{,}37\ \%$$


Lorenz curve for prijem (Gini=0.228)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Lorenzova křivka

- variační řada: $0 < x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ [sort(x)]
- kumulativní součty pro $j = 0, 1, \ldots, n$ [cumsum(sort(x))]

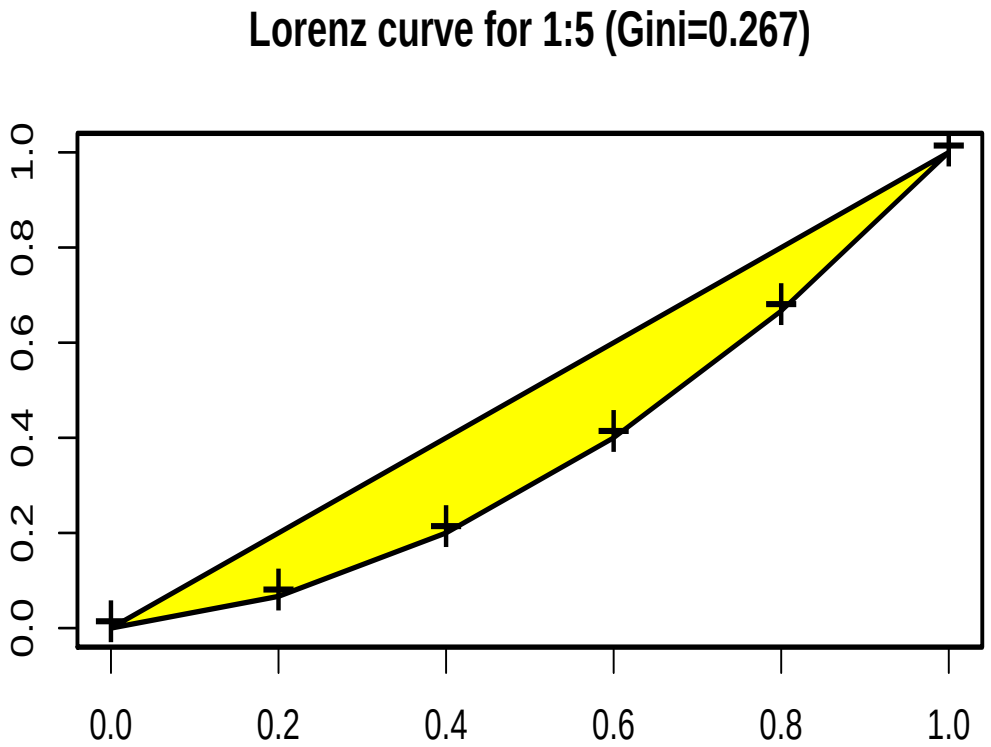
  $t_0 = 0 \qquad t_j = x_{(1)} + x_{(2)} + \ldots + x_{(j)} = \sum_{i=1}^{j} x_{(i)}$ kolik celkem j nejchudších

- úsečkami spojit body $[j/n; t_j/t_n], \quad 0 \leq j \leq n$
- zajímá nás plocha nad touto lomenou čarou a pod úhlopříčkou jednotkového čtverce
- plocha měří nerovnoměrnost rozdělení nějakého zdroje
- kdyby dostal každý stejně, bude velikost plochy nulová
- Giniho koeficient koncentrace je dvojnásobkem této plochy

příklad

$x_1, \ldots, x_5$: 1, 2, 3, 4, 5

$x_{(j)}$	t_j	t_j/t_n
1	1	0,067
2	3	0,200
3	6	0,400
4	10	0,667
5	15	1,000



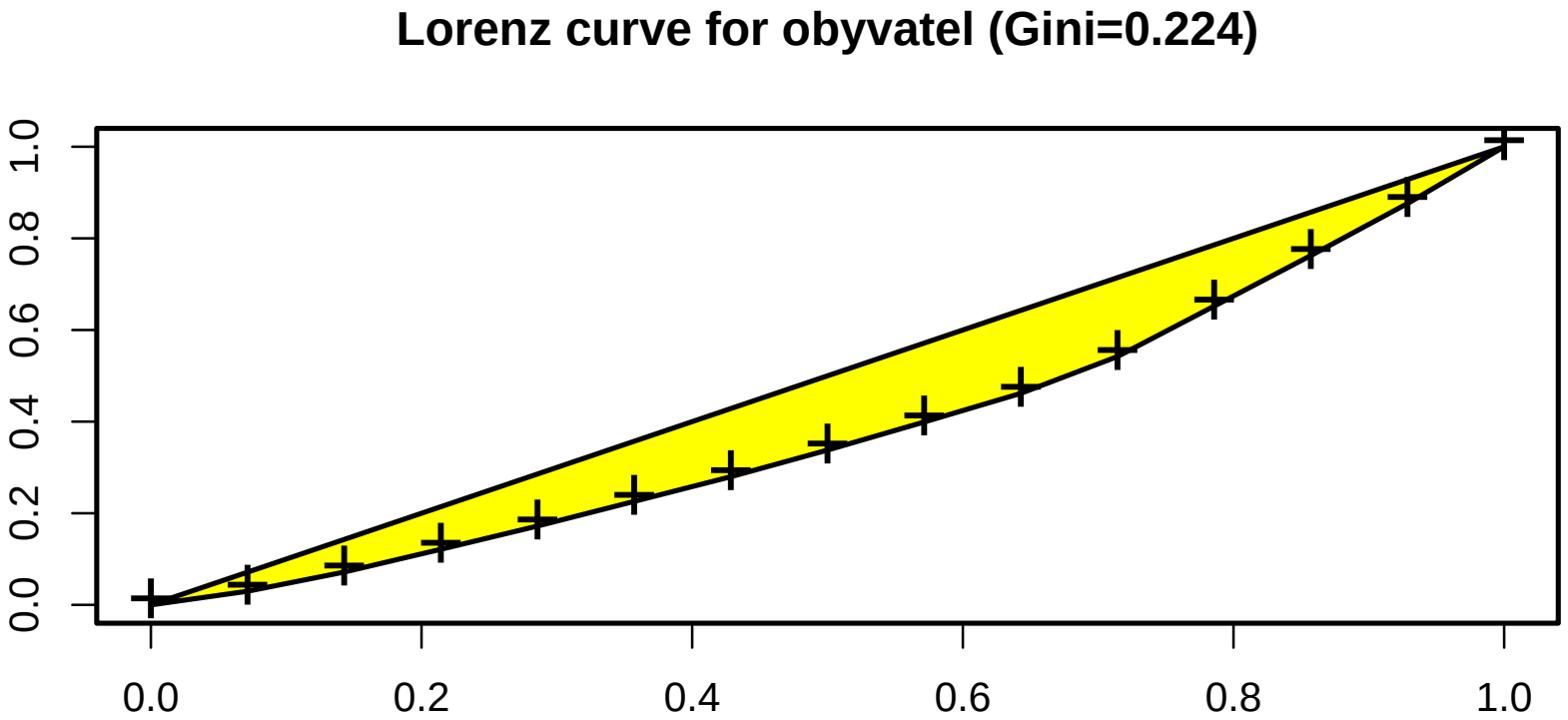
výpočet Giniho koeficientu ($n = 5$):

$$
\begin{aligned}
5^2 \cdot \Delta &= |1-1| + |1-2| + |1-3| + |1-4| + |1-5| \\
&\quad + |2-1| + |2-2| + |2-3| + |2-4| + |2-5| \\
&\quad + |3-1| + |3-2| + |3-3| + |3-4| + |3-5| \\
&\quad + |4-1| + |4-2| + |4-3| + |4-4| + |4-5| \\
&\quad + |5-1| + |5-2| + |5-3| + |5-4| + |5-5| \\
&= 10 + 7 + 6 + 7 + 10 \\
\Delta &= 40/25 = 1{,}6 \\
\bar{x} &= 3 \\
G &= \frac{1{,}6}{2 \cdot 3} = \frac{1{,}6}{6} = 0{,}267
\end{aligned}
$$

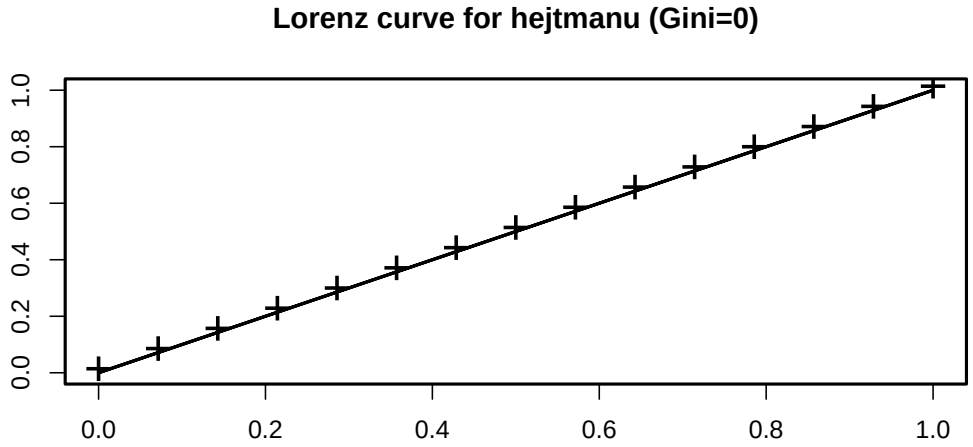
příklad: obyvatelé krajů (počet hejtmanů)

j	$x_{(j)}$	t_j	j/n	t_j/t_n	$x_{(j)}$	t_j	t_j/t_n
0	–	0	0,000	0,000	–	0	0,000
1	303761	303761	0,071	0,030	1	1	0,071
2	427418	731179	0,143	0,072	1	2	0,143
3	506849	1238028	0,214	0,121	1	3	0,214
4	517959	1755987	0,286	0,172	1	4	0,286
5	548698	2304685	0,357	0,226	1	5	0,357
6	549369	2854054	0,429	0,280	1	6	0,429
...	...	...	...	...	...	...	...
13	1158800	8936427	0,929	0,876	1	13	0,929
14	1264347	10200774	1,000	1,000	1	14	1,000

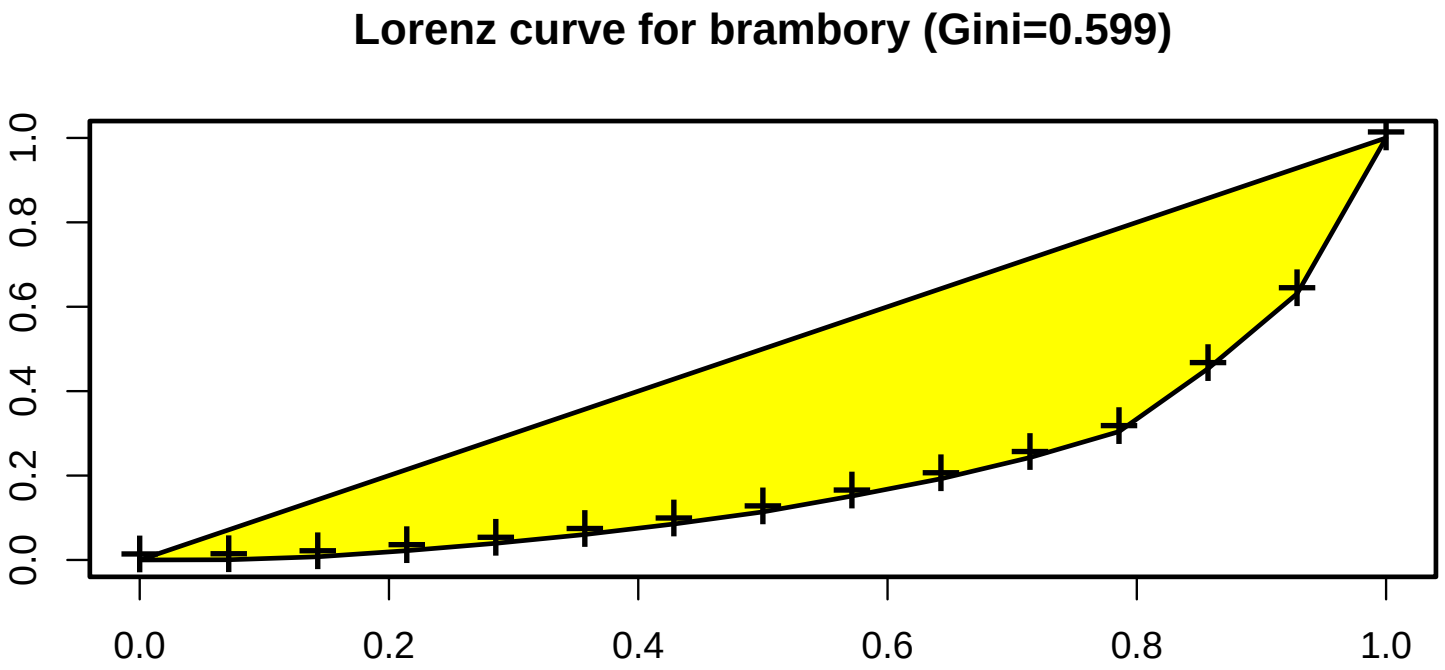
Lorenzova křivka (obyvatelé – kraje)



- v každém kraji je stejně hejtmanů, proto postupné součty rovnoměrně rostou, totéž platí pro t_j/n
- lomená čára Lorenzovy křivky přejde v úsečku a plocha zmizí
- průměrná diference je nulová (všechny rozdíly $|x_i - x_j|$ u počtu hejtmanů jsou nulové)



roční úroda brambor je mezi kraji rozdělena mnohem nerovnoměrněji:
např. 70 % brambor se pěstuje ve třech krajích (Vys, Stč, Jč)



případ s vahami

- někdy nutno přihlédnout k velikosti k jednotek, pak měříme nerovnoměrnost **hustoty** rozdělení zdroje (n_i – velikost jednotky, y_i – celková velikost produktu v jednotce, $x_i = y_i/n_i$ – hustota, $\bar{x}$ – vážený průměr hustot x_i s vahami n_i, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ součet četností)

$$\Delta = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} n_i n_j \left| x_i - x_j \right|$$

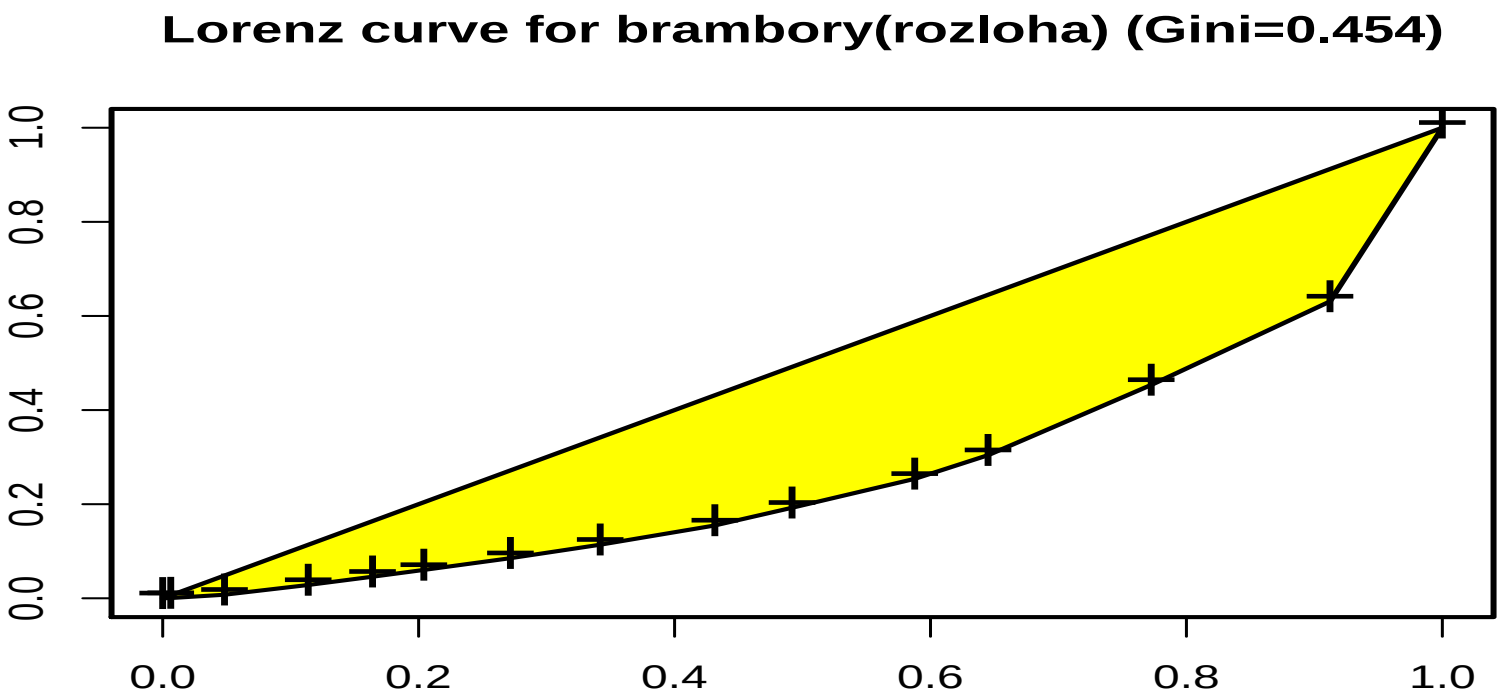
$$= \frac{1}{(\sum n_t)^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} n_i n_j \left| \frac{y_i}{n_i} - \frac{y_j}{n_j} \right|$$

$$G = \frac{\Delta}{2\bar{x}}$$

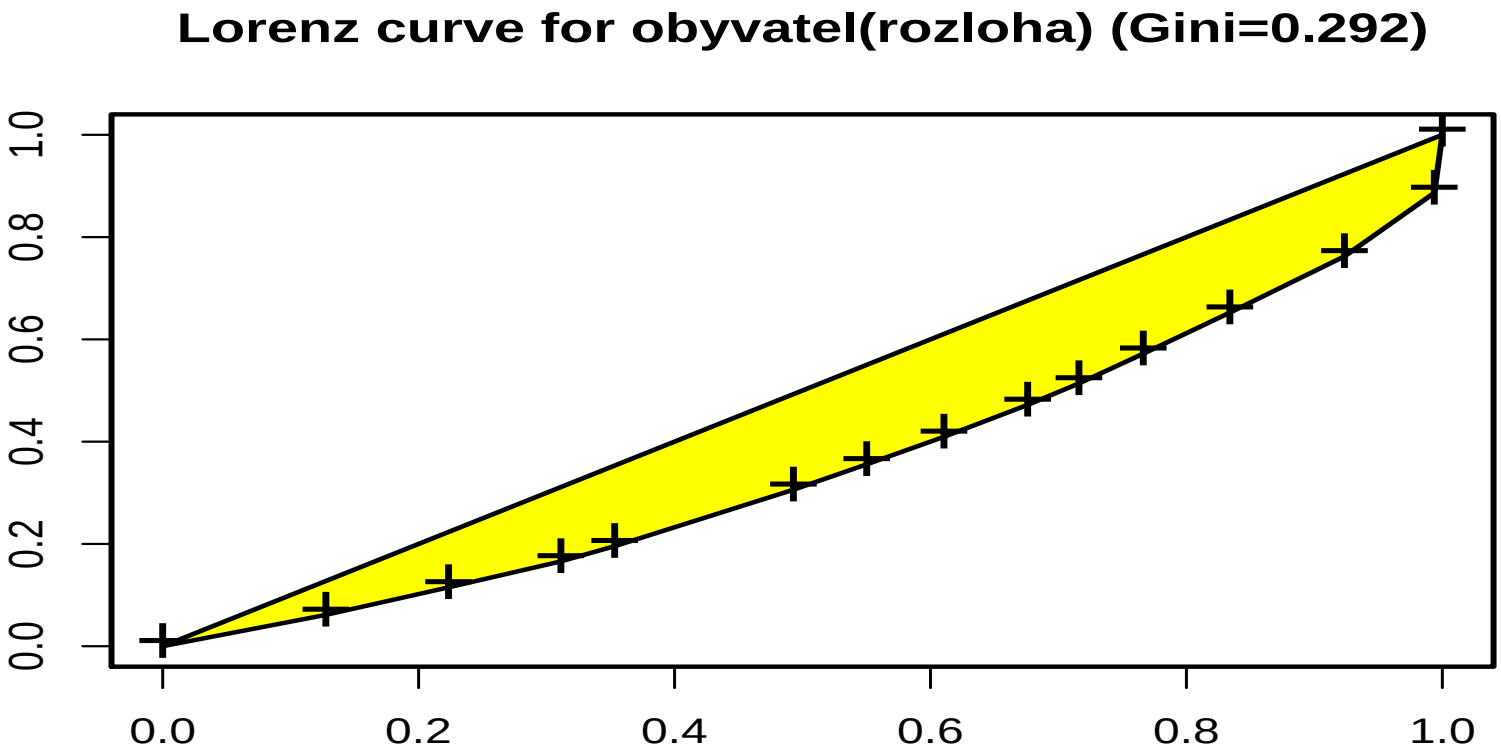
$\bar{x}$ je vážený průměr, $\bar{y}$ je (nevážený) průměr

$$\bar{x} = \frac{\sum_i n_i x_i}{\sum_i n_i} = \frac{\sum_i n_i (y_i/n_i)}{n} = \frac{\sum_i y_i}{n} = \bar{y}$$

roční úroda brambor s přihlédnutím k velikosti krajů



Lorenzova křivka (obyvatelé a rozloha krajů)



možné příští úlohy statistické indukce

- je pravděpodobnost šestky rovna 1/6?
  - teorie pravděpodobnosti odvodí teoretickou hodnotu
  - matematická statistika odhadne, prověří představu teorie
- je kostka symetrická, tj. mají všechny stěny kostky stejnou pravděpodobnost?
- kolik potřebujeme nezávislých hodů, abychom s požadovanou spolehlivostí poznali, že je kostka nesymetrická?
- liší se mezi sebou kostky A a B?
- vše založeno na modelu **populace – výběr** [population, sample]

populace a výběr

- model **populace – výběr** umožňuje zobecnění na celou populaci z hodnot zjištěných na vybraných statistických jednotkách (výběr)
- **populace (základní soubor)** – velký soubor, jehož je zpracovávaný soubor **(výběr)** reprezentativním vzorkem
- **reprezentativnost** – frekvence výskytu důležitých doprovodných znaků ve výběru odpovídá jejich frekvenci v populaci
- reprezentativnosti nejlépe dosáhneme tak, že použijeme **prostý náhodný výběr**, kdy každá n-tice prvků populace má stejnou šanci (pravděpodobnost) do výběru se dostat
- na základě výběru tvrdíme něco o populaci

parametry – odhady, statistiky

- podle toho, jakou roli hraje hodnocený soubor, rozlišujeme **charakteristiky**
  - **populační**: vztažené k populaci, mnohdy jen ideální, námi představované, jsou to **parametry** modelu
  - **výběrové**: vztažené k výběru z nějaké populace, takže jde o **odhady** odpovídajících populačních **parametrů**, jsou to **statistiky** spočítané z výběru
- příkladem dvojice odhad – parametr je dvojice relativní četnost – pravděpodobnost (např. 17/100 vers. 1/6)
- statistiky se používají při **statistické indukci** (statistickém rozhodování) [statistical inference (decisions)]

pravděpodobnost

- **pokus** – dobře definovaná situace (postup), která končí jedním z řady možných výsledků
- **náhodný pokus** – pokus, u něhož předem nevíme, který výsledek nastane (která strana kostky padne příště?); předpokládá se stabilita relativních četností možných výsledků
- **náhodný jev** – tvrzení o výsledku náhodného pokusu
- **pravděpodobnost** náhodného jevu A – číselné vyjádření očekávání, že výsledkem náhodného pokusu bude právě A
- při velkém počtu opakování pokusu se relativní četnost jevu blíží k pravděpodobnosti tohoto jevu

klasická pravděpodobnost

- **jistý jev** (nastává vždy) lze rozdělit na M *stejně pravděpodobných* neslučitelných (disjunktních) **elementárních jevů** (symetrie)
- každý jev lze složit z těchto **elementárních jevů**
- je celkem M_A **příznivých** jevu A (je z nich složen)
- **klasická definice pravděpodobnosti** (metoda výpočtu)

$$\mathsf{P}(A) = \frac{M_A}{M}$$

- **klasickou pst lze použít jen někdy!** (Sportka, Sazka)

příklad: hrací kostka

- idealizovaná homogenní symetrická kostka
- každá strana má stejnou pravděpodobnost
- A – padne šestka, B – padne sudé číslo
- $M = 6$
- $M_A = 1$, tedy $\mathrm{P}(A) = 1/6$
- $M_B = 3$, tedy $\mathrm{P}(B) = 3/6 = 1/2$

faktoriál

[factorial(n)]

- **faktoriál** $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \qquad 0! = 1$
- kolika způsoby lze uspořádat za sebou n rozlišitelných prvků
- příklady:
  - $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
  - $1! = 1$
- kolika způsoby lze uspořádat za sebou 14 krajů ČR:
  $14! = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdots 2 \cdot 1 =$ 87 178 291 200 $=$ 8,7$\cdot$ 10^{10}

počet kombinací [choose(n, k)]

- **kombinační číslo** $\binom{n}{k}$ (čti „n nad k“)
- počet k-prvkových podmnožin množiny o n prvcích nezávisle na jejich pořadí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}$$

- kolika způsoby si mohu z pěti knížek vybrat dvě na dovolenou:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

- kolika způsoby si z nich mohu vybrat tři knihy? (10)

příklad: losování otázek (1)

- student *neumí* 5 otázek, *umí* 10 otázek
- losuje se dvojice otázek z oněch 15 otázek
- pravděpodobnost $\mathsf{P}(A)$, že student nezná ani jednu z vylosovaných:
- elementární jevy: první losovaná otázka – 15 možností, druhá jen 14 možností, nezáleží na pořadí, tedy dělit 2 (počet kombinací)

$$M = \binom{5+10}{2} = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105$$

- příznivé elementární jevy: vylosuje obě z pěti, které neumí

$$M_A = \binom{5}{2}\binom{10}{0} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 1 = 10 \Rightarrow \mathsf{P}(A) = \frac{10}{105} = 9{,}5\ \%$$

příklad: losování otázek (2)

- pravděpodobnost $\mathsf{P}(B)$, že zná *právě* jednu otázku

$$M_B = \binom{5}{1} \cdot \binom{10}{1} = 5 \cdot 10 = 50 \Rightarrow \mathsf{P}(B) = \frac{50}{105} = 47{,}6\ \%$$

- pravděpodobnost $\mathsf{P}(C)$, že zná *obě* otázky (*právě dvě*)

$$M_C = \binom{5}{0} \cdot \binom{10}{2} = 1 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \Rightarrow \mathsf{P}(C) = \frac{45}{105} = 42{,}9\ \%$$

- pravděpodobnost $\mathsf{P}(D)$, že zná *aspoň jednu* otázku

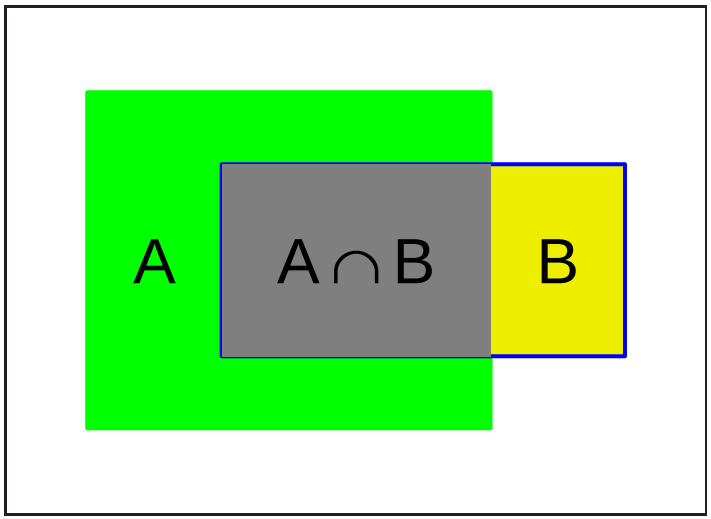
$$M_D = M_B + M_C = 50 + 45 = 95 \Rightarrow \mathsf{P}(D) = \frac{95}{105} = 90{,}5\ \%$$

- kontrola: $M_D + M_A = M$

pravidla pro pravděpodobnost (1)

- **sjednocení** jevů $A \cup B$: platí A **nebo** B (aspoň jeden z jevů A, B)
- **průnik** $A \cap B$: platí A a **současně** B (oba jevy A, B současně)

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$$



$\mathsf{P}(A \cup B)$ = celá vybarvená plocha
$\mathsf{P}(A) = 0{,}42$ = zelená + šedivá plocha
$\mathsf{P}(B) = 0{,}24$ = žlutá + šedivá plocha
$\mathsf{P}(A \cap B) = 0{,}16$ = šedivá plocha
$\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ = zelená + žlutá + 2 · šedivá plocha
$\mathsf{P}(A \cup B) = 0{,}42 + 0{,}24 - 0{,}16 = 0{,}50$

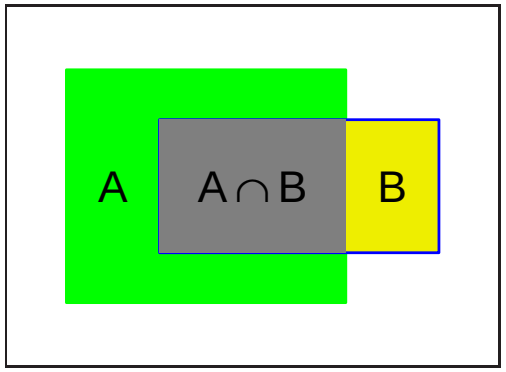
pravidla pro pravděpodobnost (2)

- **neslučitelné jevy**: nemohou nastat nikdy současně, navzájem se vylučují; pro neslučitelné jevy platí

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

- **podmíněná pravděpodobnost** pravděpodobnost jevu A, když už jev B nastal:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$



$\mathrm{P}(B) = 0{,}24$ = žlutá + šedivá plocha

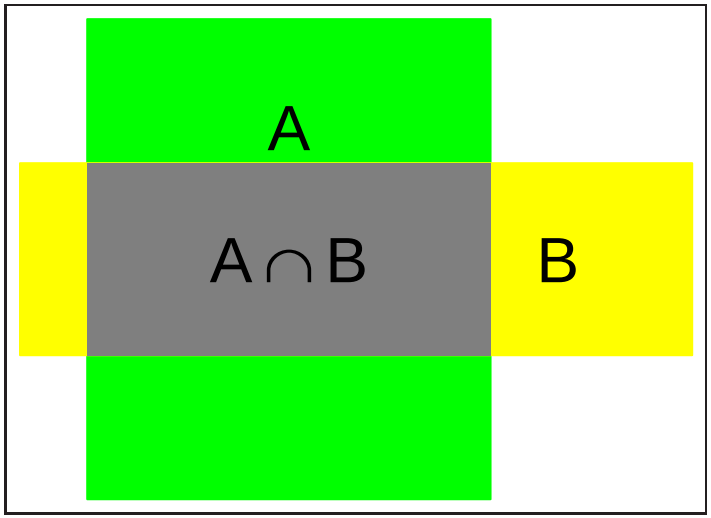
$\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}16$ = šedivá plocha

$\mathrm{P}(A|B)$ = šedivá vzhledem k (žlutá + šedivá)

$\mathrm{P}(A|B) = 0{,}16/0{,}24 = 0{,}67$, ale $\mathrm{P}(A) = 0{,}42$

- **nezávislé jevy**: výskyt jednoho jevu **neovlivní** pravděpodobnost výskytu druhého (definice **nezávislosti** náhodných jevů):

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$$



$\mathrm{P}(A) = 0{,}60$ = zelená + šedivá

$\mathrm{P}(B) = 0{,}40$ = žlutá + šedivá plocha

$\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}24$ = šedivá plocha

$\mathrm{P}(A|B)$ = šedivá vzhledem k (žlutá + šedivá)

$\mathrm{P}(A|B) = 0{,}24/0{,}40 = 0{,}60$

$\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B)$

$\Rightarrow A$ a B jsou nezávislé

idealizovaný příklad

- A – jednička ze statistiky, $\mathsf{P}(A) = 0{,}3$
- B – jednička z matematiky, $\mathsf{P}(B) = 0{,}2$
- $A \cap B$ – jednička z obou předmětů, $\mathsf{P}(A \cap B) = 0{,}1$
- jsou jevy A, B nezávislé? (jsou jedničky ze dvou předmětů nezávislé?) NE, protože $0{,}3 \cdot 0{,}2 \neq 0{,}1$
- jaká je pst jedničky ze statistiky, když už je z matematiky?

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5$$

- pravděpodobnost, že aspoň jedna jednička:

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}4$$

rozdělení náhodné veličiny

- **náhodná veličina** – číselně vyjádřený výsledek náhodného pokusu
- **diskrétní rozdělení** (pro četnosti) určeno seznamem možných hodnot a jejich pravděpodobnostmi:

$$x_1, x_2, \ldots$$
$$\mathsf{P}(X = x_1), \mathsf{P}(X = x_2), \ldots$$

- **spojité rozdělení** (pro spojité měřítko) určeno **distribuční funkcí**

$$F_X(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$$

nebo **hustotou**

$$f_X(x) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x} F_X(x), \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathsf{d}t$$

- velká populace, spojitá veličina – intervaly pro třídění mohou být krátké, obálce histogramu relativních četností odpovídá **hustota** $f_X(x)$ [density]

- podobně kumulativním relativním četnostem odpovídá **distribuční funkce** [distribution function]

- bezprostředním výběrovým protějškem distribuční funkce je **empirická distribuční funkce**

$$F_n(x) = \frac{\#(x_i \leq x)}{n}$$

- $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_m^*$ existující různé hodnoty
  $n_1, n_2, \ldots, x_m$ jejich četnosti ($n = \sum_j n_j$)
  $F_n(x)$ je schodovitá funkce, v bodě x_j^* má skok n_j/n

příklad diskrétního rozdělení: známka u zkoušky

známka k	1	2	3	4
P$(X = k)$	0,3	0,4	0,2	0,1
P$(Y = k)$	0,3	0,3	0,2	0,2

(Z této tabulky *nic* nepoznáme o případné závislosti!)
Jak jedním číslem charakterizovat úroveň známek?
Obyčejný průměr by X, Y nerozlišil $\Rightarrow$ **vážený průměr**
vahami známek budou jejich pravděpodobnosti
dostaneme tak **střední hodnoty** X a Y (**populační průměry**)

$$\mu_X = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 2{,}1$$
$$\mu_Y = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}2 = 2{,}3$$

charakteristiky rozdělení náhodné veličiny (1)

- **střední hodnota** náhodné veličiny X (populační průměr)
  - **vážený průměr možných hodnot**
  - vahami jsou pravděpodobnosti hodnot

$$\mu_X = \mathsf{E}\, X = x_1 \cdot \mathsf{P}(X = x_1) + x_2 \cdot \mathsf{P}(X = x_2) + \ldots = \sum_k x_k \cdot \mathsf{P}(X = x_k)$$

- když se použije operátor E (expectation) na náhodnou veličinu X, spočítá vážený průměr jejích hodnot, vahami jsou u diskrétního rozdělení pravděpodobnosti těchto hodnot

- pro spojité rozdělení

$$\mu_X = \mathsf{E}\, X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x$$

- **střední hodnota funkce** $Y = g(X)$ náhodné veličiny X

$$\mathsf{E}\, Y = \mathsf{E}\, g(X) = \sum_k g(x_k)\mathsf{P}(X = x_k)$$

resp. pro spojité rozdělení

$$\mathsf{E}\, Y = \mathsf{E}\, g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$$

- **populační medián** $\tilde{\mu}$ spojitého rozdělení

$$F_X(\tilde{\mu}) = \mathsf{P}(X \leq \tilde{\mu}) = 0{,}5$$

populační medián je číslo, které dělí možné hodnoty náhodné veličiny na dva stejně pravděpodobné intervaly

příklad diskrétního rozdělení: známka u zkoušky

známka k	1	2	3	4	μ	σ^2	σ
P$(X = k)$	0,3	0,4	0,2	0,1	2,1	0,89	0,943
P$(Y = k)$	0,3	0,3	0,2	0,2	2,3	1,21	1,100

Jak jedním číslem charakterizovat kolísání známek (jejich **variabilitu**)?
(populační) rozptyl = vážený průměr čtverců vzdáleností od střední hodnoty, vahami jsou pravděpodobnosti

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= (1-2{,}1)^2 \cdot 0{,}3 + (2-2{,}1)^2 \cdot 0{,}4 \\ &\quad + (3-2{,}1)^2 \cdot 0{,}2 + (4-2{,}1)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}89 = 0{,}943^2 \\ \sigma_Y^2 &= (1-2{,}3)^2 \cdot 0{,}3 + (2-2{,}3)^2 \cdot 0{,}3 \\ &\quad + (3-2{,}3)^2 \cdot 0{,}2 + (4-2{,}3)^2 \cdot 0{,}2 = 1{,}21 = 1{,}1^2\end{aligned}$$

charakteristiky rozdělení náhodné veličiny (2)

- **(populační) rozptyl** náhodné veličiny X – vážený průměr čtverců vzdáleností možných hodnot od střední hodnoty

$$\sigma_X^2 = \mathsf{E}\,(X-\mu_X)^2 = (x_1-\mu_X)^2\mathsf{P}(X=x_1) + (x_2-\mu_X)^2\mathsf{P}(X=x_2) + \dots$$
$$= \sum_k (x_k-\mu_X)^2\mathsf{P}(X=k)$$

$$\sigma_X^2 = \mathsf{E}\,(X-\mu_X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2 f_X(x)\mathrm{d}x$$

- **(populační) směrodatná odchylka** odmocnina z (populačního) rozptylu

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

vlastnosti střední hodnoty a rozptylu

X, Y – náhodné veličiny, a, b konstanty, $b > 0$

$$\mu_{a+X} = \mathsf{E}\,(a + X) = a + \mathsf{E}\,X = a + \mu_X$$
$$\mu_{b\cdot X} = \mathsf{E}\,(b \cdot X) = b \cdot \mathsf{E}\,X = b \cdot \mu_X$$
$$\mu_{X+Y} = \mathsf{E}\,(X + Y) = \mathsf{E}\,X + \mathsf{E}\,Y = \mu_X + \mu_Y$$
$$\sigma^2_{a+X} = \sigma^2_X, \qquad \sigma_{a+X} = \sigma_X$$
$$\sigma^2_{bX} = b^2\sigma^2_X, \qquad \sigma_{bX} = |b|\sigma_X$$
$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2\sigma_{X,Y}$$
$$\sigma_{X,Y} = \mathsf{E}\,(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) \text{ **kovariance** } X, Y$$
$$= (x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y)\mathsf{P}(X = x_1, Y = y_1)$$
$$+ (x_1 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y)\mathsf{P}(X = x_1, Y = y_2) + \ldots$$

(sčítá se přes všechny možné dvojice)

nezávislé náhodné veličiny

připomeňme: náh. jevy A, B jsou nezávislé, když

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$$

náhodné veličiny X, Y jsou **nezávislé**, když pro **všechny dvojice** možných hodnot (x_i, y_j) platí

$$\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathsf{P}(X = x_i) \cdot \mathsf{P}(Y = y_j)$$

jsou-li X, Y **nezávislé**, pak $\sigma_{X,Y} = 0$, tedy $\quad \sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$

rozptyl součtu **nezávislých** náhodných veličin = součet rozptylů

(populační) korelační koeficient

Pearsonův korelační koeficient:

$$r_{x,y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

kde výběrová kovariance je dána vztahem (str. 59)

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

jeho **populační protějšek**

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

ρ_{XY} má stejné vlastnosti jako r_{xy}, zejména platí $|\rho_{XY}| \leq 1$
pro **nezávislé** náhodné veličiny X, Y je vždy $\rho_{XY} = 0$

idealizovaný příklad: známky u zkoušky

	Y				
X	1	2	3	4	$\mathsf{P}(X = k)$
1	0,15	0,10	0,05	0,00	0,3
2	0,10	0,15	0,10	0,05	0,4
3	0,05	0,05	0,05	0,05	0,2
4	0,00	0,00	0,00	0,10	0,1
	0,3	0,3	0,2	0,2	1,0

$$\sigma_{X,Y} = (1-2{,}1)(1-2{,}3)\cdot 0{,}15 + (1-2{,}1)(2-2{,}3)\cdot 0{,}10 + \ldots$$
$$+ (4-2{,}1)(3-2{,}3)\cdot 0{,}00 + (4-2{,}1)(4-2{,}3)\cdot 0{,}10 = 0{,}57$$
$$\rho_{X,Y} = \frac{0{,}57}{0{,}943 \cdot 1{,}1} = 0{,}55$$

alternativní rozdělení

- diskrétní, s jediným parametrem π (nikoliv Ludolfovo číslo)
- $\mathsf{P}(X = 1) = \pi, \qquad \mathsf{P}(X = 0) = 1 - \pi \qquad (0 < \pi < 1)$
- X – kolikrát v jednom pokusu došlo k události, která má pravděpodobnost π (jen dvě možné hodnoty: 0 nebo 1)
- **střední hodnota** (populační průměr)

$$\mu_X = 1 \cdot \mathsf{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathsf{P}(X = 0) = \pi$$

- (populační) **rozptyl**

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= (1 - \mu_X)^2 \mathsf{P}(X = 1) + (0 - \mu_X)^2 \mathsf{P}(X = 0) \\ &= (1 - \pi)^2 \cdot \pi + (0 - \pi)^2 \cdot (1 - \pi) = \pi(1 - \pi)\end{aligned}$$

binomické rozdělení bi(n, π) (1)

- diskrétní rozdělení s parametry $n, \pi \qquad (0 < \pi < 1)$
- n **nezávislých** pokusů
- v každém zdar s pravděpodobností π, nezdar s pstí $1 - \pi$
- **celk. počet zdarů** X má binomické rozdělení s parametry n, π
- X je součet n nezávislých náhodných veličin X_i (=počet zdarů v i-tém pokusu), každá má alternativní rozdělení s parametrem π
- z vlastnosti střední hodnoty součtu náh. veličin: $\boxed{\mu_X = n\pi}$
- z vlastnosti rozptylu součtu nezávislých náhodných veličin

$$\boxed{\sigma_X^2 = n\pi(1 - \pi)}$$

binomické rozdělení bi(n, π) (2)

- pravděpodobnosti možných hodnot

$$\mathsf{P}(X = k) = \binom{n}{k}\pi^k(1-\pi)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, , \ldots, n$$

- pst, že v **daných** k pokusech zdar Z, v ostatních nezdar N

$$\underbrace{ZZ\ldots Z}_{k}\underbrace{NN\cdots N}_{n-k} \text{ s pstí } \underbrace{\pi\pi\cdots\pi}_{k}\underbrace{(1-\pi)(1-\pi)\cdots(1-\pi)}_{n-k} = \pi^k(1-\pi)^{n-k}$$

- zvolíme k míst pro zdar Z, na ostatních místech nezdar N, počet možností:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}$$

příklad: zkoušky

- C – zdar = udělat zkoušku, $\mathsf{P}(C) = 0{,}8$
- zkoušku dělá $n = 10$ studentů stejně připravených (u všech stejná pravděpodobnost π), studenti neopisují (nezávislost)
- pravděpodobnost, že zkoušku udělá nějakých 9 studentů

$$\mathsf{P}(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2^1 = 10 \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2^1 = 0{,}268$$

- pravděpodobnost, že právě jeden student (nějaký) zkoušku neudělá

$$\mathsf{P}(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^9 = 10 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^9 = 0{,}268$$

- pravděpodobnost, že zkoušku udělá **daných** 9 studentů: 0,0268

příklad: kouření

- víme, že mezi dvacetiletými muži je (řekněme) 35 % kuřáků (např. je-li 70 tisíc dvacetiletých, pak je mezi nimi asi 24 500 kuřáků, ale nevíme, kteří to jsou)
- vybereme náhodně 60 dvacetiletých mužů, X – počet kuřáků mezi nimi, tedy $X \sim \mathrm{bi}(60, 0{,}35)$
- $$\mu_X = 60 \cdot 0{,}35 = 21 \qquad \sigma_X^2 = 60 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 13{,}65 = (3{,}7)^2$$
- ukázky pravděpodobností možných hodnot [dbinom(15,60,0.35)]

k	15	17	19	21	23	25
$\mathrm{P}(X = k)$	0,029	0,062	0,095	0,107	0,091	0,059

Poissonovo rozdělení Po(λ) (1)

- diskrétní rozdělení (zákon vzácných jevů)
- Y – počet výskytů jevu ve zvolené časové (prostorové, plošné . . .) jednotce
- $\lambda > 0$ – jediný parametr, intenzita výskytu jevu (jak často se v průměru vyskytuje ve zvolené jednotce)

$$\mathsf{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$\mu_Y = \lambda, \qquad \sigma_Y^2 = \lambda$$

Poissonovo rozdělení Po(λ) (2)

- je-li λ parametr (populační průměr počtu případů na jednotku), pak při počítání pravděpodobností toho, kolikrát najdeme případ na trojnásobku jednotky (trojnásobné ploše, ve trojnásobném čase . . .), bude parametrem 3λ
- analogicky pro jiné kladné násobky
- $X \sim$ bi(n, π), n velké, π malé, pak pravděpodobnosti hodnot X lze aproximovat (přibližně vyjádřit) pomocí pravděpodobností hodnot $Y \sim$ Po$(n\pi)$ (Poissonovo rozdělení s $\lambda = n\pi$)

příklady Poissonova rozdělení

- do pasti padá za noc v průměru 8 brouků ($\lambda = 8$)
- s jakou pravděpodobností jich tam ráno najdeme 10?

[dpois(10,8)]

$$\mathsf{P}(Y = 10) = \frac{8^{10}}{10!}\mathrm{e}^{-8} = 0{,}099$$

- vezmeme-li past s poloviční obvodem, očekáváme poloviční průměr za noc ($\lambda = 4$)

$$\mathsf{P}(Y = 10) = \frac{4^{10}}{10!}\mathrm{e}^{-4} = 0{,}005$$

$$\mathsf{P}(Y = 5) = \frac{4^{5}}{5!}\mathrm{e}^{-4} = 0{,}156$$

příklady

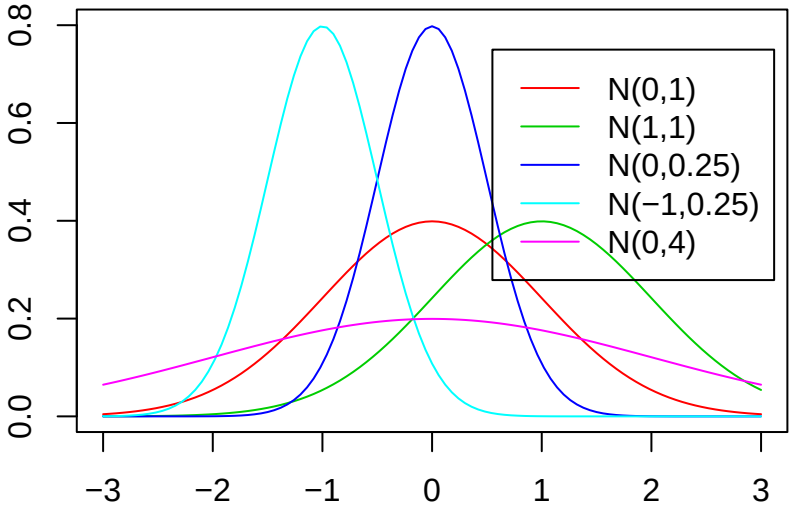
- s jakou pravděpodobností **neudělá** 12 z 50 stejně připravených studentů zkoušku? (pst neúspěchu = 0,2)
- binomické rozdělení bi$(50, 0{,}2)$ [dbinom(12,50,0.2)]

$$\mathsf{P}(X = 12) = \binom{50}{12} \cdot 0{,}2^{12} \cdot 0{,}8^{38} = 0{,}103$$

- Poissonovo rozdělení Po$(50 \cdot 0{,}2)$=Po(10) [dpois(12,10)]

$$\mathsf{P}(Y = 12) = \frac{10^{12}}{12!}\mathrm{e}^{-10} = 0{,}095$$

normální (Gaussovo) rozdělení $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$



- spojité rozdělení, symetrické okolo střední hodnoty μ
- maximální hodnota hustoty je úměrná $1/\sigma$ ($\doteq 0{,}4 \cdot (1/\sigma)$)
- model vzniku: součet velkého počtu nepatrných příspěvků

- pro $X \sim \mathsf{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ platí

$$\mu_X = \mathsf{E}\, X = \mu \qquad \sigma_X^2 = \mathsf{E}\,(X - \mu_X)^2 = \sigma^2$$

$$\mathsf{P}(|X - \mu| < 1{,}00\,\sigma) = 0{,}68, \text{ tj. } 68\ \%$$

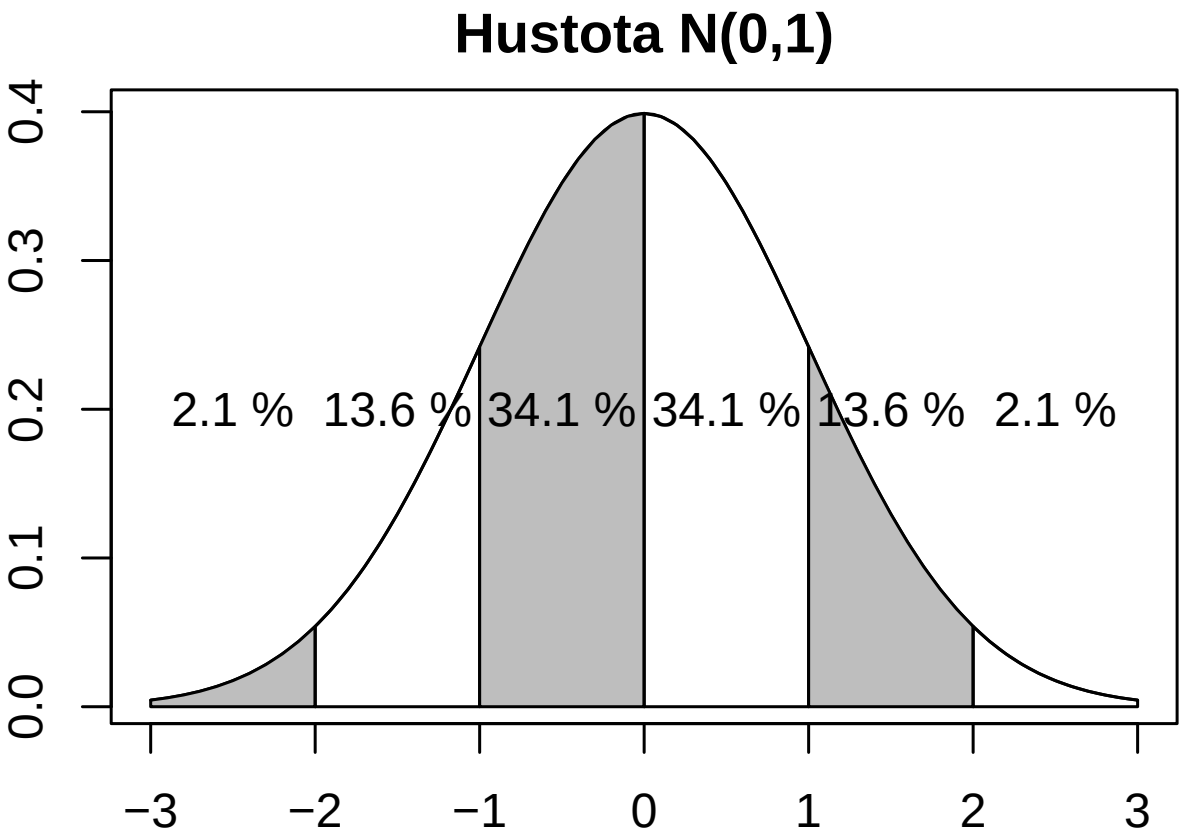
$$\mathsf{P}(|X - \mu| < 1{,}96\,\sigma) = 0{,}95, \text{ tj. } 95\ \%$$

$$\mathsf{P}(|X - \mu| < 2{,}00\,\sigma) = 0{,}9545, \text{ tj. } 95{,}45\ \%$$

$$\mathsf{P}(|X - \mu| < 3{,}00\,\sigma) = 0{,}9973, \text{ tj. } 99{,}73\ \%$$

$$\boxed{X \sim \mathsf{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathsf{N}(0, 1)}$$

normované normální rozdělení $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$



normované normální rozdělení $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$

- tabelováno
  - hustota $\varphi(z)$ [dnorm(z)]
  - distribuční funkce $\Phi(z) = \mathsf{P}(Z \leq z)$
    [v Excelu normsdist(z)] [pnorm(z)]
  - **kritické hodnoty** $z(\alpha)$: $\mathsf{P}(Z \leq z(\alpha)) = \Phi(z(\alpha)) = 1 - \alpha$

$$z(0{,}025) = 1{,}96 \text{ tj. } \mathsf{P}(|Z| > 1{,}96) = 5\ \%$$
$$z(0{,}025) = 1{,}96 \text{ tj. } \mathsf{P}(Z > 1{,}96) = 2{,}5\ \%$$
$$z(0{,}025) = 1{,}96 \text{ tj. } \mathsf{P}(Z < -1{,}96) = 2{,}5\ \%$$
$$z(0{,}005) = 2{,}58 \text{ tj. } \mathsf{P}(|Z| > 2{,}58) = 1\ \%$$
$$z(0{,}005) = 2{,}58 \text{ tj. } \mathsf{P}(Z > 2{,}58) = 0{,}5\ \%$$
$$z(0{,}050) = 1{,}64 \text{ tj. } \mathsf{P}(|Z| > 1{,}64) = 10\ \%$$

výpočet pravděpodobností pro $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$

- u každého spojitého rozdělení je $\mathsf{P}(X < x) = \mathsf{P}(X \leq x)$, tedy i u Z
- $Z \sim \mathsf{N}(0,1), a < b$, pak

$$\mathsf{P}(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

- odvození: jevy $(Z \leq a)$ a $(a < Z \leq b)$ jsou neslučitelné (tvrzení nemohou platit současně), jejich sjednocením je jev $(Z \leq b)$, proto

$$\mathsf{P}(Z \leq b) = \mathsf{P}(Z \leq a) + \mathsf{P}(a < Z \leq b)$$
$$\Phi(b) = \Phi(a) + \mathsf{P}(a < Z \leq b)$$

- příklad: $\mathsf{P}(1 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) =$ 0,977 − 0,841 = 0,136, jak bylo na obrázku [pnorm(2)–pnorm(1)]

výpočet pro $X \sim \mathsf{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ [normdist(x; μ; σ; 1)]

$$X \sim \mathsf{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathsf{N}(0,1)$$

$$\mathsf{P}(X \leq x) = \mathsf{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \mathsf{P}\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{\mathsf{P}(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$$

příklad: $X \sim \mathsf{N}\left(136{,}1, 6{,}4^2\right)$ (výšky 10letých hochů v roce 1951)

$$\mathsf{P}(134{,}5 < X < 140{,}5) = \Phi\left(\frac{140{,}5-136{,}1}{6{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{134{,}5-136{,}1}{6{,}4}\right) = 0{,}754 - 0{,}401 = 0{,}353$$

tedy v rozmezí 135 cm až 140 cm bylo asi 35,3 % hochů

v R je výpočet snazší, protože máme k diposici distribuční funkci se zvolenou střední hodnotou μ a zvolenou směrodatnou odchylkou σ

[pnorm(140.5,mean=136.1,sd=6.4)]

příklad: $X \sim \mathrm{N}\left(136{,}1, 6{,}4^2\right)$ (výšky 10letých hochů v roce 1951)

[pnorm(140.5,136.1,6.4)-pnorm(134.5,136.1,6.4)]

[pnorm((140.5-136.1)/6.4)-pnorm((134.5-136.1)/6.4)]

[NORMDIST(140,5;136,1;6,4;1)-NORMDIST(134,5;136,1;6,4;1)]

v **Excelu** funkce NORMDIST má parametry x, μ, σ, L, kde pro $L = 0$ dostaneme hustotu a pro $L = 1$ dostaneme distribuční funkci

chování výběrového průměru

- nechť $X_1, X_2, \ldots X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s **libovolným rozdělením** se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, tj. náhodný výběr z onoho rozdělení
- pro průměr z těchto veličin platí (víme, že $\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$, $\mathsf{E}\, bX = b\mathsf{E}\, X$, $\sigma^2_{bX} = b^2\sigma^2_X$, pro nezávislé X, Y také $\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$)

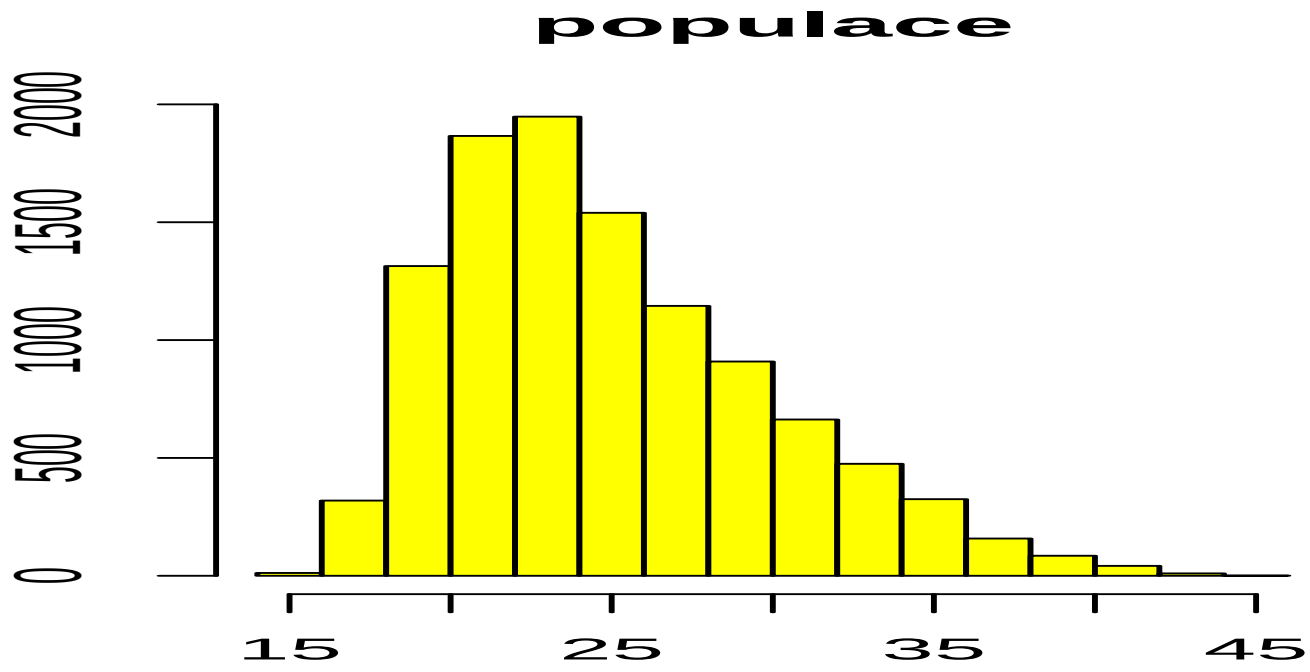
$$\mu_{\bar{X}} = \mu_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{n} n\mu = \mu \qquad \sigma^2_{\bar{X}} = \sigma^2_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

- průměr $\bar{X}$ má tedy rozptyl n-krát menší, než jednotlivá pozorování
- **střední chyba** průměru = směrodatná odchylka průměru

$$\boxed{\mathsf{S.E.}(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

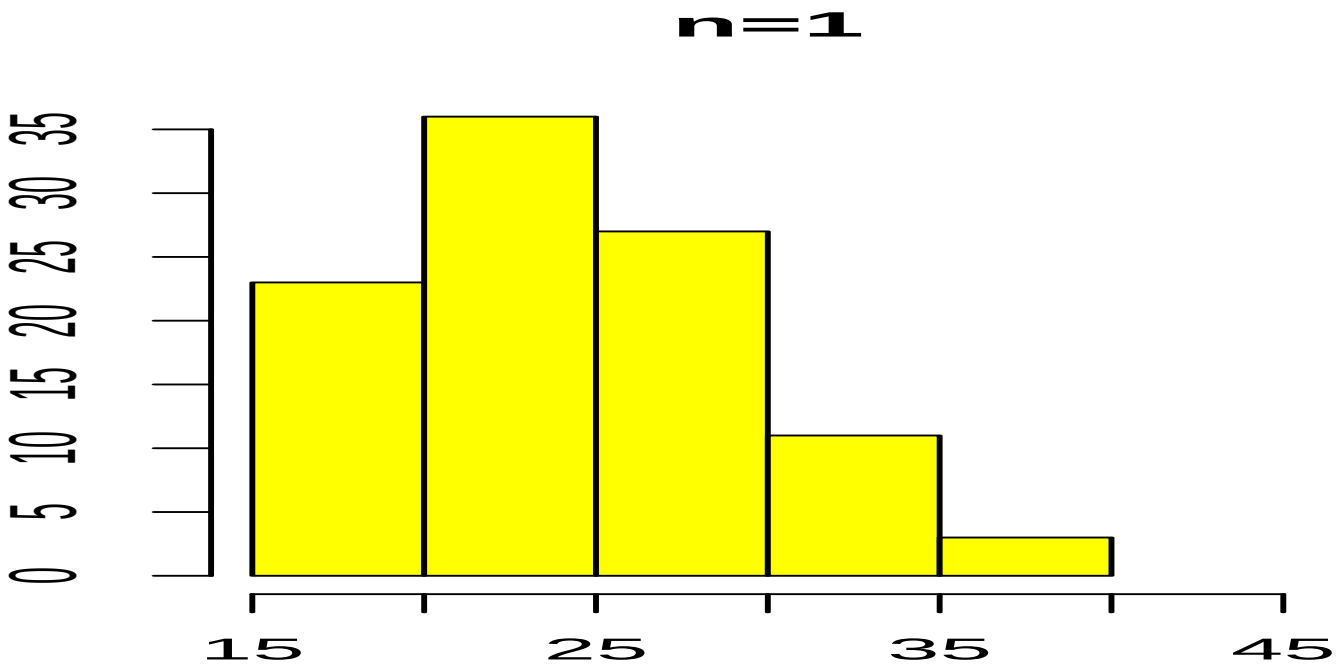
příklad: věk matek

- velká populace rodičů (11 tisíc), zřejmá je nesymetrie rozdělení



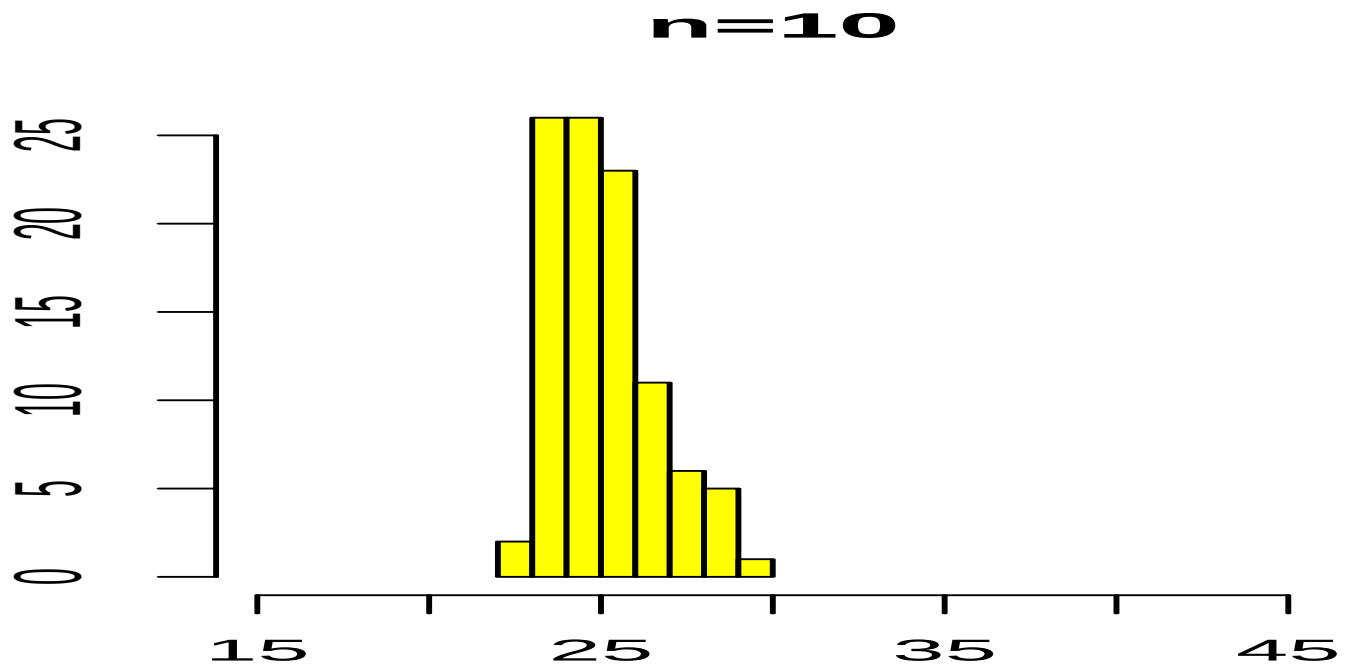
příklad: věk matek

- náhodně vybráno 100 matek (průměry rozsahu $n = 1$)



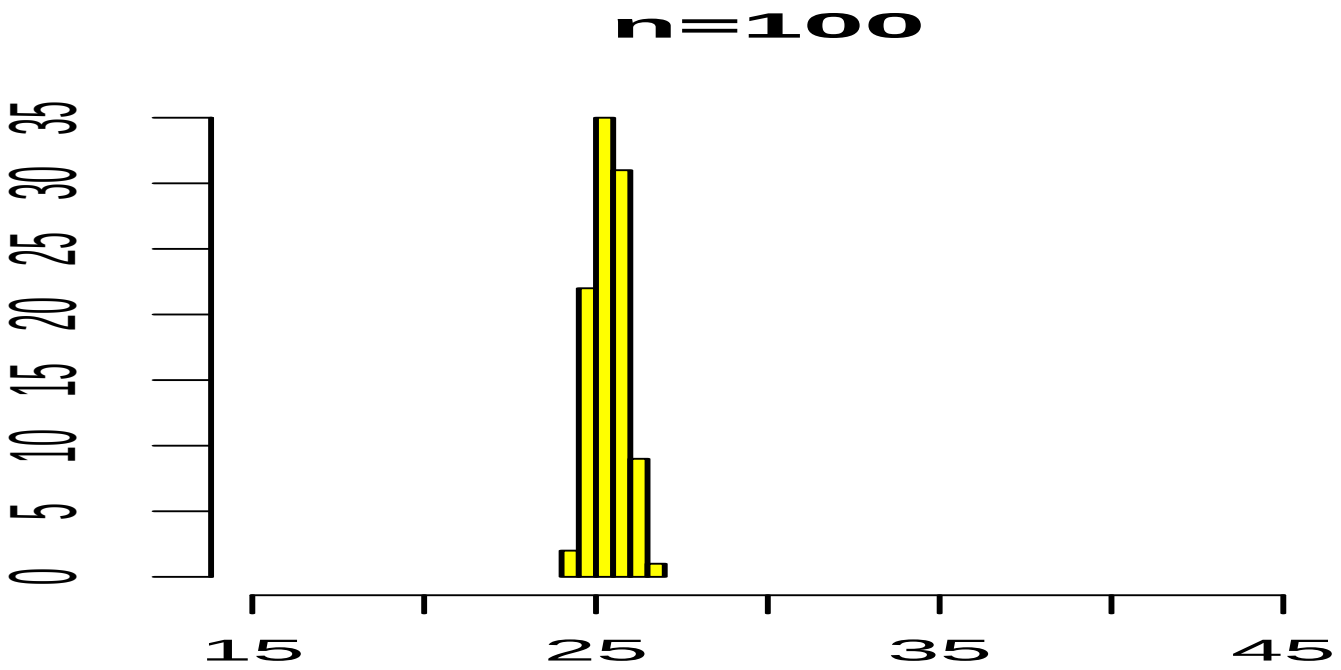
příklad: věk matek

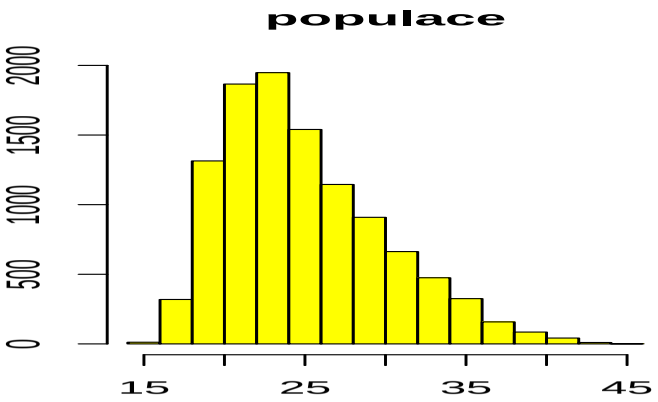
- náhodně vybráno 100 krát po $n = 10$ matkách, průměry:

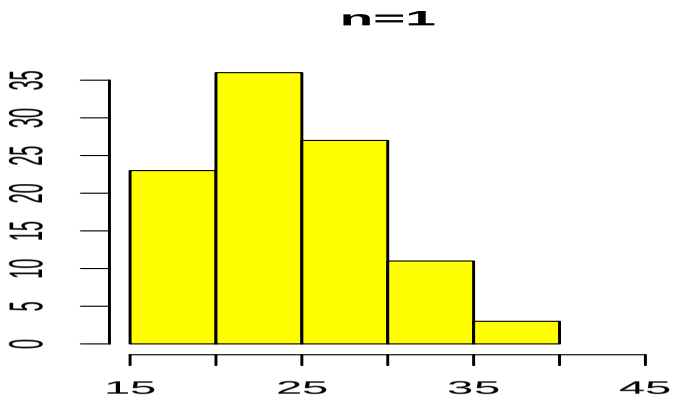


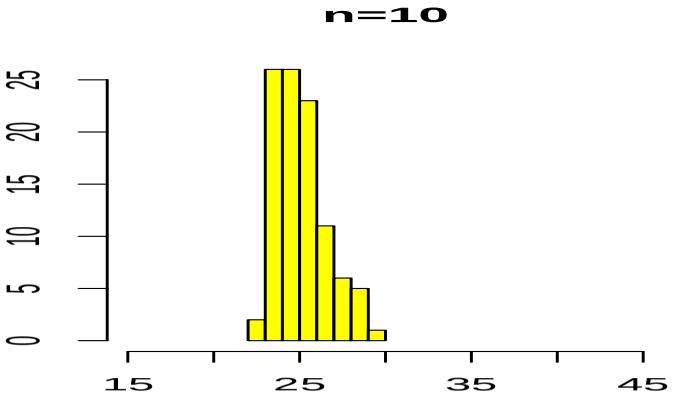
příklad: věk matek

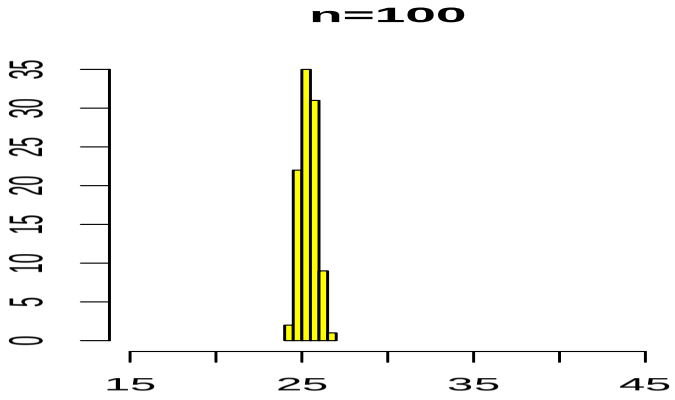
- náhodně vybráno 100 krát po $n = 100$ matkách, průměry:




populace
0
500
1000
1500
2000
15
25
35
45


n=1
0
5
10
15
20
25
30
35
15
25
35
45


n=10
0
5
10
15
20
25
15
25
35
45


n=100
0
5
10
15
20
25
30
35
15
25
35
45

shrnutí

- velká populace rodičů (11 tisíc), nakreslen histogram
- náhodně vybráno 100 matek (vlastně průměry výběrů rozsahu $n = 1$), nakreslen histogram
- 100 krát náhodně vybráno vždy $n = 10$ matek, spočítán průměr, nakreslen histogram průměrů
- 100 krát náhodně vybráno vždy $n = 100$ matek, spočítán průměr, nakreslen histogram průměrů
- podle teorie by každý další rozptyl ze 100 průměrů měl být 10 krát menší
- skutečnost: 23,5; 2,20; 0,21

výběrový průměr z normálního rozdělení

- nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $\mathsf{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ – **náhodný výběr** z $\mathsf{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$
- pro průměr z nich platí

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathsf{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- střední chyba je $\bar{X}$ rovna $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- proto je

$$Z = \frac{\bar{X} - \mathsf{E}\,\bar{X}}{\mathsf{S.E.}(\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathsf{N}(0, 1)$$

- chování Z lze tedy popsat pomocí distribuční funkce $\Phi(z)$

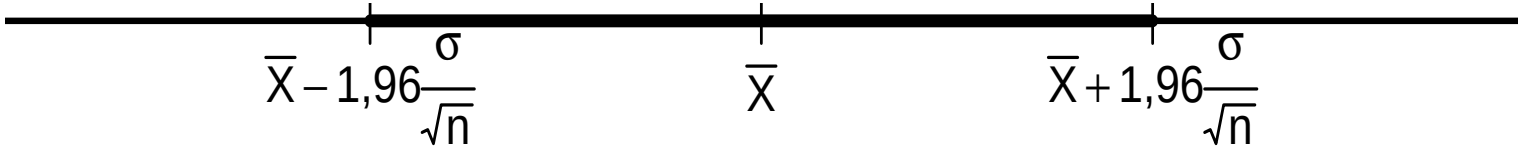
interval spolehlivosti pro normální rozdělení (1)

- protože je $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, platí $\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right)$ a tedy

$$\mathrm{P}\left(\frac{|\bar{X} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} < 1{,}96\right) = \mathrm{P}\left(|\bar{X} - \mu|) < 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

  tedy $\mathrm{P}\left(\bar{X} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$

- dostali jsme **95% interval spolehlivosti** pro μ



interval spolehlivosti pro normální rozdělení (2)

- 95% interval spolehlivosti překryje s pravděpodobností 95 % neznámé μ (odhadovaný parametr)
- kdybychom postup prováděli opakovaně, pak asi v 95 % případů interval překryje skutečnou hodnotu μ, ve zbylých asi 5 % zůstane skutečné μ mimo interval spolehlivosti
- pro velké n lze neznámé σ nahradit odhadem s_x
- pro obecné α (spolehlivost $1-\alpha$):

$$\mathsf{P}\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(\alpha/2) < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(\alpha/2)\right) = 1 - \alpha$$

interval spolehlivosti pro normální rozdělení (3)

- pro malé n (asi do 50) a pro X_i s normálním rozdělením a neznámým σ je lépe použít kritické hodnoty Studentova t-rozdělení (pozor na jinak značené kritické hodnoty Studentova t-rozdělení)

$$\mathrm{P}\left(\bar{X} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha) < \mu < \bar{X} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)\right) = 1 - \alpha$$

- interval spolehlivosti lze počítat i pro jiné parametry
- obecně je to interval, který s požadovanou pravděpodobností překryje odhadovaný parametr – **intervalový odhad**

příklad výška postavy

- studenti odhadovali výšku přednášejícího; předpokládejme, že nestranně a nezávisle na sobě
- $n = 22, \qquad \bar{x} = 170{,}4, \qquad s_x = 4{,}032$
- $t_{21}(0{,}05) = 2{,}080$ z tabulek

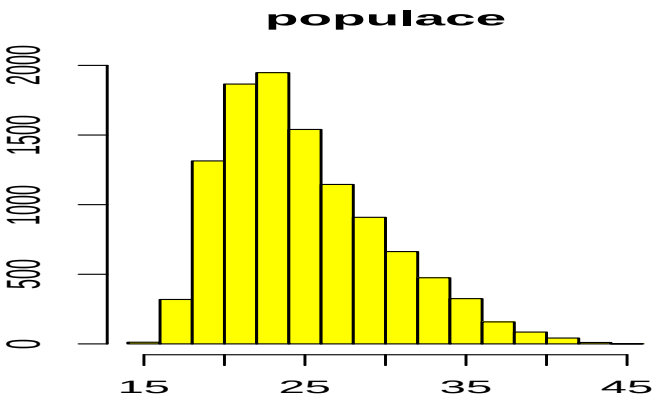
$$(170{,}4 - \frac{4{,}032}{\sqrt{22}} \cdot 2{,}080; 170{,}4 + \frac{4{,}032}{\sqrt{22}} \cdot 2{,}080)$$

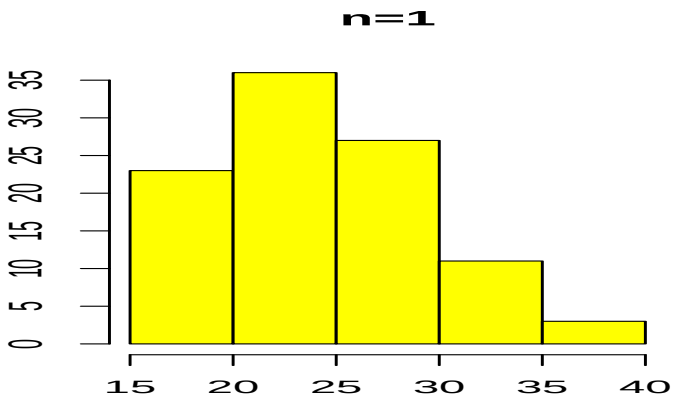
$$(170{,}7; 174{,}2)$$

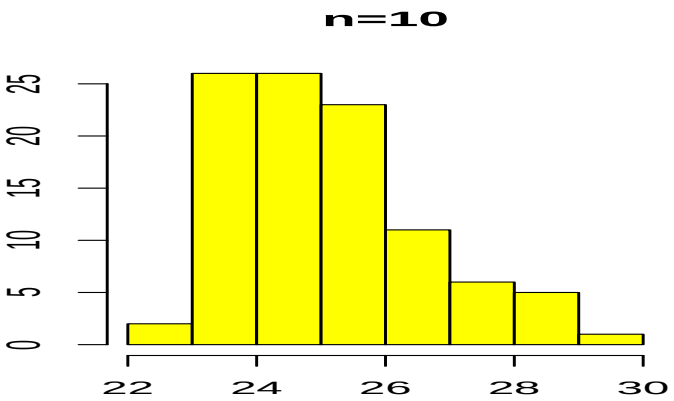
- skutečná výška je s pravděpodobností 95 % někde mezi 170,7 cm a 174,2 cm

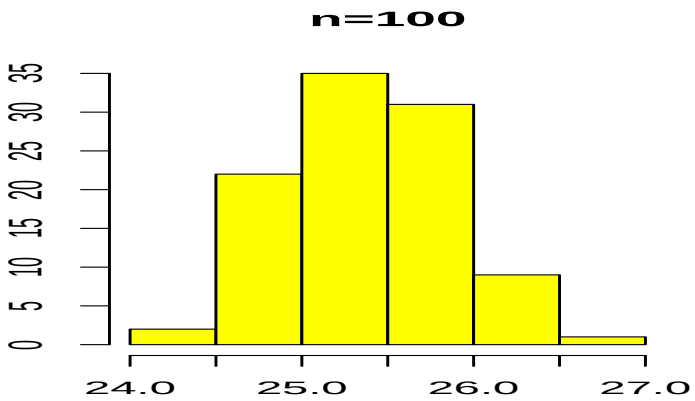
centrální limitní věta (CLV)

- Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením (**nemusí** mít normální rozdělení!), se střední hodnotou μ a rozptylem $\sigma^2 > 0$. Potom pro velké n má průměr z nich rozdělení $\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, jejich součet rozdělení $\mathrm{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$
- prakticky: pro dost velká n má průměr normální rozdělení bez ohledu na výchozí rozdělení
- příklad: průměrný věk matek z velkých výběrů má už (téměř) normální rozdělení (na následujících histogramech nejsou stejná měřítka!)
- následují stejné histogramy, ale s **nestejným měřítkem**, zajímá nás **tvar** rozdělení


populace
0
500
1000
1500
2000
15
25
35
45


n=1
0
5
10
15
20
25
30
35
15
20
25
30
35
40


n=10
0
5
10
15
20
25
22
24
26
28
30


n=100
0
5
10
15
20
25
30
35
24.0
25.0
26.0
27.0

příklad: věk matek

- 95% interval spolehlivosti pro populační průměr věku *všech* matek na základě výběru 99 matek

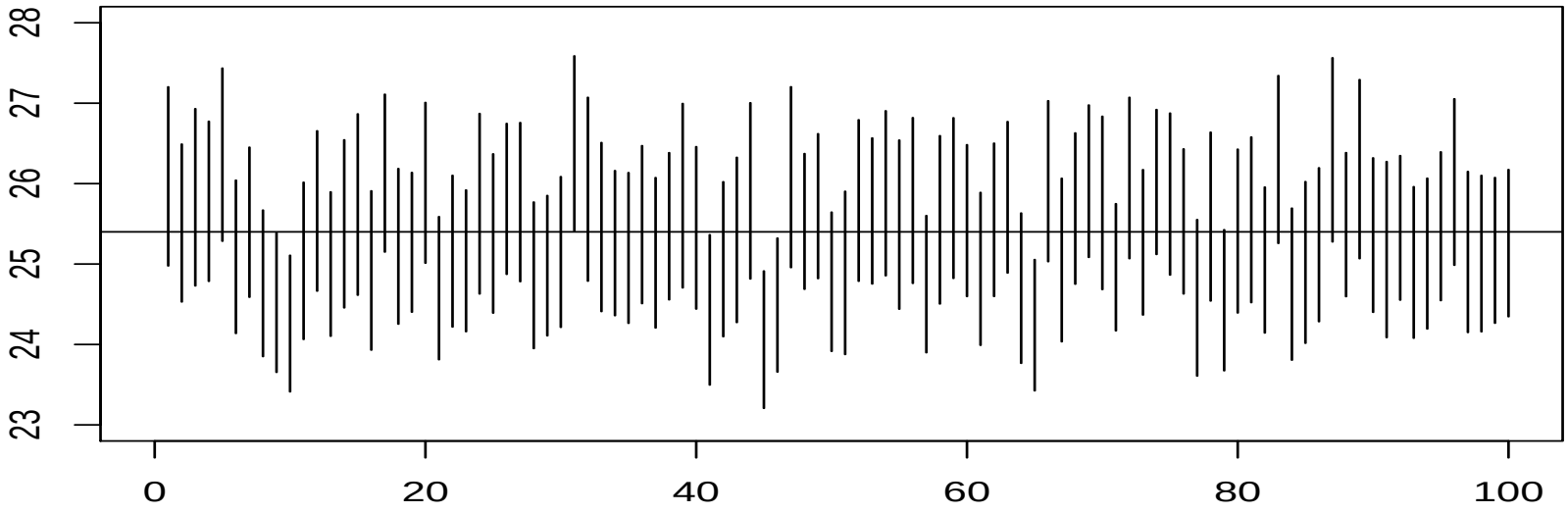
$$\left(25{,}7 - 1{,}98 \cdot \frac{4{,}1}{\sqrt{99}}; 25{,}7 + 1{,}98 \cdot \frac{4{,}1}{\sqrt{99}}\right) = (24{,}9; 26{,}5)$$

- 99% interval spolehlivosti pro populační průměr věku *všech* matek na základě výběru 99 matek (bude užší nebo širší?)

$$\left(25{,}7 - 2{,}63 \cdot \frac{4{,}1}{\sqrt{99}}; 25{,}7 + 2{,}63 \cdot \frac{4{,}1}{\sqrt{99}}\right) = (24{,}6; 26{,}8)$$

- větší jistota $\Leftrightarrow$ větší šířka

příklad: simulované výběry pro $n = 100$



celkem 100 95% intervalů spolehlivosti pro μ (ve skutečnosti mimořádně víme, že $\mu = 25{,}4$), v 7 případech μ nepřekryto

centrální limitní věta pro četnosti

- (CLT obecně – připomenutí) Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, se střední hodnotou μ a rozptylem $\sigma^2 > 0$. Potom pro velké n má průměr z nich rozdělení $\mathsf{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, jejich součet rozdělení $\mathsf{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.

- absolutní četnost Y
  - Y – součet nezávislých veličin s alternativním rozdělením
  - $Y \sim \mathsf{bi}(n, \pi)$, proto přibližně $Y \sim \mathsf{N}(n\pi, n\pi(1-\pi))$

- relativní četnost $f = Y/n$
  - f – průměr nezávislých veličin s alternativním rozdělením
  - $f \sim \mathsf{N}(\pi, \pi(1-\pi)/n)$

relativní četnost ve výběru

- π je **podíl** prvků s danou vlastností v populaci (např. $\pi = 45$ %)
- π – **pravděpodobnost**, že vlastnost má náhodně vybraný prvek
- Y – **četnost** prvků s vlastností ve výběru rozsahu n, $Y \sim \mathrm{bi}(n, \pi)$
- $f = \frac{Y}{n}$ **relativní četnost** prvků s danou vlastností ve výběru
- relativní četnost je průměr nula-jedničkové veličiny – pro velké n má přibližně normální rozdělení
- nula-jedničková veličina má rozptyl $\pi(1-\pi)$, tedy relativní četnost (je to průměr) má rozptyl $\frac{\pi(1-\pi)}{n}$
- CLV $\Rightarrow$ $\boxed{f \dot{\sim} \mathrm{N}(\pi, \pi(1-\pi)/n)}$, $\boxed{Y \dot{\sim} \mathrm{N}(n\pi, n\pi(1-\pi))}$

příklad na aproximaci binomického rozdělení normálním

- za zkušenosti je známo, že mezi uchazeči o studium matematiky na MFF bývá 45 % dívek
- s jakou pravděpodobností bude při 500 přihláškách počet dívek mezi 200 a 220 (včetně)?
- $X \sim \mathrm{bi}(500, 0{,}45)$ má $\mu_X = 500 \cdot 0{,}45 = 225$, $\sigma_X^2 = 500 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 123{,}75$, tedy $\sigma_X = 11{,}1$

  $$\mathrm{P}(200 \leq X \leq 220) = \Phi\left(\frac{220{,}5 - 225}{11{,}1}\right) - \Phi\left(\frac{199{,}5 - 225}{11{,}1}\right) = 0{,}343 - 0{,}011 = 0{,}332$$

- hledaná pravděpodobnost je přibližně 33,2 % (přesně 33,3 %)

interval spolehlivosti pro podíl π

- střední chyba relativní četnosti = směrodatná odchylka relativní četnosti = odmocnina z rozptylu je tedy $\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$
- pravděpodobnost π neznáme, odhadneme ji pomocí relativní četnosti f
- odtud je 95% interval spolehlivosti pro π

$$\left(f - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}; f + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right)$$

- existuje přesnější (pracnější) postup

příklad: hody s hrací kostkou

- odhadujeme pravděpodobnost šestky
- kostka A: $n = 100, n_A = 17, f_A = 0{,}17$

$$\left(0{,}17 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{100}}; 0{,}17 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{100}}\right) = (0{,}10; 0{,}24)$$

- kostka B: $n = 100, n_B = 41, f_B = 0{,}41$

$$\left(0{,}41 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}41 \cdot 0{,}59}{100}}; 0{,}41 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}41 \cdot 0{,}59}{100}}\right) = (0{,}31; 0{,}51)$$

- důležitý rozdíl: u kostky A patří $1/6 = 0{,}167$ do intervalu spolehlivosti; u kostky B nikoliv; může to něco znamenat?

proč **testování hypotéz**

- nelze bezpečně poznat, že kostka B je falešná nebo že kostka A není falešná
- intervaly spolehlivosti určily rozmezí, kde by skutečná pravděpodobnost šestky měla být, jejich spolehlivost je velká, ale omezená
- znamená něco, když $1/6$ neleží v 95% intervalu spolehlivosti?
- musíme připustit, že jsme mohli mít smůlu, že se v našich pokusech náhodou realizovaly málo pravděpodobné možnosti, přestože k takové smůle dochází jen zřídka

testování hypotéz (1)

- **(nulová) hypotéza** H_0: – zjednodušuje situaci, zpravidla se jí snažíme vyvrátit, abychom věcně něco prokázali
- **alternativa** H_1: **(alternativní hypotéza)** – opak nulové hypotézy, zpravidla to, co chceme věcně dokázat
- možná rozhodnutí
  - **zamítnout** H_0 pokud naše data svědčí proti H_0
  - **nezamítnout** H_0 (přijmout H_0) pokud *není dost důvodů* H_0 zamítnout
- nelze zaručit bezchybnost rozhodnutí

testování hypotéz (2)

- protože nelze zaručit bezchybnost rozhodnutí, mohou nastat chyby:
  - **chyba 1. druhu**, když zamítneme platnou hypotézu
  - **chyba 2. druhu**, když nepoznáme, že hypotéza neplatí a nezamítneme ji (přijmeme)
- nechceme často *chybně* zamítat H_0 (tedy falešně něco věcně prokazovat), proto se budeme snažit chybě 1. druhu pokud možno vyvarovat
- **hladina testu** α = maximální přípustná pravděpodobnost chyby 1. druhu (nejčastěji $\alpha = 0{,}05$, tj. $\alpha = 5$ %)
- **síla testu** = pravděpodobnost správného zamítnutí neplatné hypotézy

schéma testování hypotéz

rozhodnutí	H_0 platí	H_0 neplatí
H_0 zamítnout	chyba 1. druhu (pst $\leq \alpha$) hladina testu	správné rozhodnutí (pst $1-\beta$) síla testu
H_0 nezamítnout (přijmout)	správné rozhodnutí (pst $\geq 1-\alpha$)	chyba 2. druhu (pst β)

postup při rozhodování (klasický)

- zvolit hypotézu H_0, alternativu H_1
- zvolit hladinu testu α
- zvolit metodu rozhodování (který test použít)
- z dat spočítat testovou statistiku T a porovnat ji s tabelovanou kritickou hodnotou
- když padne statistika T do **kritického oboru**, pak H_0 zamítnout (zpravidla, když $T \geq t_0$, t_0 – kritická hodnota)
- **kritický obor** – množina těch výsledků pokusu (např. hodnot T), kdy budeme hypotézu zamítat

příklad: padá na kostce šestka příliš často?

- chceme na 5% hladině prokázat, že pravděpodobnost šestky na dané kostce je větší, než by měla být (tj. větší než 1/6)
- $\mathrm{H}_0 : \mathrm{P}(\text{padne šestka}) = 1/6 \qquad (\pi = \pi_0)$
- $\mathrm{H}_1 : \mathrm{P}(\text{padne šestka}) > 1/6 \qquad (\pi > \pi_0)$
- provedeme $n = 100$ pokusů, Y počet šestek
- co svědčí pro neplatnost hypotézy? Je to situace, kdy „šestka padá mnohem častěji, než by měla padat za H_0“
- hypotézu budeme zamítat, když $Y \geq y_0$ (tvar krit. oboru)
- za platnosti H_0 má počet šestek Y rozdělení $\mathrm{bi}(n, 1/6)$
- y_0 zvolíme tak, aby za hypotézy bylo $\mathrm{P}(Y \geq y_0) \leq \alpha$

příklad přesné volby kritického oboru

y_0	20	21	22	23	24	25
$\mathsf{P}(Y \geq y_0)$	$0{,}220$	$0{,}152$	$0{,}100$	$0{,}063$	$0{,}038$	$0{,}022$

- podmínku $\mathsf{P}(Y \geq y_0) \leq 0{,}05$ splňuje $y_0 = 24$
- padne-li ve 100 nezávislých hodech kostkou aspoň 24 šestek, budeme na **5% hladině zamítat hypotézu**, že pst šestky je 1/6 **ve prospěch alternativy**, že pst šestky je větší než 1/6 (dáno zvolenou alternativou)
- na kostce A nám padlo 17 šestek, hypotézu **nezamítáme**, což ale neznamená, že bychom hypotézu prokázali
- na kostce B nám padlo 41 šestek, hypotézu **zamítáme**
- pro $\alpha = 10$ % bychom zvolili $y_0 = 22$

- **síla testu** = pst, že H_0 zamítneme, když ona neplatí
- při 100 hodech hypotézu zamítáme, je-li $Y \geq 24$
- nechť je ve skutečnosti $\pi = 1/4$, pak hypotézu zamítneme s pstí

$$\mathsf{P}(Y \geq 24) = \sum_{k=24}^{100} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{100-k} = 0{,}629$$

- pro $\pi = 0{,}25$ je tedy síla testu 62,9 %
- pro $\pi = 0{,}3$ je podobně síla testu rovna 92,4 %
- pro $\pi = 0{,}2$ je podobně síla testu rovna 18,9 %

příklad: volba kritického oboru (přibližně)

- použijme přibližné tvrzení: za H_0 $Y \sim \mathsf{N}(n\pi_0, n\pi_0(1-\pi_0))$, potom

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y \geq y_0) &= 1 - \mathsf{P}(Y < y_0) = 1 - \mathsf{P}(Y \leq y_0 - 0{,}5) \\
&= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{Y - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}} < \frac{y_0 - 0{,}5 - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}}\right) \\
&\doteq 1 - \Phi\left(\frac{y_0 - 0{,}5 - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}}\right) = \alpha
\end{aligned}$$

- tabulka kritických hodnot dá $z(\alpha)$, musí platit $z(\alpha) = \frac{y_0 - 0{,}5 - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}}$ tedy
  $y_0 = n\pi_0 + 0{,}5 + z(\alpha)\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}$, v našem příkladu (pro $\alpha = 0{,}05$)
  $y_0 = 100/6 + 1/2 + 1{,}645 \cdot \sqrt{500/36} = 23{,}3 \doteq 23$

p-hodnota

- p-**hodnota** p je nejmenší α, při kterém H_0 z daných dat ještě zamítáme
- p-hodnota p je za platnosti H_0 spočítaná *pravděpodobnost* výsledků stejně nebo *méně příznivých* pro H_0
- H_0 zamítáme, když je $p \leq \alpha$
- p-hodnotu počítají moderní počítačové programy
- existují úlohy, kdy se rozhoduje pouze podle p-hodnoty (např. Fisherův exaktní test ve čtyřpolní tabulce)
- statistické rozhodování: spočítat k T odpovídající p-hodnotu a porovnat ji s α

příklad rozhodování pomocí p-hodnoty

- snažíme se prokázat, že šestka padá příliš často
- padlo nám $Y = 17$, proto (vzorec pro psti binomického rozdělení)

$$p = \mathsf{P}\left(Y \geq 17\right) = \sum_{k=17}^{100} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{100-k} = 0{,}506$$

- protože 50,6 % $>$ 5 %, hypotézu nemůžeme na 5% hladině zamítnout, nemůžeme tvrdit, že pst šestky je větší než 1/6
- neprokázali jsme však, že by hypotéza platila
- na kostce B: $p = \mathsf{P}(Y \geq 41) = 7{,}4 \cdot 10^{-9}$ [1-pbinom(40,100,1/6)]

příklad: kostka a oboustranná alternativa

- chceme ověřit, zda je kostka v pořádku
- pokusíme se prokázat, že šestka padla příliš často nebo příliš zřídka
- $\mathsf{H}_0 : \mathsf{P}(\text{padne šestka}) = 1/6 \qquad (\pi = \pi_0)$
- $\mathsf{H}_1 : \mathsf{P}(\text{padne šestka}) \neq 1/6 \qquad (\pi \neq \pi_0)$
- je to **oboustranná alternativa** (na rozdíl od jednostranné)
- *proti* hypotéze svědčí malé *nebo* velké hodnoty Y
- pst chyby 1. druhu α rozdělíme na dvě poloviny: pro příliš malé a příliš velké Y

příklad: kostka, oboustranná alternativa

y_0	8	9	10	...	24	25	26
$\mathsf{P}(Y \leq y_0)$	0,010	0,021	0,043	...	0,978	0,988	0,994
$\mathsf{P}(Y \geq y_0)$	0,996	0,990	0,979	...	0,038	0,022	0,012
$\mathsf{P}(Y = y_0)$	0,006	0,012	0,021	...	0,016	0,010	0,006

- H_0 zamítneme, když bude $Y \leq 9$ *nebo* když bude $Y \geq 25$
- skutečná pst chyby 1. druhu bude 0,021 + 0,022 = 0,043
- [pbinom(9,100,1/6)+(1-pbinom(24,100,1/6))]
  (nezapomeňte, že hodnota distribuční funkce je $\mathsf{P}(X \leq x)$)
- hodnoty v rozmezí 10 až 24 (včetně obou mezí) nesvědčí proti H_0

oboustranná alternativa přibližně

- $\mathsf{H}_0 : \mathsf{P}(\text{padne šestka}) = 1/6 \qquad (\pi = \pi_0)$
  $\mathsf{H}_1 : \mathsf{P}(\text{padne šestka}) \neq 1/6 \qquad (\pi \neq \pi_0)$
- proti alternativě svědčí Y hodně daleko od $\mu_Y = n\pi_0$ (počítáme za platnosti hypotézy), tj. rel. četnost $f = Y/n$ daleko od π_0:

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{Y - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}}\right| \geq z(\alpha/2)\right) = \alpha$$

- zamítáme tedy, je-li [prop.test(9,100,1/6)]

$$Y \leq n\pi_0 - z(\alpha/2)\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)} \doteq 9{,}36$$

nebo

$$Y \geq n\pi_0 + z(\alpha/2)\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)} \doteq 23{,}97$$

Zamítáme tedy v případě, že je

$$Z \leq -z(\alpha/2) \text{ nebo } Z \geq z(\alpha/2),$$

kde jsme spočítali

$$Z = \frac{Y - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}}$$

Pro $\alpha = 5\ \%$ zamítáme, je-li

$$Z \leq -1{,}96 \text{ nebo } Z \geq 1{,}96$$

$X_1, \ldots, X_n \sim \mathsf{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, nezávislé, σ^2 neznámé

- neznámé $\sigma > 0$ odhadneme pomocí $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$
- $\mathsf{H}_0 : \mu = \mu_0$ (μ_0 známá konstanta)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\widehat{\mathsf{S.E.}}(\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_x}\sqrt{n}$$

  statistka T má za hypotézy Studentovo t-rozdělení s $n-1$ st. vol.

- kdy hypotézu H_0 zamítáme (kritický obor):
  - $\mathsf{H}_1 : \mu \neq \mu_0$ (oboustranná alternativa) $\quad |T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
  - $\mathsf{H}_1 : \mu > \mu_0$ (jednostranná alternativa) $\quad T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
  - $\mathsf{H}_1 : \mu < \mu_0$ (jednostranná alternativa) $\quad T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$

souvislost s intervalem spolehlivosti

- připomeňme interval spolehlivosti pro μ

$$\bar{X} - \widehat{\mathrm{S.E.}}(\bar{X}) \cdot t_{n-1}(\alpha) < \mu < \bar{X} + \widehat{\mathrm{S.E.}}(\bar{X}) \cdot t_{n-1}(\alpha)$$
$$\bar{X} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha) < \mu < \bar{X} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)$$

  což lze přepsat jako

$$|T| = \left| \frac{\bar{X} - \mu}{s_x} \sqrt{n} \right| < t_{n-1}(\alpha)$$

- $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ tedy **nezamítneme** na hladině α při oboustranné alternativě, právě když μ_0 leží v $100(1-\alpha)\%$ intervalu spolehlivosti

- **interval spolehlivosti tedy obsahuje takové hodnoty μ_0, které bychom jako hypotézu nezamítli**

výšky desetiletých hochů (σ^2 neznámé)

- kritický obor: $\bar{X}$ se příliš liší od μ_0 ve směru zvolené alternativy
- spočítáme [t.test(hosi,mu=136.1,alternative="greater")]

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{15-1}((130-139{,}13)^2 + \ldots + (141-139{,}13)^2)} = \sqrt{42{,}98} = 6{,}56$$

$$T = \frac{\bar{X} - 136{,}1}{6{,}56}\sqrt{15} = 1{,}79$$

- na 5% hladině při jednostranné alternativě $\mu > \mu_0$ hypotézu zamítáme, neboť $t_{14}(0{,}10) = 1{,}76$ ($p = 4{,}7$ %)
- na 5% hladině při oboustranné alternativě hypotézu nezamítáme, neboť $t_{14}(0{,}05) = 2{,}14$ ($p = 9{,}5$ %)
- 95% int. spolehlivosti pro populační průměr výšek hochů: $(135{,}5; 142{,}8)$

nová úloha: porovnání dvou populací

- liší se desetileté dívky výškou postavy od desetiletých hochů?
- lze předpokládat, že výšky hochů

$$X_i \sim \mathsf{N}\big(\mu_1, \sigma^2\big), \quad i = 1, \ldots, n_1$$

- lze předpokládat, že výšky dívek

$$Y_i \sim \mathsf{N}\big(\mu_2, \sigma^2\big), \quad i = 1, \ldots, n_2$$

- předpoklad stejných rozptylů bývá splněn, lze jej ověřit
- musí jít o **nezávislé** náhodné výběry, nelze např. vybírat sourozenecké dvojice nebo opakovaně měřit stejnou osobu

porovnání středních hodnot nezávislých výběrů

- zřejmě $\mathsf{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$ (není rozdíl: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ **nulová** hypotéza)
- možné alternativy
  - $\mathsf{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (není-li důvod k jednostranné alternativě)
  - $\mathsf{H}_1 : \mu_1 > \mu_2$ (bylo cílem dokázat, že hoši jsou větší dívek)
  - $\mathsf{H}_1 : \mu_1 < \mu_2$ (bylo cílem dokázat, že hoši jsou menší dívek)
- rozhodování založeno na porovnání průměrů $\bar{X}$ a $\bar{Y}$; čím více se liší „správným směrem“, tím spíše zamítnout hypotézu
- je třeba porovnat s mírou přesnosti, s jakou rozdíl průměrů $\bar{X} - \bar{Y}$ odhadne skutečný rozdíl populačních průměrů $\mu_1 - \mu_2$

porovnání středních hodnot nezáv. výběrů (2)

- k tomu je třeba odhadnout také neznámé σ^2 pomocí

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2\right)$$
$$= \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2}s_x^2 + \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}s_y^2$$

  (vážený průměr odhadů rozptylu v obou výběrech)

- výška desetiletých dětí: $n_1 = 15$, $n_2 = 12$, $\bar{X} = 139{,}13$, $\bar{Y} = 140{,}83$, $s_x^2 = 42{,}98$, $s_y^2 = 33{,}79$, tudíž

$$s^2 = \frac{14}{25} \cdot 42{,}98 + \frac{11}{25} \cdot 33{,}79 = 38{,}94 = 6{,}24^2$$

kritické obory

- o hypotéze $\mathsf{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$ se rozhoduje pomocí

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\widehat{\mathsf{S.E.}}(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

- $\mathsf{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ zamítáme pokud $|T| \geq t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$
- $\mathsf{H}_1 : \mu_1 > \mu_2$ zamítáme pokud $T \geq t_{n_1+n_2-2}(2\alpha)$
- $\mathsf{H}_1 : \mu_1 < \mu_2$ zamítáme pokud $T \leq -t_{n_1+n_2-2}(2\alpha)$
- výšky desetiletých: $T = -0{,}70 \Rightarrow |-0{,}70| < 2{,}06 = t_{15+12-2}(0{,}05)$
- na 5% hladině jsme **neprokázali** rozdíl mezi výškami desetiletých hochů a dívek ($p = 48{,}8$ %) [t.test(vyska∼Divka,var.equal=TRUE)]

souvislost s intervalem spolehlivosti

- $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ o kolik se liší populační průměrné výšky
- odhadem pro δ je $d = \bar{X} - \bar{Y} = -1{,}7$
- interval spolehlivosti pro rozdíl δ je

  $(\bar{X}-\bar{Y}) - \widehat{\mathsf{S.E.}}.(\bar{X}-\bar{Y}) \cdot t_{n_1+n_2-2}(\alpha) < \delta < (\bar{X}-\bar{Y}) + \widehat{\mathsf{S.E.}}.(\bar{X}-\bar{Y}) \cdot t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$

  H_0 zamítáme právě tehdy, když nula **není** v int. spol. pro δ
- při porovnání výšek hochů a dívek je 95% interval pro δ

$$\left(-1{,}7 - 6{,}24\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{12}} \cdot 2{,}06;\ -1{,}7 + 6{,}24\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{12}} \cdot 2{,}06\right)$$

$$(-6{,}7; 3{,}3)$$

provedení v MS Excelu (stejné rozptyly)

přednáška	Excel	Soubor 1	Soubor 2
průměr	Stř. hodnota	139.133	140.833
rozptyl	Rozptyl	42.981	33.788
rozsah výběru	Pozorování	15	12
spol. odhad rozpt.	Společný rozptyl	38.936	
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 =$	Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
stupně vol.	Rozdíl	25	
T	t stat	-0.733	
p jednostr. testu	P(T<=t) (1)	0.244	jen někdy!
$t_{n_1+n_2-2}(2\alpha)$	t krit (1)	1.708	
p oboustr. testu	P(T<=t) (2)	0.488	
$t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$	t krit (2)	2.060	

při oboustranné alternativě nelze nulovou hypotézu zamítnout

problém nestejných rozptylů

- předpoklad o stejném rozptylu v obou souborech nemusí být ve skutečnosti splněn, lze jej ověřit porovnáním odhadů rozptylu F-testem $F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$
- hypotéza $\mathrm{H}_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ se proti $\mathrm{H}_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ zamítá, když je

$$\text{buď } F = \frac{s_x^2}{s_y^2} \geq F_{n_1-1,n_2-1}(\alpha/2) \text{ nebo } \frac{1}{F} = \frac{s_y^2}{s_x^2} \geq F_{n_2-1,n_1-1}(\alpha/2)$$

- vlastně se větší odhad rozptylu dělí menším odhadem, k tomu se musí zvolit správné pořadí stupňů volnosti a hladina
- příklad výšky desetiletých dětí: $F = \frac{42{,}98}{38{,}94} = 1{,}27 < F_{14,11}(0{,}025) = 3{,}36$
- [var.test(vyska∼Divka)]

MS Excel: Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

přednáška	Excel	Soubor 1	Soubor 2
průměr	Stř. hodnota	139.13	140.83
rozptyl	Rozptyl	42.98	33.79
rozsah	Pozorování	15	12
stupně vol.	Rozdíl	14	11
F	F	1.27	
p	P$(F <= f)$ (1)	0.349	
	F krit (1)	2.739	

pozor Excel pracuje **špatně**: uvádí kritickou hodnotu a p-hodnotu pro jednostrannou alternativu odvozenou z hodnoty statistiky F;
při oboustranné alternativě je třeba p-hodnotu vynásobit dvěma
ve skutečnosti je P$(F > 1{,}27) = 0{,}349$, takže $p = 2 \cdot 0{,}349 = 0{,}698$
pro oboustrannou alternativu mělo být použito $F_{14,11}(0{,}025) = 3{,}359$

dvouvýběrový t-test při nestejných rozptylech [t.test(vyska∼Divka)]

- není-li udržitelný předpoklad o stejných rozptylech, lze použít přibližný t-test (Welchův, s jiným odhadem S.E.$(\bar{X}-\bar{Y})$)

$$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\widehat{\text{S.E.}}(\bar{X}-\bar{Y})} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}}$$

- kde $s_{\bar{X}-\bar{Y}}$ je střední chyba $\bar{X}-\bar{Y}$

$$s_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{v_x + v_y} \qquad v_x = s_x^2/n_1 \qquad v_y = s_y^2/n_2$$

- H_0 se zamítá, je-li $|T| \geq t_f(\alpha)$, kde $f = \dfrac{s^4_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\frac{v_1^2}{n_1-1}+\frac{v_2^2}{n_2-1}}$

- náš příklad $T = -0{,}713,\ f = 24{,}69,\ t_f(0{,}05) = 2{,}061,\ p = 0{,}482$

provedení v MS Excelu (nestejné rozptyly)

		Soubor 1	Soubor 2
průměr	Stř. hodnota	139.133	140.833
rozptyl	Rozptyl	42.981	33.788
rozsah	Pozorování	15	12
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 =$	Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
stupně vol. f	Rozdíl	25	
T	t stat	-0.713	
p jednostr. testu	P(T<=t) (1)	0.241	
$t_f(2\alpha)$	t krit (1)	1.708	
p oboustr. testu	P(T<=t) (2)	0.482	
$t_f(\alpha)$	t krit (2)	2.060	

při oboustranné alternativě nelze nulovou hypotézu zamítnout

párové testy

- není-li předpoklad **nezávislosti** porovnávaných výběrů splněn, dá dvouvýběrový t-test nesprávný výsledek
- typické porušení předpokladu nezávislosti je u párových dat
  - měření na stejných objektech ve dvou různých časech
  - měření na stejných objektech před zásahem a po něm (ošetření)
  - měření na rodičích
- postup
  - spočítají se a hodnotí rozdíly (změny)
  - přejde se k úloze s jediným výběrem
  - mají-li rozdíly normální rozdělení, pak párový t-test

párový t-test:

- nechť $(Y_1, Z_1) \ldots, (Y_n, Z_n)$ nezávislé dvojice, $X_i = Y_i - Z_i$
- nechť $X_i \sim \mathsf{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$
- neznámé $\sigma > 0$ odhadneme pomocí $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$
- $\mathsf{H}_0 : \mu = \mu_0$ (μ_0 známá konstanta, zpravidla 0)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\widehat{\mathsf{S.E.}}(\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s} \sqrt{n}$$

- hypotézu H_0 zamítáme (kritický obor):
  - $\mathsf{H}_1 : \mu \neq \mu_0$ (oboustranná alternativa) $\quad |T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
  - $\mathsf{H}_1 : \mu > \mu_0$ (jednostranná alternativa) $\quad T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
  - $\mathsf{H}_1 : \mu < \mu_0$ (jednostranná alternativa) $\quad T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$

příklad: výška rodičů

- rozhodnout o tvrzení, že populační průměr výšek otců je o 10 cm větší než populační průměr výšek matek
- otcové: $\bar{Y} = 179{,}26, s_Y = 6{,}78, n_1 = 99$
  matky: $\bar{Z} = 166{,}97, s_Z = 6{,}11, n_2 = 99$
- otcové jsou (ve výběru) v průměru o $\bar{Y} - \bar{Z} =$ 12,29 cm vyšší
  směrodatná odchylka **rozdílů** je 8,14 (méně, než kdyby byly výšky rodičů nezávislé . . . $6{,}78^2 + 6{,}11^2 = 9{,}13^2$)
  střední chyba rozdílu průměrů je $8{,}14/\sqrt{99} = 0{,}819$
- rozhodneme podle statistiky [t.test(vyska.o-vyska.m,mu=10)]

$$T = \left|\frac{12{,}29 - 10}{0{,}819}\right| = 2{,}801 > 1{,}984 = t_{98}(0{,}05) \qquad p = 0{,}6\ \%$$

Mannův-Whitneyův (Wilcoxonův) test

- co když nelze předpokládat normální rozdělení?
- nechť $X_1, \ldots, X_{n_1}$ a $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ jsou **nezávislé** výběry ze spojitého rozdělení (například věk matek, střední délka života mužů při narození ve dvou skupinách zemí, potratovost . . .)
- postup založen na pořadí bez ohledu na výběr
- idea: kdyby nebyl mezi populacemi rozdíl, byla by takto zjištěná průměrná pořadí v obou výběrech podobná

příklad: potratovost (Čechy vers. Morava)

kraj	Pha	Stč	Jč	Pl	KV	Ús	Lb
potratovost	4.03	4.02	4.11	4.70	5.65	5.80	4.98
pořadí	7	6	8	10	12	13	11

kraj	HK	Par	Vys	JM	Ol	Zl	MS
potratovost	4.33	3.38	3.57	3.70	3.65	3.42	3.87
pořadí	9	1		4	3	2	5

- H_0 : shoda populací (zejm. mediánů), H_1 : neshoda
- nejasné, kam patří kraj Vysočina; vynecháme jej
- průměrné pořadí českých krajů: 77/9=8,56
  W_1=7+6+8+10+12+13+11+9+1=77
- průměrné pořadí moravských krajů: 14/4=3,5
  W_2=4+3+2+5=14

přibližné rozhodování (n_1, n_2 desítky)

- W_1, W_2 součty pořadí, použitím centrální limitní věty

$$Z = \frac{W_1 - n_1(n_1 + n_2 + 1)/2}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)/12}}$$

- za hypotézy (není rozdíl mezi populacemi) je $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$
- hypotézu zamítáme, je-li $|Z| \geq z(\alpha/2)$
- náš příklad: [wilcox.test(potr∼Cechy)]

$$Z = \left| \frac{77 - 9 * 14/2}{\sqrt{9 * 4 * 14/12}} \right| = 2{,}16 > 1{,}96 = z(0{,}05/2) \qquad p = 3{,}1\ \%$$

- na 5% hladině jsme prokázali rozdíl

přesný výpočet p-hodnoty ilcoxonova testu

- zajímá nás, nakolik je náš výsledek ($W_1 = 77, W_2 = 14$) výjimečný
- máme celkem $n_1 + n_2 = 13$ pozorování, čtyři z nich (Morava) lze vybrat celkem $\binom{13}{4} = 715$ způsoby
- kolik z nich vede k tak extrémně nestejným průměrným pořadím?
- budeme hledat, kolik čtveřic označených za moravské by dalo v součtu nejvýš 14, jak nám doopravdy vyšlo
- vždy platí $W_1 + W_2 = (n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)/2 = 91$
  (součet čísel $1 + 2 + \ldots + n_1 + n_2$)
- stačí zabývat se jedinou ze statistik W_1, W_2, zpravidla tou pro menší výběr

přehled možných čtveřic,

v nichž je součet pořadí nejvýš 14

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	3	3	2	2
3	3	3	4	3	4	4	3	4	5	4	4	3	4
4	5	6	5	7	6	5	8	7	6	6	5	9	8
10	11	12	12	13	13	13	14	14	14	14	14	15	15

- nejvýš 14 mohl být součet pořadí za platnosti hypotézy s pravděpodobností $p_1 = 12/715 = 0{,}01678$
- musíme vzít v úvahu také situaci, kdy by byla na Moravě velká pořadí, p-hodnotu nutno zdvojnásobit, tedy $p = 24/715 = 3{,}4$ %

příklad: klesá potratovost? (t-test zde nevhodný)

Y_i	24.7	25.7	31.6	24.3	26.8	30.6	21.1	23.5	26.9	22.5	23.1	24.9
Z_i	23.1	23.6	27.9	22.2	23.4	27.9	21.5	26.0	24.3	23.9	21.2	25.7
X_i	1.6	2.1	3.7	2.1	3.4	2.7	-0.4	-2.5	2.6	-1.4	1.9	-0.8
R_i^+	4	6	12	7	11	10	1	8	9	3	5	2

- použijeme údaje z 12 okresů v letech 2000 (Y_i) a 2001 (Z_i)
- hypotéza H_0 : v obou letech potratovost stejná, rozdíly dány náhodným kolísáním; H_1 : potratovost klesá (jednostranná alt.)
- za H_0 by rozdíly měly kolísat **symetricky kolem nuly**
- za H_1 by měly převládat kladné rozdíly, spíše velké
- průměrné pořadí z 8 kladných rozdílů: 8 (součet 64)
  průměrné pořadí ze 4 záporných rozdílů 3,5 (součet 14)

párový ilcoxonův (ilcoxon signed rank) test

- nechť $(Y_1, Z_1) \ldots, (Y_n, Z_n)$ **nezávislé** dvojice, $X_i = Y_i - Z_i$ má **spojité** rozdělení
- $\mathrm{H}_0 : Y_i, Z_i$ mají stejné rozdělení (populace jsou stejné)
- mají-li Y_i, Z_i stejné rozdělení, pak rozdíly $X_i = Y_i - Z_i$ jsou symetricky rozděleny kolem nuly
- postup
  - vyloučit nulové hodnoty X_i (tedy shodné hodnoty Y_i, Z_i), podle toho případně zmenšit n
  - určit pořadí R_i^+ **absolutních hodno**t $|X_i| = |Y_i - Z_i|$
  - určit W součet pořadí původně kladných hodnot X_i
  - podle W rozhodnout

rozhodování [wilcox.test(potr00-potr01,alternative="greater")]

- na základě centrální limitní věty lze použít

$$Z = \frac{W - \mathsf{E}\, W}{\mathsf{S.E.}(W)} = \frac{W - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

- hypotézu o shodě zamítneme, bude-li $|Z| \geq z(\alpha/2)$
- při jednostranné alternativě porovnat Z a $z(\alpha)$
- pro malý počet dvojic (do deseti) raději použít tabulky
- příklad ($W = 64, n = 12$, jinou metodou přesně je $p = 2{,}6$ %))

$$Z = \frac{64 - 12 \cdot 13/4}{\sqrt{12 \cdot 13 \cdot 25/24}} = 1{,}961 > 1{,}645 = z(0{,}05), p = 2{,}5\ \%$$

párový znaménkový (sign) test

- hodnotí pouze **počet** kladných a záporných rozdílů, nezáleží na tom, jak jsou rozdíly veliké (slabší test než Wilcoxonův)
- $\mathrm{H}_0 : Y_i, Z_i$ mají stejné rozdělení; za hypotézy očekáváme, že počty kladných a záporných X_i jsou podobné
- označme Y počet kladných X_i z celkem n nenulových, za hypotézy $Y \sim \mathrm{bi}(n, 1/2)$
- přibližné rozhodování (centrální limitní věta)

$$Z = \frac{Y - n/2}{\sqrt{n/4}} = \frac{2Y - n}{\sqrt{n}}, \text{ zamítat pro } |Z| \geq z(\alpha/2)$$

- při jednostranné alternativě porovnáme Z a $z(\alpha)$

poznámky [binom.test(sum(potr00>potr01),12,alt="gr")]

- pro znaménkový test není třeba znát hodnoty Y_i, Z_i, stačí vědět, která z možností $Y_i > Z_i$, $Y_i < Z_i$, $Y_i = Z_i$ nastala
- náš příklad o možném poklesu potratovosti ($n = 12, Y = 8$)

$$Z = \frac{2 \cdot 8 - 12}{\sqrt{12}} = 1{,}155, \quad p = \mathsf{P}(Z > 1{,}155) = 1 - \Phi(1{,}155) = 0{,}124$$

- při malých hodnotách n (do 30) se doporučuje Yatesova korekce

$$Z_{\text{Yates}} = \frac{|Y - n/2| - 1/2}{\sqrt{n/4}} \operatorname{sign}(Y - n/2) = \frac{|2Y - n| - 1}{\sqrt{n}} \operatorname{sign}(2Y - n)$$

- náš příklad (Yatesova korekce, jiným způsobem přesně p =0,194)

$$Z = \frac{|2 \cdot 8 - 12| - 1}{\sqrt{12}} \cdot 1 = 0{,}866, \quad p = 1 - \Phi(0{,}866) = 0{,}193$$

prokazování závislosti spojitých veličin

- víme, že pro nezávislé X, Y je $\rho_{X,Y} = 0$
- r_{xy} je odhadem $\rho_{X,Y}$; jak daleko od nuly musí být r_{xy}, abychom na hladině α prokázali zaávislost X, Y?
- za předpokladu, že X, Y mají normální rozdělení (nebo počet pozorovaných dvojic X_i, Y_i je velký, hypotézu nezávislosti zamítáme pokud je $|T| \geq t_{n-2}(\alpha)$, kde

$$T = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \sqrt{n - 2}$$

příklad: výšky rodičů [cor(x,y,method="pearson")]

- pro $n = 99$ dvojic byl spočítán korelační koeficient $r = 0{,}205$; rozhodnout o hypotéze nezávislosti

$$T = \frac{0{,}205}{\sqrt{1 - 0{,}205^2}}\sqrt{97} = 2{,}07 > t_{97}(0{,}05) = 1{,}98$$

- na 5% hladině jsme závislost prokázali
- $t_{97}(0{,}01) = 2{,}63$, tudíž na 1% hladině jsme závislost neprokázali
- výška zpravidla splňuje předpoklad o normálním rozdělení
- není-li normální rozdělení a nepříliš pozorování, raději použít Spearmanův korelační koeficient

Spearmanův korelační koeficient [cor(x,y,method="spearman")]

- místo původních hodnot x_i, y_i používá jejich pořadí R_i, Q_i
- je to vlastně Pearsonův korelační koeficient použitý na pořadí
- výpočet lze upravit, zjednodušit na

$$r_S = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} (R_i - Q_i)^2$$

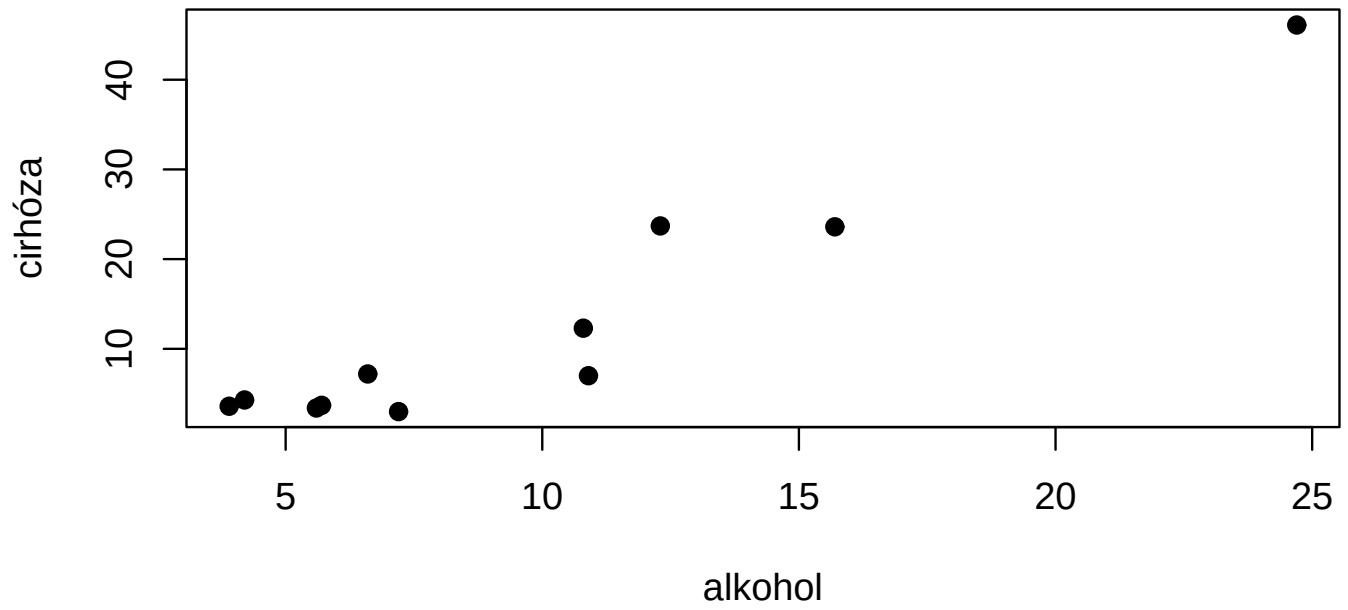
- vhodný pro nelineární monotonní **závislost**, nevadí odlehlé hodnoty
- při testování nemusí být normální rozdělení

příklad: alkohol a úmrtnost na cirhózu

země	spotřeba	úmrtnost	R_i	Q_i
Finsko	3,9	3,6	1	3
Norsko	4,2	4,3	2	5
Irsko	5,6	3,4	3	2
Holandsko	5,7	3,7	4	4
Švédsko	6,0	7,2	5	7
Anglie	7,2	3,0	6	1
Belgie	10,8	12,3	7	8
Rakousko	10,9	7,0	8	6
SRN	12,3	23,7	9	10
Itálie	15,7	23,6	10	9
Francie	24,7	46,1	11	11

$$r_S = 1 - \frac{6}{11 \cdot 120}\left(2^2 + 3^2 + \ldots\right)$$
$$= 0{,}773$$

příklad: spotřeba alkoholu a cirhóza jater



Spearmanův korelační koeficient

- k prokazování závislosti netřeba normální rozdělení
- slabší test než pomocí Pearsonova korelačního koeficientu
- pro $n \geq 10$ lze při nezávislosti předpokládat $r_S\sqrt{n-1} \sim \mathsf{N}(0,1)$
- závislost (proti oboustranné alternativě) prokázána, pokud

$$|r_S\sqrt{n-1}| \geq z(\alpha/2)$$

- závislost (proti jednostranné alternativě) prokázána, pokud

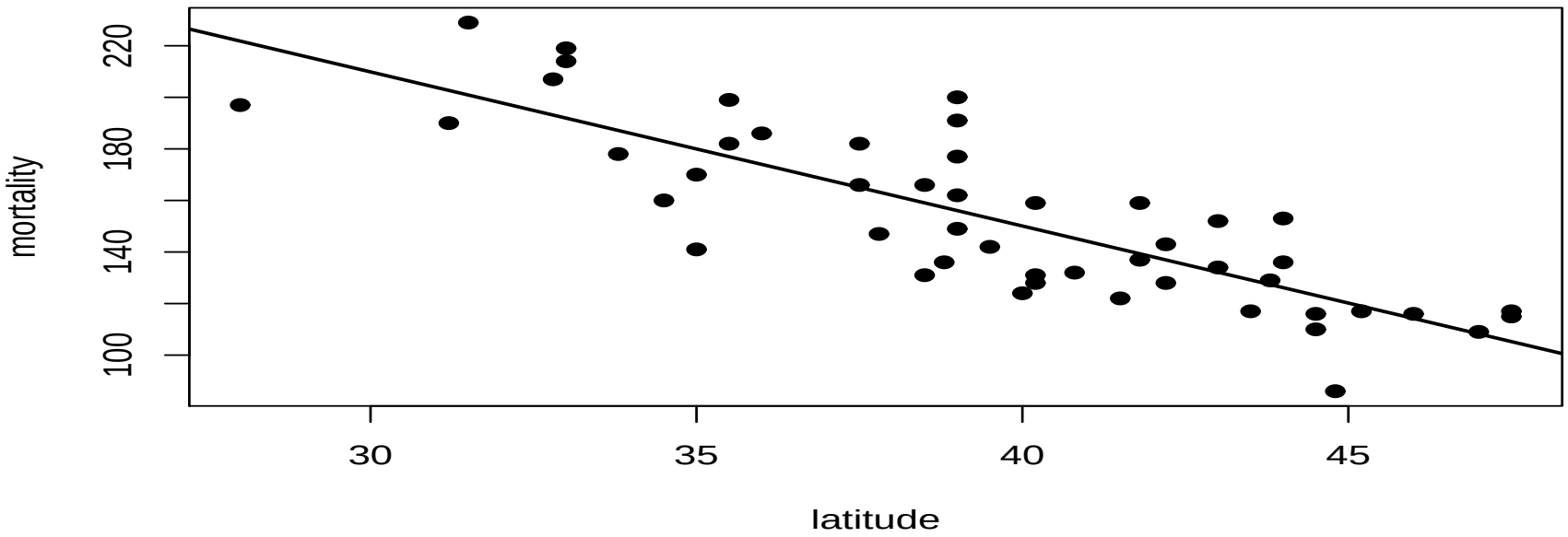
$$r_S\sqrt{n-1} \geq z(\alpha) \text{ resp. } r_S\sqrt{n-1} \leq -z(\alpha)$$

- existují přesnější kritické hodnoty

Regrese

- na rozdíl od korelace (síla závislosti) hledáme tvar (způsob) závislosti, zajímá nás také průkaznost závislosti
- snažíme se z daných hodnot **regresorů (nezávisle proměnných)** předpovědět hodnoty **závisle proměnné** (odezvy, vysvětlované proměnné)
- snažíme se variabilitu (kolísání hodnot) odezvy vysvětlit kolísáním regresorů
- prvně v tomto smyslu F. Galton (1886) při vyšetřování závislosti výšky synů na průměrné výšce rodičů: synové rodičů o dva palce vyšších než průměr všech rodičů byli v průměru jen o palec vyšší než průměr synů; dvoupalcová odchylka se nereprodukovala celá, byl patrný návrat (**regres**) k průměru

příklad: souvisí úmrtnost se zeměpisnou šířkou?



- úmrtnost na melanom na 10 000 000 obyvatel v státech USA

regresní přímka

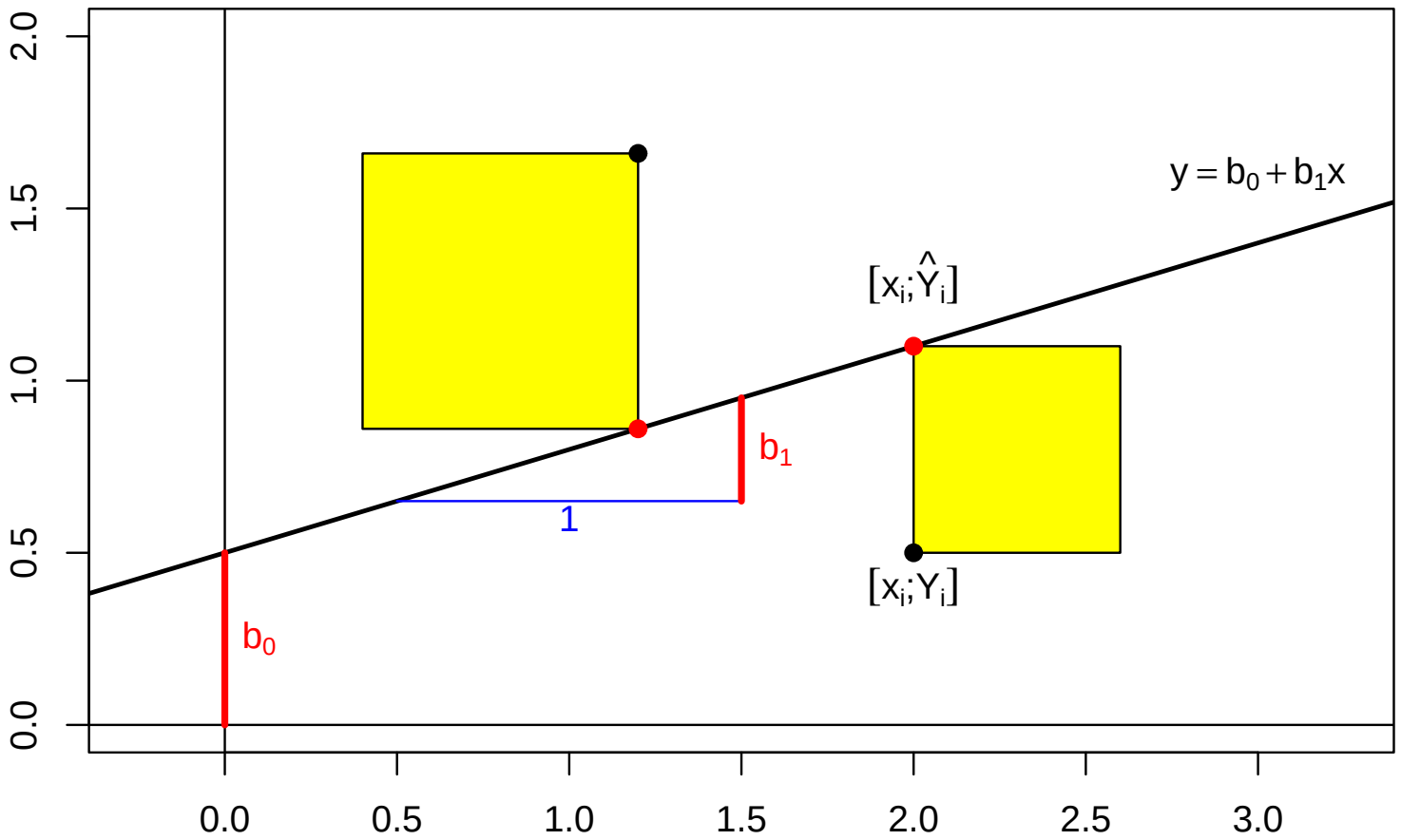
- chování Y (úmrtnost, mortality) co nejlépe (nejvíce) vysvětlit lineární závislostí na x (zeměpisná šířka, latitude)
- (naše představa, předpoklad:) každé zem. šířce odpovídá jakási střední úmrtnost, ta závisí na zeměpisné šířce lineárně

$$\mathsf{E}\, Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

- parametry β_0, β_1 odhadneme **metodou nejmenších čtverců** minimalizací přes β_0, β_1 součtu čtverců „svislých“ odchylek

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

- výsledné minimum (pro b_0, b_1) – **reziduální součet čtverců** S_e


y = b0 + b1x
[xi;Ŷi]
[xi;Yi]
b0
b1
1
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

náš příklad [summary(lm(mortality∼latitude))]

koef.	odhad	stř. chyba	t-stat.	p
abs. člen	389,19	23,81	16,34	<0,001
latitude	− 5,98	0,60	− 9,99	<0,001

- odhad závislosti: $\widehat{\text{mortality}} = 389{,}2 - 5{,}98\ \text{latitude}$
- s každým stupněm sev. šířky klesá úmrtnost v průměru téměř o 6 osob na 10 000 000 obyvatel
- na rovníku by úmrtnost měla být 389 jednotek, ale je to extrapolace mimo rozmezí známých hodnot – velmi nejisté
- závislost je průkazná, neboť v řádku pro x (latitude) je p <0,001

obecně

- odhadovaná závislost $y = \beta_0 + \beta_1 x$, odhadnutá $y = b_0 + b_1 x$
- závislost na x prokazujeme testováním hypotézy $\mathsf{H}_0 : \beta_1 = 0$ (pak y pro všechna x stejné: $y = \beta_0$) proti oboustranné alternativě pomocí

$$T = \frac{b_1}{\mathsf{S.E.}(b_1)} = \frac{b_1}{s}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \quad \text{zamítáme pokud } |T| \geq t_{n-2}(\alpha)$$

- **reziduální součet čtverců – nevysvětlená variabilita** odezvy Y $S_e = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - (b_0 + b_1 x_i))^2$ reziduální rozptyl $s^2 = S_e/(n-2)$
- **koeficient determinace** ukazuje, jaký **díl variability odezvy** (tj. $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$) jsme závislostí vysvětlili

$$R^2 = 1 - \frac{S_e}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}$$

náš příklad a tabulka analýzy rozptylu [anova(lm(mortality∼latitude))]

variabilita	st. vol. f	součet čtverců SS	prům. čtverec MS	F	p
model	1	36 464,20	36 464,20	99,797	<0,001
reziduální	47	17 173,07	365,38		
celkem	48	53 637,27			

- kolísání úmrtnosti vysvětlíme závislostí z 68 %, neboť je

$$R^2 = 1 - \frac{17173{,}07}{53637{,}27} = \frac{36464{,}20}{53637{,}27} = 0{,}680$$

- na 30. stupni očekáváme úmrtnost $389{,}19 - 5{,}98 \cdot 30 = 209{,}86$,
  na 40. stupni očekáváme úmrtnost $389{,}19 - 5{,}98 \cdot 40 = 150{,}08$

můžeme predikci zlepšit?

[summary(lm(mortality∼latitude+longitude))]

koef.	odhad	stř. chyba	t-stat.	p
abs. člen	401,17	28,04	14,31	<0,001
latitude	− 5,93	0,60	− 9,82	<0,001
longitude	0,15	0,19	0,82	0,418

- není průkazné, že by koeficient u longitude byl nenulový (nezamítneme hypotézu, že koeficient je nulový)
- $\Rightarrow$ není vhodné přidávat do modelu k latitude také longitude
- koeficient determinace R^2 =0,684 (původně 0,680)

podrobnější rozbor – vliv oceánu

závislost jen pro vnitrozemské státy ($R^2 = 59{,}6\ \%$):

koef.	odhad	stř. chyba	t-stat.	p
abs. člen	360,55	36,70	9,82	$<$0,001
latitude	− 5,485	0,904	− 6,07	$<$0,001

závislost jen pro přímořské státy ($R^2 = 78{,}6\ \%$):

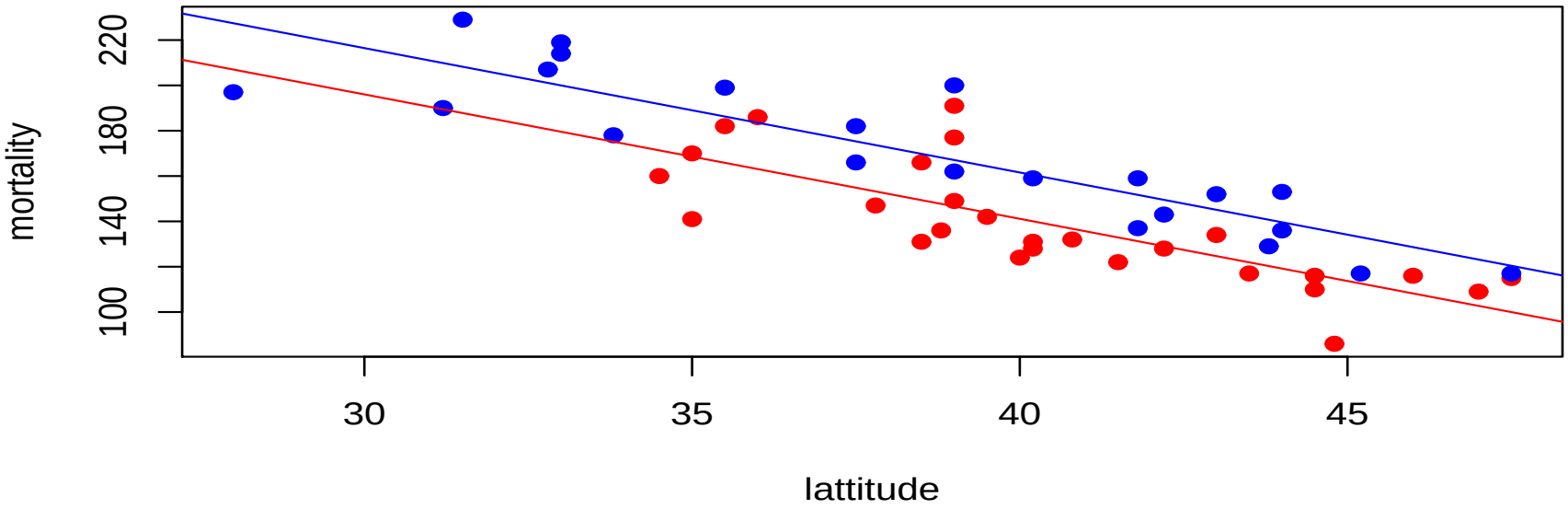
koef.	odhad	stř. chyba	t-stat.	p
abs. člen	381,20	24,83	15,35	$<$0,001
latitude	− 5,491	0,640	− 8,58	$<$0,001

- směrnice jsou téměř stejné, abs. členy rozdílné
- s každým stupněm sev. šířky klesá úmrtnost v průměru téměř o 5,5 osob na 10 000 000 obyvatel

můžeme predikci zlepšit? [summary(lm(mortality∼ocean+latitude))]

koef.	odhad	stř. chyba	t-stat.	p
abs. člen	360,69	21,50	16,78	<0,001
ocean	20,43	4,83	4,23	<0,001
latitude	− 5,49	0,53	− 10,44	<0,001

- koeficient determinace R^2=0,770
- při „stěhování“ z vnitrozemí k oceánu po rovnoběžce roste úmrtnost v průměru o 20 osob na 10 milionů obyvatel
- je to ekvivalentní vnitrozemskému stěhování o 20,43/5,49 = 3,72 stupňů na jih
- na každý stupeň stěhování na sever klesá úmrtnost o 5,5, pokud se nezmění vztah k oceánu



- vnitrozemské státy: y=360,69−5,49 x
  přímořské státy: y=(360,69+20,43)−5,49 x =381,12−5,49 x
- lze ověřit, že přímky mohou být rovnoběžné (p =99,6 %)

pozor na interpretaci odhadů (na dalším příkladu)

- závisí procento tuku dospělého muže na výšce?
  pokud ano, tak s výškou roste nebo klesá?
- závisí na tom, jak se na úlohu díváme, co bereme v úvahu
- $\widehat{\text{fat}} = -47{,}68 + 0{,}341\ \text{height}$ $\qquad R^2 = 11{,}8\ \%$
- $\widehat{\text{fat}} = 16{,}55 - 0{,}244\ \text{height} + 0{,}504\ \text{weight}$ $\quad R^2 = 71{,}4\ \%$
- ve všech případech jsou koeficienty u regresorů na 5% hladině průkazně nenulové
- rozdíl je v kvalitě vyrovnání, ale zejména v interpretaci
- průměrná změna procenta tuku při jednotkové změně výšky
  (a **nezměněné hmotnosti** pro druhý model)

regrese v MS Excelu 2000, 2003

	Excel 2000	označení
absolutní člen	Hranice	b_0
odhad	Koeficienty	b_i
střední chyba odhadu	Chyba střední hodnoty	S.E.(b_j)
koeficient		$\sqrt{R^2}$
(mnohonásobné) korelace	Násobné R	
koeficient determinace	Hodnota spolehlivosti R	R^2
adjustovaný koef. det.	Nastavená hodnota spol. R	R^2_{adj}
resid. směr. odchylka	Chyba střední hodnoty	s
počet pozorování	Pozorování	n
počet st. volnosti	Rozdíl	

regrese v MS Excelu 2000, 2003

- Pozor na nabízený graf „Graf s rozdělením pravděpodobnosti“: obecně **nevypovídá** o normálním rozdělení, jak by asi chtěl, bylo by třeba použít místo vysvětlované veličiny některá z reziduí
- Nabízená „Normovaná rezidua“ jsou v regresi zcela nestandardní (z-skóry běžných reziduí)

obecné předpoklady pro regresní model

- **tvar závislosti**: známe jak vysvětlovaná veličina závisí na vysvětlujících
- **homoskedasticita**: pro všechny kombinace hodnot vysvětlujících veličin je rozptyl vysvětlované veličiny konstantní
- **nezávislost**: náhodné složky vysvětlovaných veličin jsou nezávislé
- **normalita**: náhodná složka má normální rozdělení
- předpoklady lze ověřovat (regresní diagnostika)
- někdy pomohou transformace

použití reziduí

- pomocí regrese hledáme model pro závislost nebo predikci (střední hodnoty) příštích pozorování
- celkovou schopnost vysvětlit chování (variabilitu) závisle proměnné hodnotíme pomocí **koeficientu determinace**

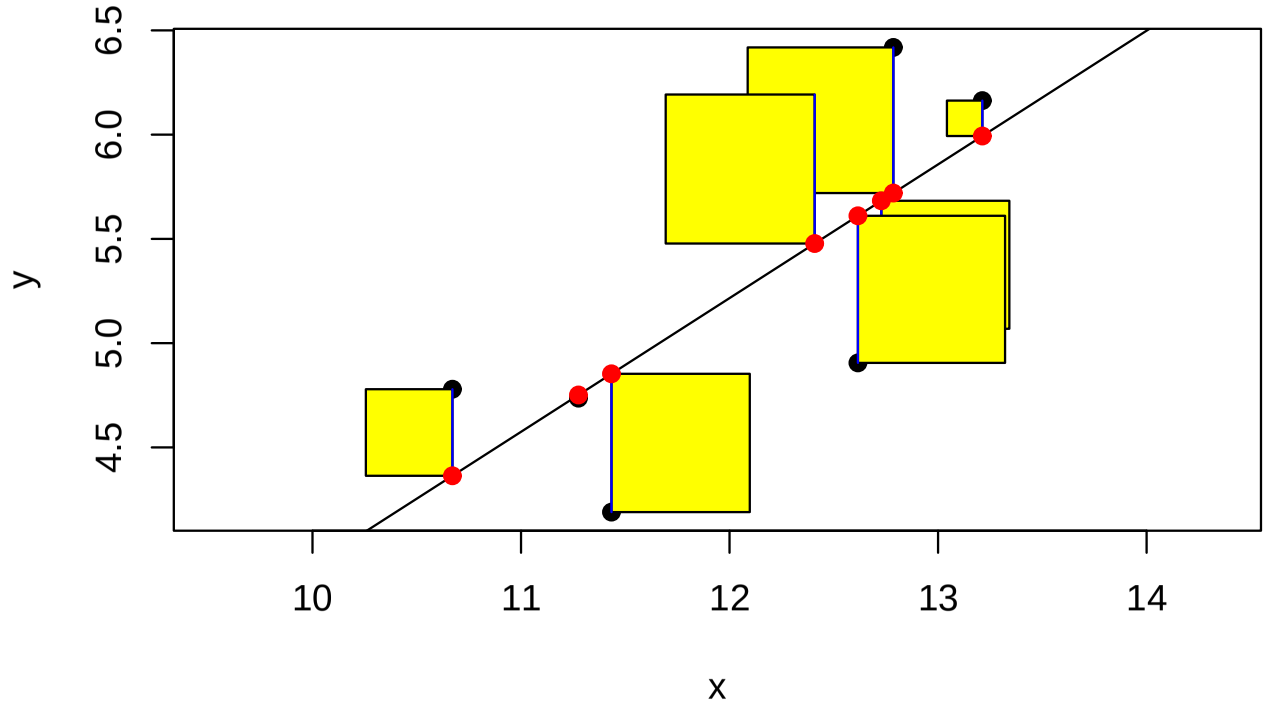
$$R^2 = 1 - \frac{S_e}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}$$

- v čitateli posledního výrazu **rezidua**

$$u_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

(rozdíl **naměřená - vyrovnaná** hodnota vysvětlované proměnné)

- rezidua lze použít k hodnocení (diagnostice) regrese



Y_i, $\hat{Y}_i$

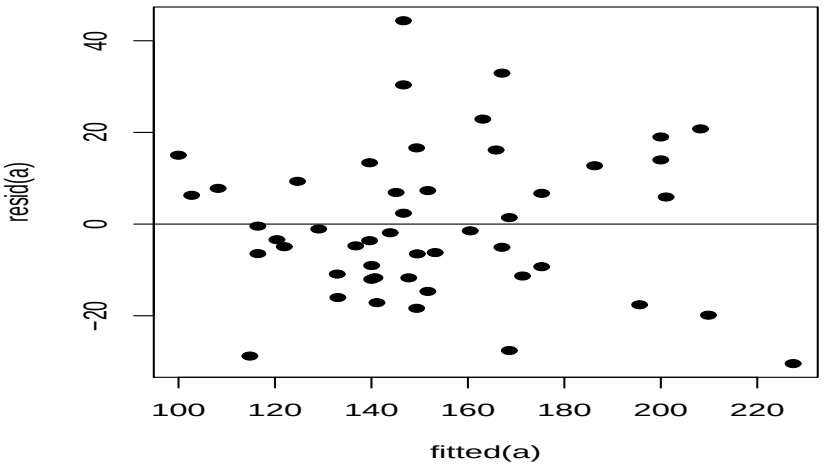
diagnostika pomocí reziduí

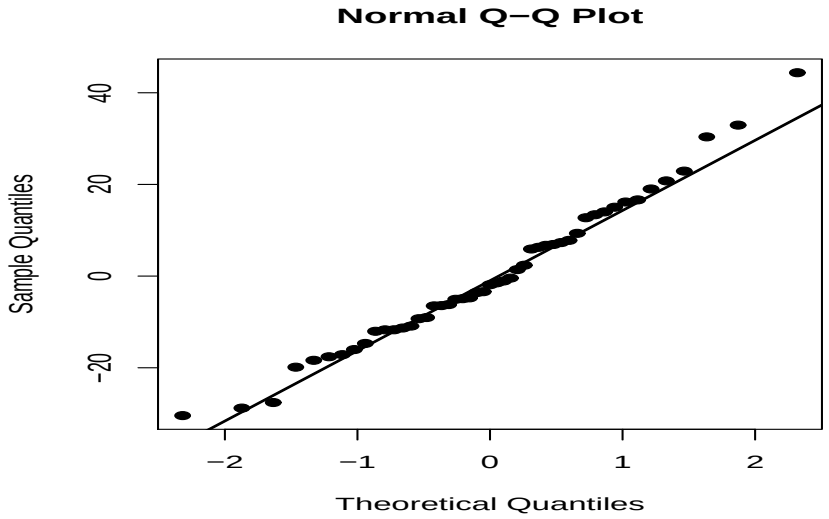
- grafické znázornění bodů $[\hat{Y}_i, u_i]$ nebo $[x_i, u_i]$ (k ověření konstantního rozptylu či tvaru závislosti)
- histogram reziduí nebo normální diagram (k ověření normálního rozdělení), pomocí u_i nebo v_i (upravená rezidua)
- diagramy k ověření stability rozptylu, např. $[\hat{Y}_i, \sqrt{|v_i|}]$
- Cookova vzdálenost pro vyjádření relativního vlivu jednotlivých pozorování
- [plot(lm(mortality∼ocean+latitude))]

ukázky diagnostiky

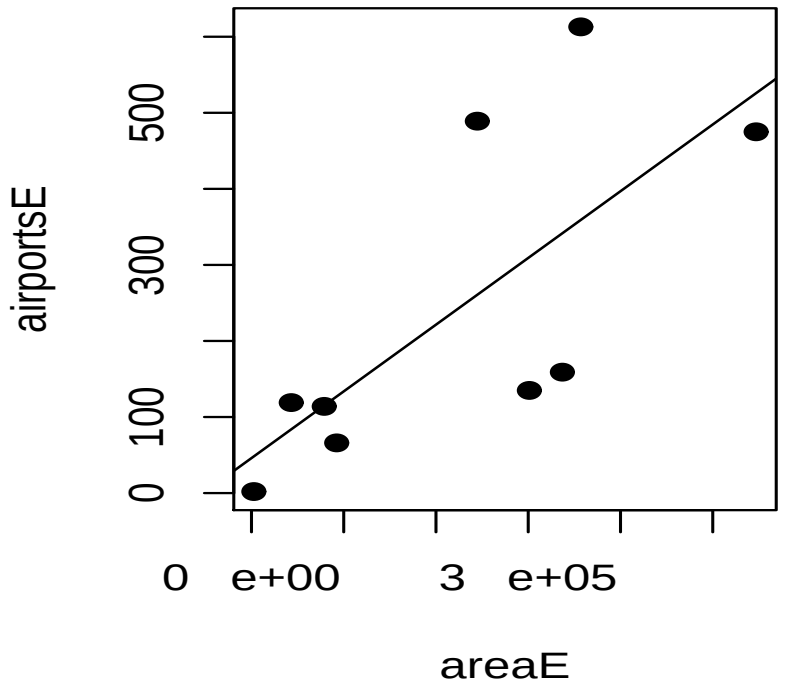
vlevo: rezidua spíše kladná než záporná, možná jsme měli raději vysvětlovat odmocninu z mortality

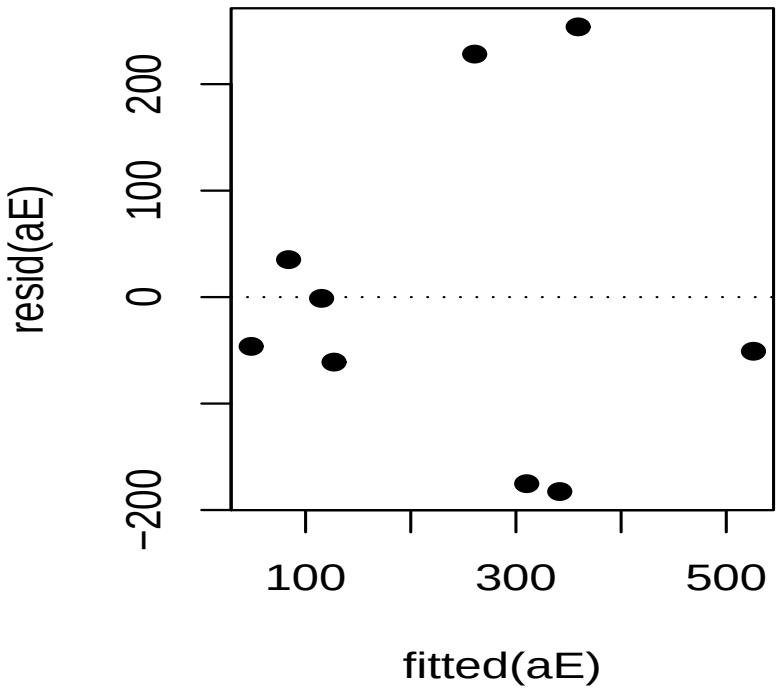
vpravo: normální diagram, ukazuje, že s předpokladem o normálním rozdělením není problém (body těsně kolem přímky)



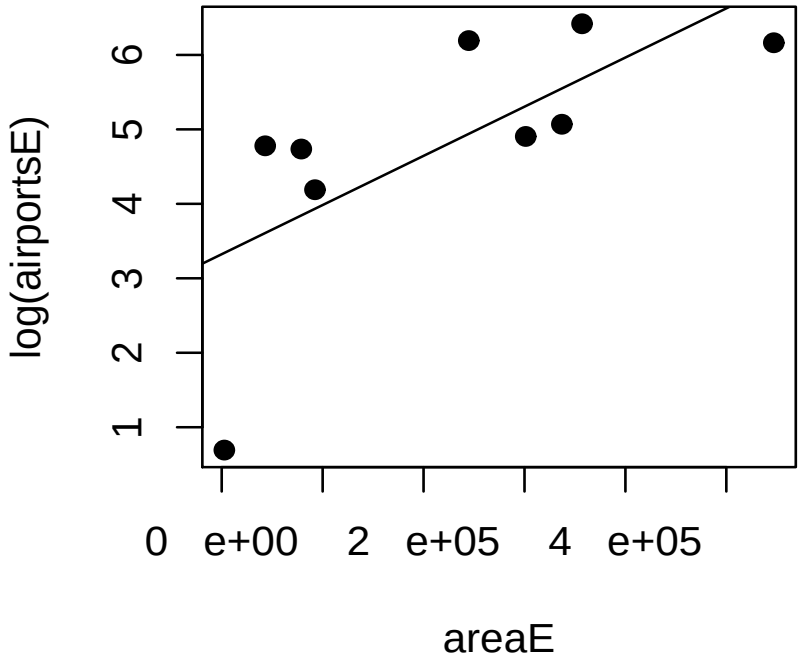


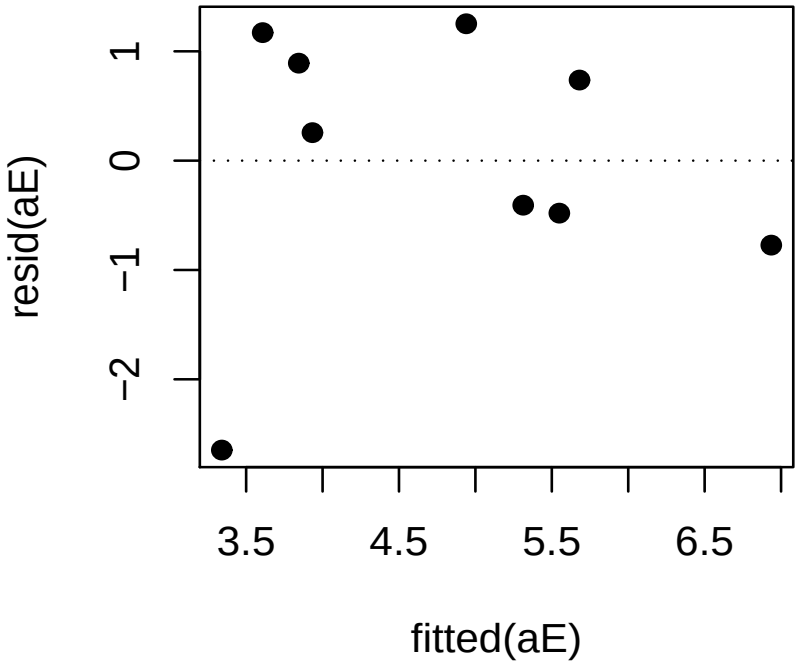
nekonstantní rozptyl (trychtýřovité rozšiřování mraku reziduí)



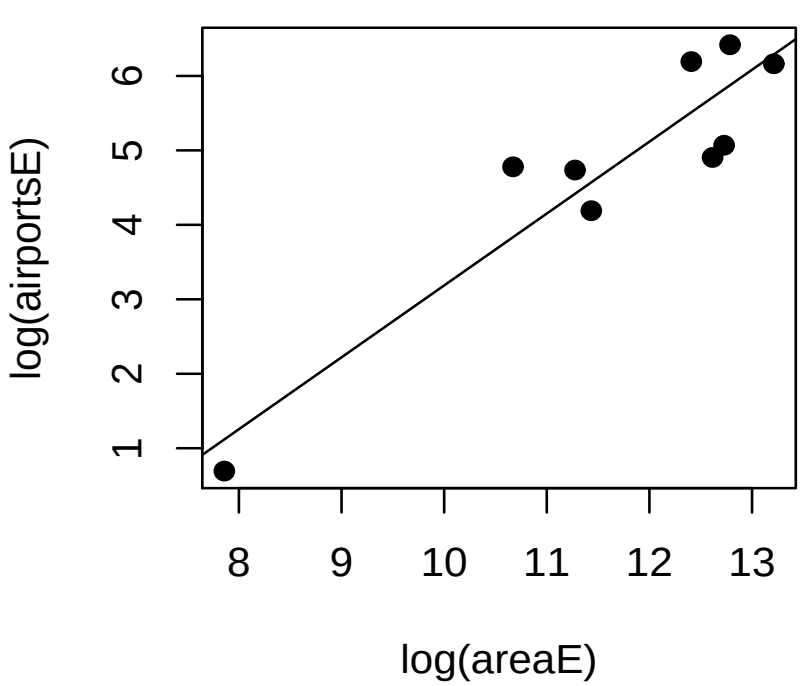


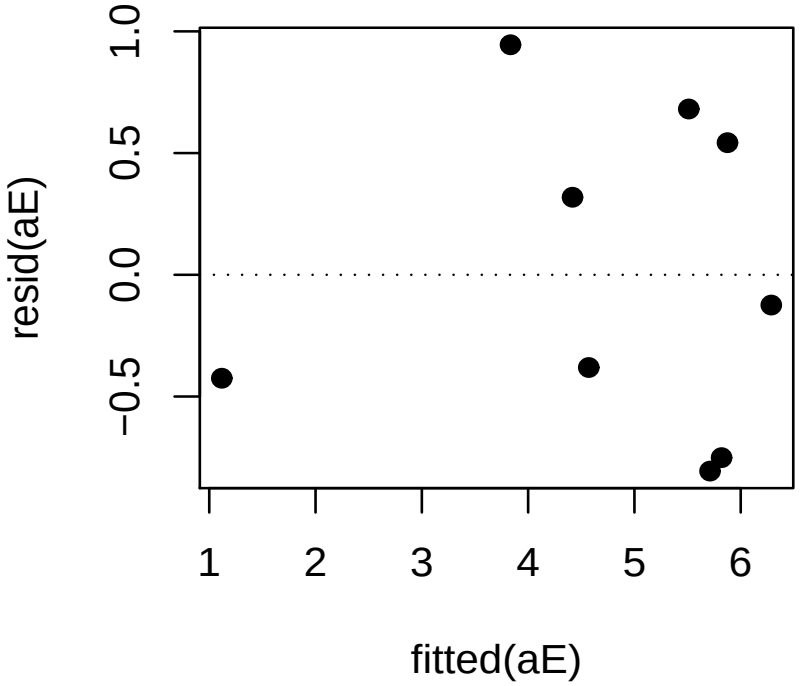
odlehlé pozorování (první pozorování daleko od vodorovné osy)



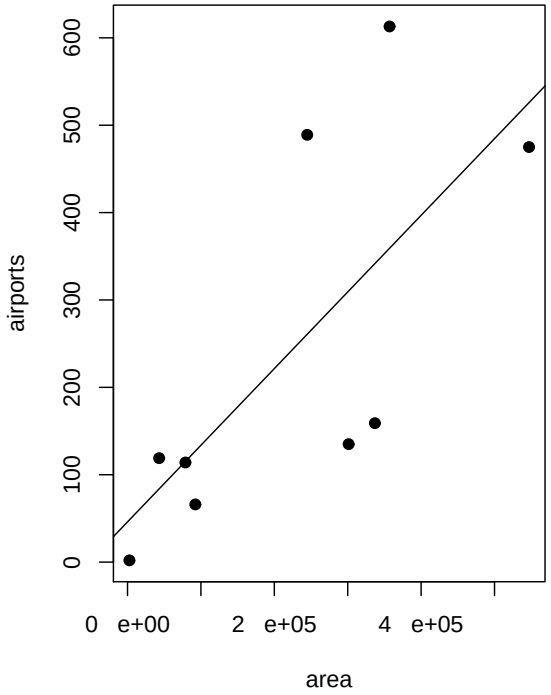


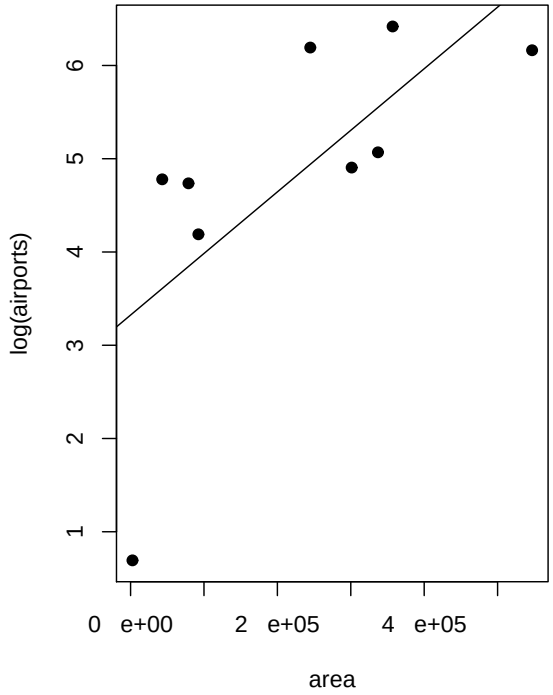
vlivné pozorování (první pozorování daleko ve vodorovném směru)

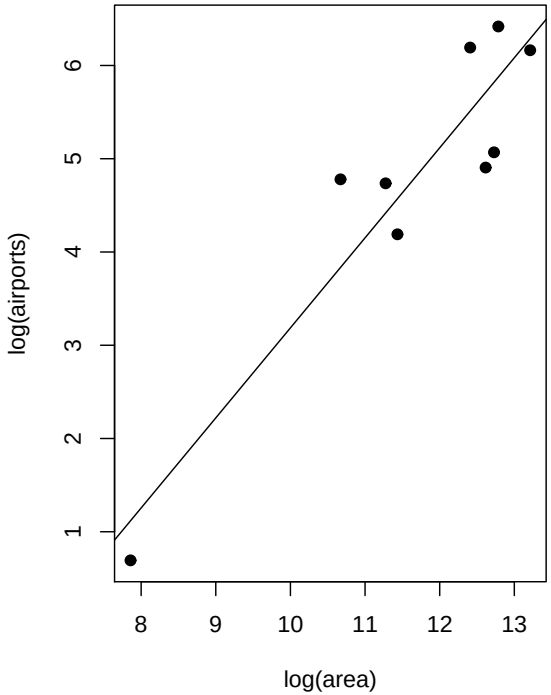


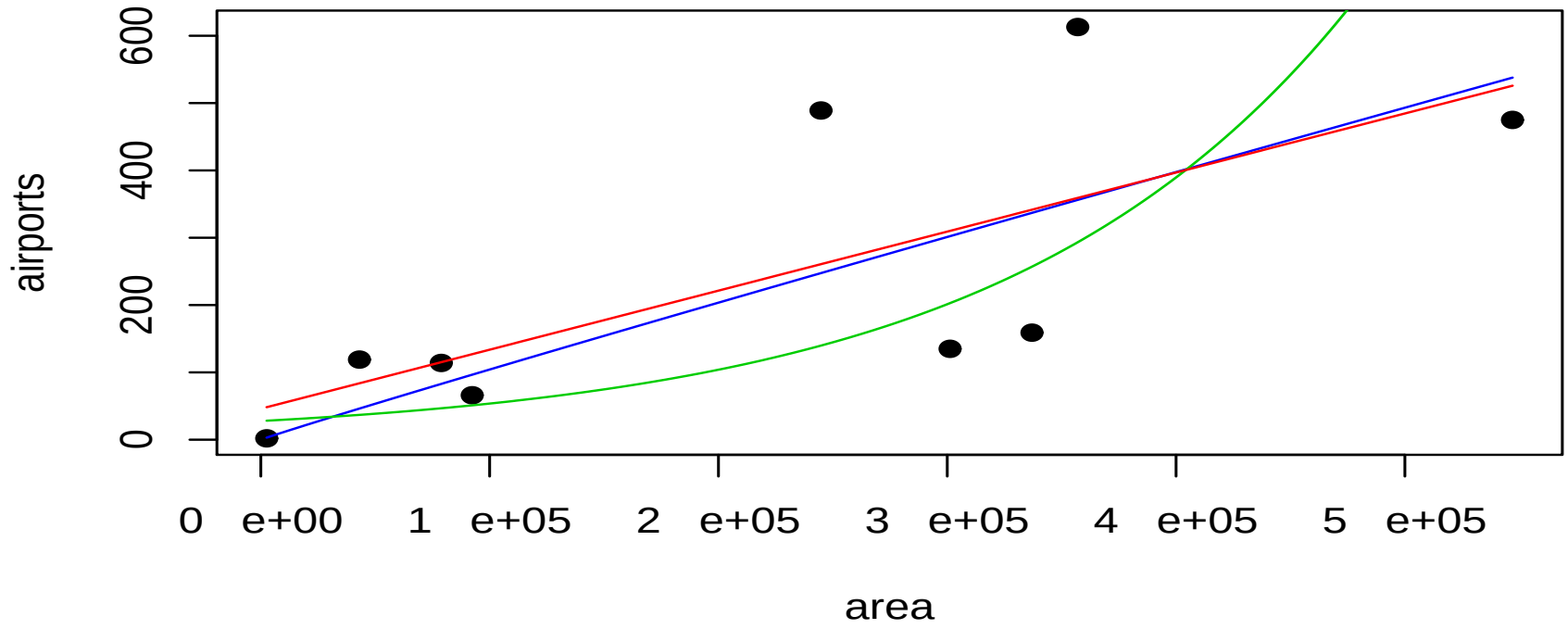


ukázka transformace: počet letišť na ploše evropského státu



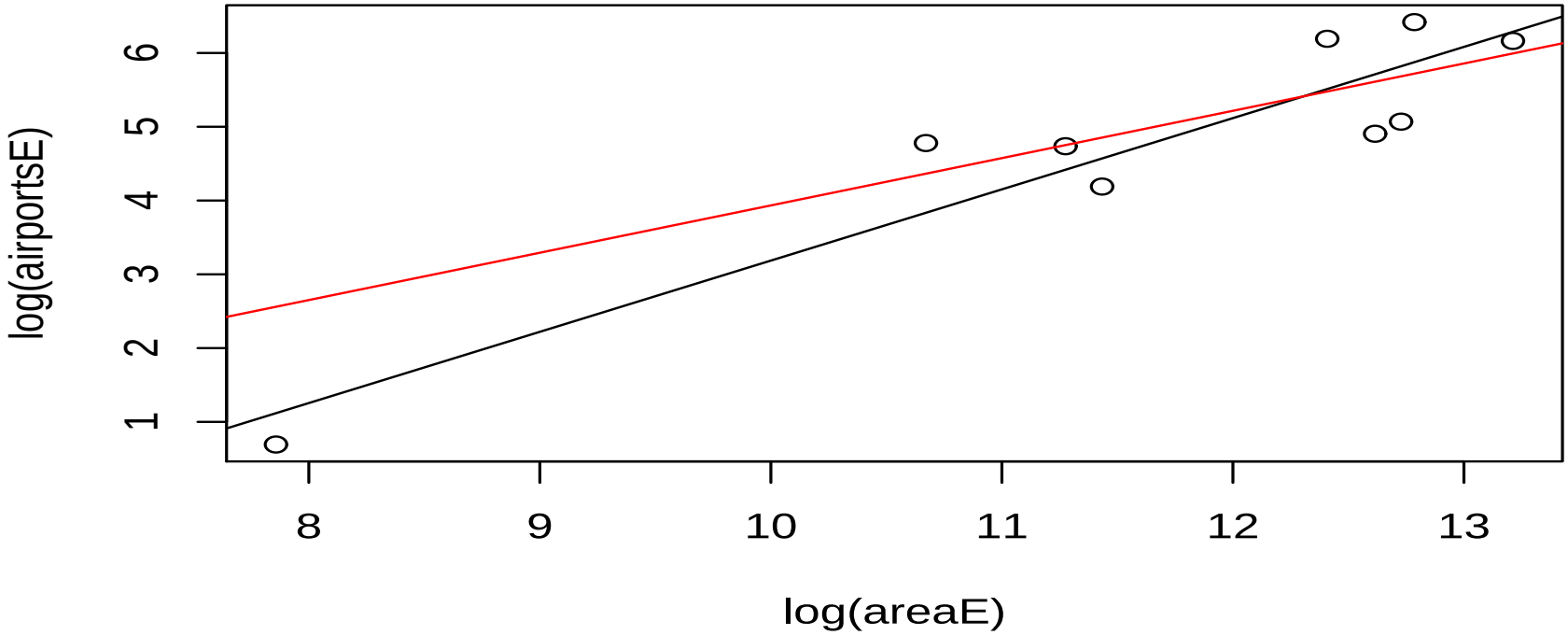




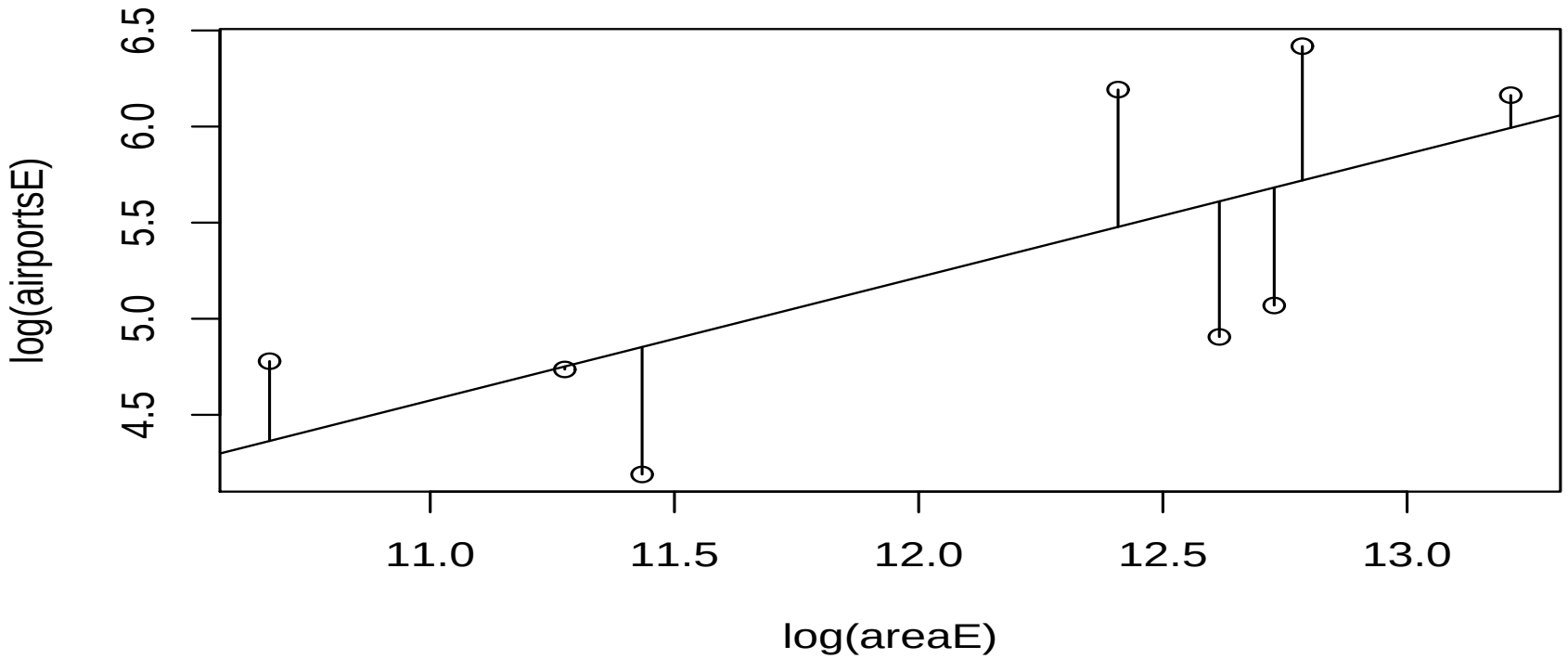


y=46+0,0009 x;log(y)=3,3+0,000007 x;log(y)=-6,5+0,97 log(x)
$R^2 = 51{,}4$ %; $R^2 = 48{,}0$ %; $R^2 = 86{,}1$ %

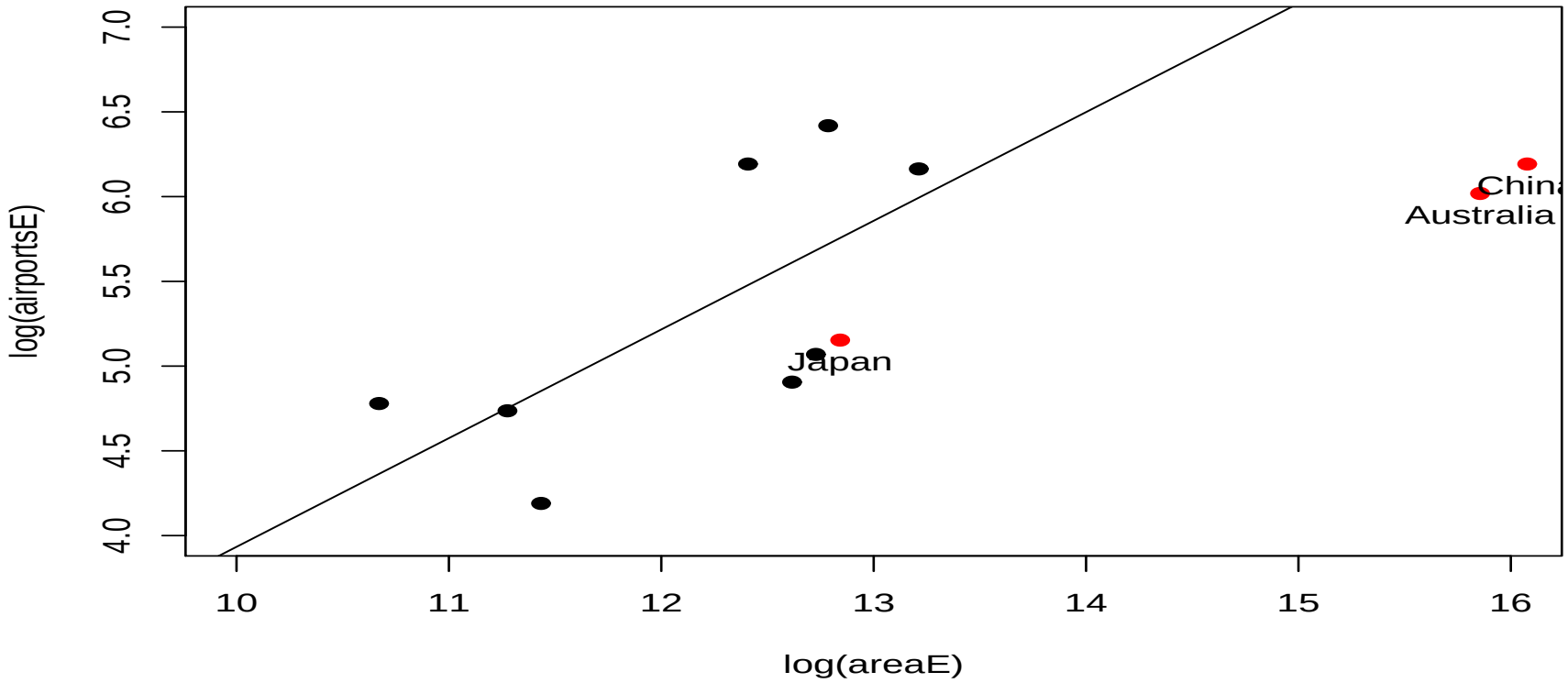
počet letišť: vynechat Lucembursko?



počet letišť: po vynechání Lucemburska



platí stejná závislost pro Japonsko, Čínu, Austrálii?



shrnutí

- regrese slouží pro
  - predikci (středních hodnot) budoucích pozorování
  - prokazování závislosti na zvoleném regresoru
  - ověřování modelu o závislosti

- nejsou-li splněny základní předpoklady $\Rightarrow$ pochybné závěry
  - obtížně lze predikovat mimo obor měření
  - je-li malé R^2, nespolehlivá předpověď, ale závislost může být prokazatelná
  - vysvětlovaná proměnná může záviset na více nezávisle proměnných, nutná opatrnost (confounding)

poznámky

- **souvislost regresní přímky a korelačního koeficientu:** testovou statistiku pro $\mathsf{H}_0 : \beta_1 = 0$ lze spočítat také jako

$$T = \frac{r_{xy}}{\sqrt{1 - r_{xy}^2}} \sqrt{n-2}$$

- je-li $|T|$ velké, závislost je prokázána, lze použít (nutno předpokládat normální rozdělení)

- metoda nejmenších čtverců je velmi citlivá na mimořádně umístěná pozorování

- příklad: počet letišť vers. velikost státu (obojí v logaritmech)
  - všech 9 států: r =0,717; T =2,720; p =3,0 %
  - bez Lucemburska: r =0,654; T =2,226; p =7,9 %

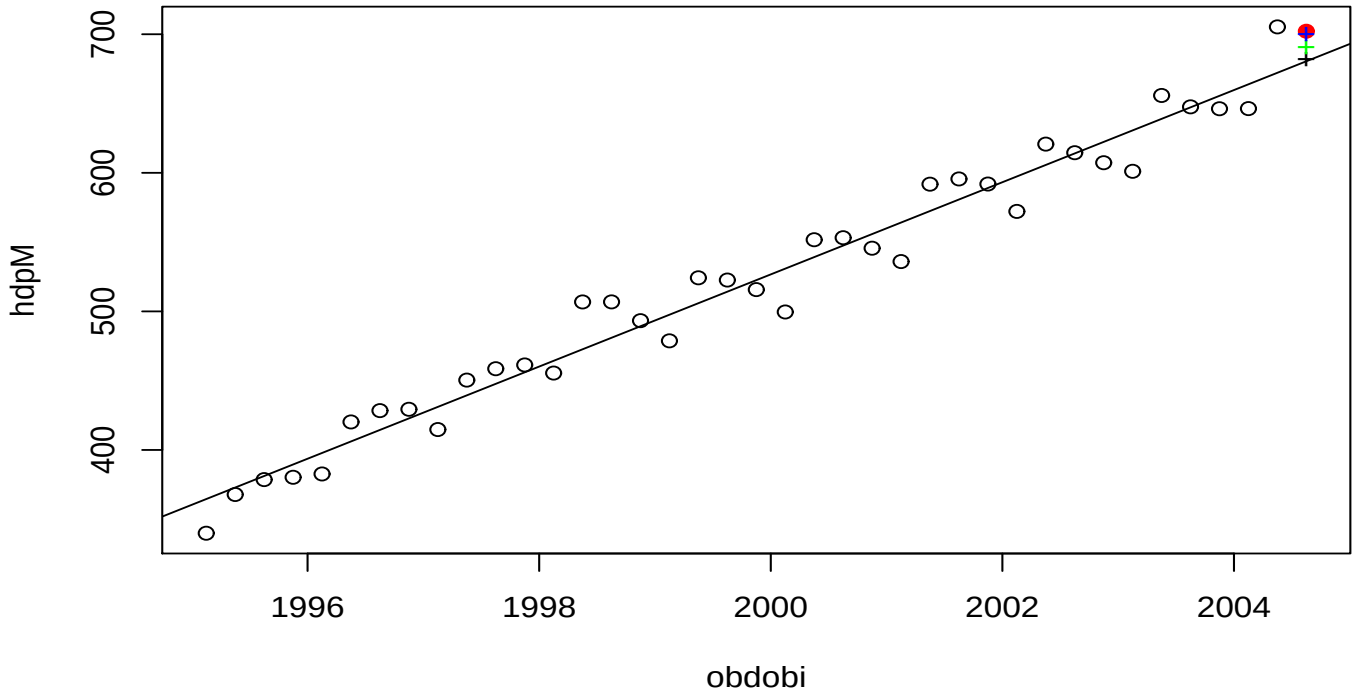
vyrovnávání

- mechanismus k vyhlazování dat, spíše technický
- cílem je např. nahradit nedostupné pozorování (budoucí pozorování – **predikce**, chybějící pozorování - **interpolace**) nebo odstranit nahodilé výkyvy
- často (náš příklad) porušen předpoklad nezávislosti pozorování, proto by obyčejná regrese vedla k nesprávnému odhadu přesnosti odhadů (příliš optimistické!) a tedy nesprávně počítala testy o parametrech
- koeficienty nelze snadno statisticky hodnotit, někdy vůbec
- nejen metoda nejmenších čtverců

časové řady

- spojitý znak měřený v pravidelných časových intervalech
- výsledná hodnota složena z několika složek
  - **trend** (dlouhodobý vývoj)
  - **sezónní složka** (periodická složka se známou periodou, např. denní/roční chod teplot, čtvrtletní chod ekonomických veličin)
  - **periodická složka** (s neznámou periodou)
  - **autokorelace** (chybové složky na rozdíl od regrese nejsou mezi sebou nezávislé)
- první dvě složky lze vedle regrese **odhalit** pomocí
  - klouzavých průměrů
  - exponenciálního vyrovnávání
- **prokázat** pomocí regrese, která přihlédne k autokorelaci . . .

příklad: HDP v ČR po čtvrtletích (běžné ceny)



ilustrativní příklad: HDP [miliard Kč]

- predikce pomocí regrese (bez kvartálů): 360,4 + 33,3 (rok-1995) pro 3. čtvrtletí 2004 tedy předpověď 680,5
- predikce pomocí regrese s ohledem na kvartály

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{HDP}} &= 339{,}4 + 33{,}1(\text{rok} - 1995) \\
\widehat{\text{HDP}} &= (339{,}4 + 38{,}5) + 33{,}1(\text{rok} - 1995) \\
\widehat{\text{HDP}} &= (339{,}4 + 30{,}2) + 33{,}1(\text{rok} - 1995) \\
\widehat{\text{HDP}} &= (339{,}4 + 18{,}1) + 33{,}1(\text{rok} - 1995)
\end{aligned}$$

  předpověď tedy 339,4 + 30,2 + 33,1 · (2004,625–1995) = 688,6
- predikce s ohledem na autokorelaci (odhad autokorelačního koeficientu $\hat{\rho}$ =0,59): 688,6 + 0,59 · 16,7 = 698,4
- skutečnost: 702,2

autokorelace, periodicita

- speciální postupy pro zbývající složky (periodická složka s neznámou periodou, autokorelace), nelze mechanicky použít lineární regresi či lineární vyhlazování
- náhodné (chybové) členy v regresním modelu by měly být nezávislé, někdy ale daný člen závisí na předchozím; síla závislosti popsána pomocí autokorelačního koeficientu ρ
  - kladné ρ: po sobě jdoucí členy podobné (častý případ)
  - záporné ρ: po sobě jdoucí členy nepodobné
  - $\rho = 0$: po sobě jdoucí členy nezávislé (v regresi se požaduje)
- autokorelaci a periodicitu lze prokazovat (odhadovat, hodnotit) až po odstranění trendu a sezónního kolísání

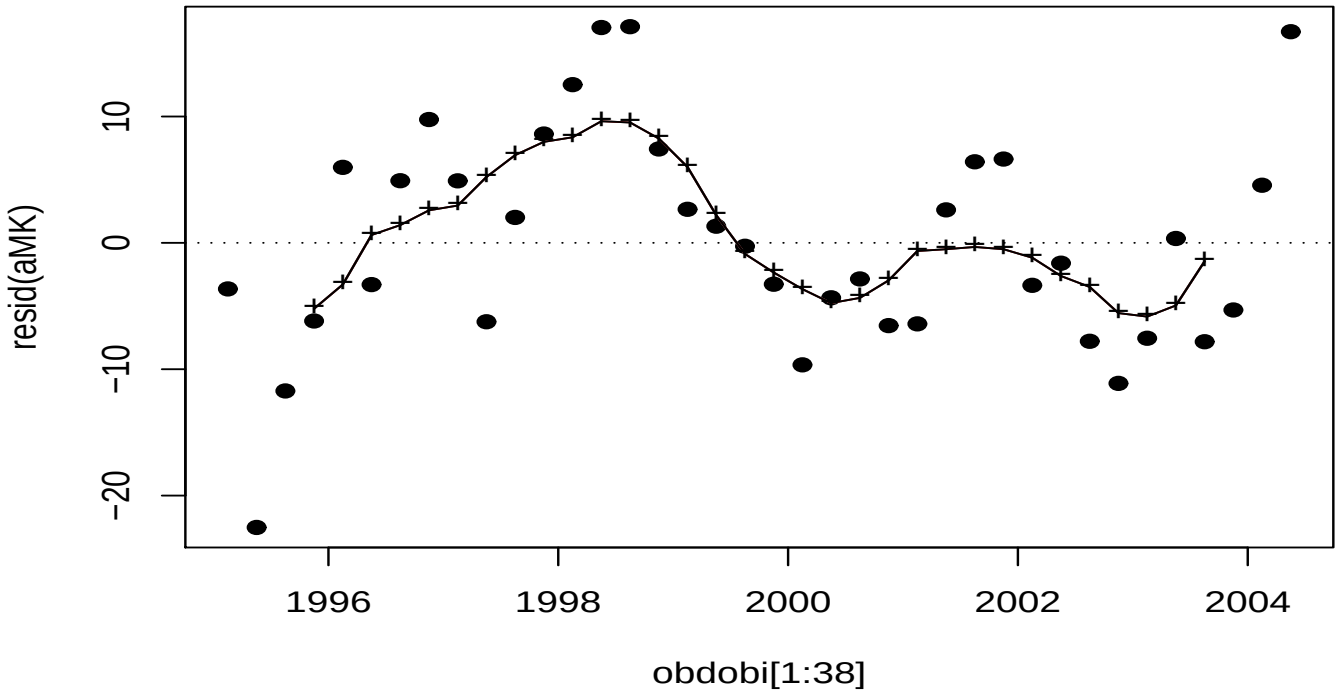
klouzavé průměry (moving averages)

- pozorování Y_i porovnáváme s průměrem z m sousedních pozorování (včetně Y_i samotného), např. pro $m = 5$

$$\frac{1}{5}(Y_{i-2} + Y_{i-1} + Y_i + Y_{i+1} + Y_{i+2})$$

- snaha vyhladit nahodilé výchylky, zachovat „průměrný“ vývoj
- vhodné zejména k interpolaci, k nalézání dosud přehlížených systematických vlivů
- u HDP vezmeme nejprve v úvahu lineární trend a čtvrtletní periodicitu, teprve pak počítáme rezidua (to, co nevysvětlíme lineárním trendem a čtvrtletními sezonními výkyvy)

příklad: klouzavé průměry reziduí (m =7)



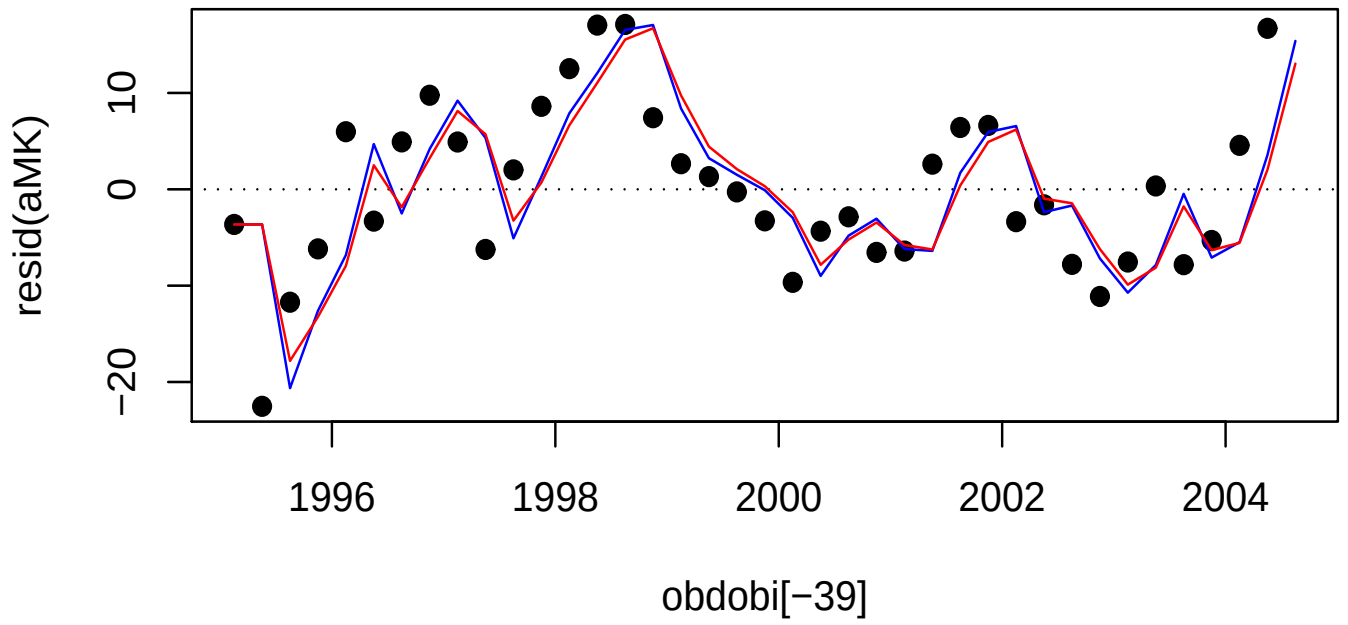
exponenciální vyrovnávání

- představa: v posledním pozorování se projevuje vliv všech předchozích
- tento vliv je postupně utlumován: největší vliv má bezprostředně předcházející pozorování, nejmenší vliv pozorování v čase nejvzdálenější
- vážený průměr mezi předpovědí předchozího pozorování a skutečným předchozím pozorováním

$$w\hat{Y}_{i-1} + (1-w)Y_{i-1}$$

- w – váha „historie“, čím je větší, tím méně kolísání
- použitelné k předpovědi

exponenciální vyrovnávání reziduí (704,0 pro w=0,1, 701,6 pro w=0,25)



multinomické rozdělení

- zobecnění binomického rozdělení na k-tici náhodných veličin $X_1, \ldots, X_k$
- parametry $n, \pi_1, \ldots, \pi_k$ $(0 < \pi_j < 1, \quad \pi_1 + \ldots + \pi_k = 1)$
- n **nezávislých** pokusů
- v každém pokusu **právě jeden** z k možných výsledků
- j-tý výsledek s pravděpodobností π_j
- X_j – počet pokusů, v nichž nastal j-tý možný výsledek, tedy nutně

$$X_1 + \ldots + X_k = n$$

příklady multinomického rozdělení

- předvolební průzkum
  - n – počet tázaných
  - π_j – skutečný podíl voličů j-té strany v populaci
  - X_j – počet (četnost) voličů j-té strany ve výběru
- hody hrací kostkou
  - n – počet hodů
  - $\pi_1, \ldots, \pi_6$ – pravděpodobnosti jednotlivých stran kostky
  - $X_1, \ldots, X_6$ – absolutní četnosti jednotlivých stran kostky

vlastnosti multinomického rozdělení

- každá složka má binomické rozdělení: $X_j \sim \text{bi}\big(n, \pi_j\big)$
- střední hodnota: $\mu_{X_j} = n\pi_j$, rozptyl: $\sigma^2_{X_j} = n\pi_j(1-\pi_j)$
- (pro zajímavost) kovariance: $\text{cov}(X_j, X_t) = -n\pi_j\pi_t \quad j \neq t$
- asymptotická vlastnost **chí-kvadrát** (velká n, $n\pi_j \geq 5$)

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(X_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j} \sim \chi^2_{k-1}}$$

- X_j – **empirické četnosti**,
  $n\pi_j$ – **očekávané (teoretické) četnosti**

příklad: hrací kostka A

- test **jednoduché** hypotézy
- $n =$ 100 hodů kostkou
- $X_1 = 12, X_2 = 21, X_3 = 14, X_4 = 15, X_5 = 21, X_6 = 17$
- hypotéza $H_0 : \pi_1 = \ldots = \pi_6 = 1/6$ dá očekávané četnosti
  $n\pi_1 = \ldots = n\pi_6 = 100/6 = 16{,}67$

$$\chi^2 = \frac{(12 - 16{,}67)^2}{16{,}67} + \ldots + \frac{(17 - 16{,}67)^2}{16{,}67} = 4{,}16 < \chi^2_5(0{,}05) = 11{,}07$$

$$p = 52{,}7\ \%$$

- [chisq.test(c(12,21,14,15,21,17),p=rep(1,6)/6)]

příklad: hrací kostka B (1)

- $n =$ 100 hodů kostkou
- $X_1 = 15, X_2 = 16, X_3 = 7, X_4 = 6, X_5 = 15, X_6 = 41$
- hypotéza $H_0 : \pi_1 = \ldots = \pi_6 = 1/6$ dá očekávané četnosti
  $n\pi_1 = \ldots = n\pi_6 = 100/6 = 16{,}67$

$$\chi^2 = \frac{(15 - 16{,}67)^2}{16{,}67} + \ldots + \frac{(41 - 16{,}67)^2}{16{,}67} = 48{,}32 > \chi^2_5(0{,}05) = 11{,}07$$

- zřejmě je nutno zamítnout hypotézu, že kostka je symetrická
- prokázali jsme na 5% hladině, že není symetrická

příklad: hrací kostka B (2), jiná H_0

- $n =$ 100 hodů kostkou
- $X_1 = 15, X_2 = 16, X_3 = 7, X_4 = 6, X_5 = 15, X_6 = 41$
- nulová hypotéza: $\pi_1 = \ldots = \pi_5 = 1/10, \pi_6 = 5/10 = 1/2$
- očekávané četnosti za hypotézy:
  $n\pi_1 = \ldots = n\pi_5 = 100/10 = 10, n\pi_6 = 100/2 = 50$

$$\chi^2 = \frac{(15-10)^2}{10} + \ldots + \frac{(15-10)^2}{10} + \frac{(41-50)^2}{50} = 12{,}72 > \chi^2_5(0{,}05) = 11{,}07$$

- zřejmě je nutno zamítnout i tuto hypotézu

[chisq.test(c(15,16,7,6,15,41),p=c(1,1,1,1,1,5)/10)]

příklad: hrací kostka B (3) (použít jen část informace)

- $n =$ 100 hodů kostkou
- $X_6 = 41$
- nulová hypotéza: $\pi_6 = 5/10 = 1/2$
- hypotéza o psti jediného z možných výsledků (pst šestky) – binomické rozdělení
- dříve jsme určili přibližný 95% interval spolehlivosti pro pravděpodobnost šestky: (0,31; 0,51)
- 1/2 je v tomto intervalu, na 5% hladine **nelze** zamítnout

[binom.test(41,100)]

test homogenity r výběrů

- například, zda mají kostky A, B stejné šestice psti
- $X_{i1}, \ldots, X_{ik}$ i-tý výběr z multinomického rozdělení s parametry $n_{i\bullet}, \pi_{i1}, \ldots, \pi_{ik} \qquad (i = 1, \ldots, r)$
- H_0 : pravděpodobnosti jsou ve všech srovnávaných populacích stejné: $\pi_{i1} = \pi_1, \ldots, \pi_{ik} = \pi_k$ (nezávisí na populaci)
- četnosti uspořádáme do kontingenční tabulky
  - n_{ij} – počet j-tých výsledků v i-tém výběru
  - $n_{i\bullet} = \sum_j n_{ij}$ jsou řádkové marginální četnosti (rozsahy výběrů)
  - $n_{\bullet j} = \sum_i n_{ij}$ jsou sloupcové marginální četnosti (četnosti možných výsledků bez ohledu na výběr)
  - $n = \sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j} = \sum_i \sum_j n_{ij}$ je celkový počet pozorování

test homogenity r výběrů

- neznámé pravděpodobnosti π_j odhadneme pomocí marginálních relativních četností $n_{\bullet j}/n$
- očekávané četnosti tak budou $o_{ij} = n_{i\bullet}\frac{n_{\bullet j}}{n} = \frac{n_{i\bullet}n_{\bullet j}}{n}$
- empirické četnosti porovnáme s četnostmi očekávanými

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_{ij} - o_{ij})^2}{o_{ij}}$$

- platí-li hypotéza, má výsledná statistika χ^2-rozdělení $\chi^2_{(r-1)(k-1)}$
- hypotézu o shodě pravděpodobností v r populacích zamítáme, je-li $\chi^2 \geq \chi^2_{(r-1)(k-1)}(\alpha)$

mají obě kostky stejné šestice pravděpodobností?

[chisq.test(rbind(kostkaA,kostkaB))]

- empirické četnosti (kontingenční tabulka)

A	12	21	14	15	21	17	100
B	15	16	7	6	15	41	100
	27	37	21	21	36	58	200

- očekávané četnosti (za hypotézy): 27·100/200=13,5, ...

A	13,5	18,5	10,5	10,5	18	29	100
B	13,5	18,5	10,5	10,5	18	29	100
	27	37	21	21	36	58	200

$$X^2 = \frac{(12-13{,}5)^2}{13{,}5} + \frac{(21-18{,}5)^2}{18{,}5} + \ldots + \frac{(41-29)^2}{29} = 18{,}13 > 11{,}07 = \chi^2_5(0{,}05)$$

hypotézu o shodě pstí na obou kostkách **zamítáme** ($p = 0{,}3\ \%$)

příklad – vzdělání matek (očekávané četnosti)

- kdyby rozdělení vzdělání bylo všude stejné, očekáváme tři možnosti v poměru 34:47:18 (marg. četnosti!), celkem 99
- pražských 70 matek by stejný poměr dalo při **očekávaných** četnostech 70·34/99=24,0, resp. 70·47/99=33,2 resp. 70·18/99=12,7
- podobně pro matky z venkova dostaneme 9,96, po zaokrouhlení 10,0, pro další četnosti 13,8 resp. 5,3

vzdělání	porodnice		celkem
	Praha	venkov	
základní	23	11	34
střední	30	17	47
VŠ	17	1	18
celkem	70	29	99

vzdělání	porodnice		celkem
	Praha	venkov	
základní	24,0	10,0	34
střední	33,2	13,8	47
VŠ	12,7	5,3	18
celkem	70	29	99

příklad: vzdělání matek [chisq.test(table(Porodnice,Vzdelani))]

porodnice	vzdělání			celkem
	základní	střední	VŠ	
Praha	23 (24,0)	30 (33,2)	17 (12,7)	70
venkov	11 (10,0)	17 (13,8)	1 (5,3)	29
celkem	34	47	18	99

- v závorce jsou očekávané četnosti za hypotézy, že podíly tří vzdělanostních skupin jsou v obou populacích shodné

$$\frac{(23-24)^2}{24}+\frac{(30-33{,}2)^2}{33{,}2}+\frac{(17-12{,}7)^2}{12{,}7}+\frac{(11-10)^2}{10}+\frac{(17-13{,}8)^2}{13{,}8}+\frac{(1-5{,}3)^2}{5{,}3}$$

$$\chi^2 = 6{,}12 > \chi^2_2(0{,}05) = 5{,}99, \qquad p = 4{,}7\ \%$$

- bylo třeba $o_{ij} \geq 5$ pro všechna i, j

test nezávislosti

- vyšetřujeme **současně** dva znaky v nominálním měřítku u n nezávislých statistických jednotek
- n_{ij} je počet jednotek, kde je současně i-tá hodnota prvního znaku a j-tá hodnota druhého znaku
- celkem je i-tá hodnota prvního znaku u $n_{i\bullet} = \sum_j n_{ij}$ jednotek, j-tá hodnota druhého znaku u $n_{\bullet j} = \sum_i n_{ij}$ jednotek
- kdyby byly znaky nezávislé, byl by pro každou hodnotu jednoho znaku poměr mezi četnostmi hodnot druhého znaku podobný, proto očekávané četnosti $o_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}$ (podmíněné psti stejné)
- výpočet χ^2 a jeho hodnocení stejné jako u homogenity

příklad: plánovaná těhotenství [chisq.test(table(Plan,Vzdelani))]

- u každé matky zjišťovány dva znaky: dosažené vzdělání, zda těhotenství plánováno

vzdělání	základní	střední	VŠ	celkem
neplánováno	20 (14,1)	16 (19,5)	5 (7,5)	41
plánováno	14 (19,9)	31 (27,5)	13 (10,5)	58
celkem	34	47	18	99

- všechny očekávané četnosti dostatečně velké

$$\chi^2 = 6{,}68 > 5{,}99 = \chi^2_2(0{,}05), \qquad p = 3{,}5\ \%$$

příklad: plánovaná těhotenství

- je souvislost mezi odpověďmi o plánovaném těhotenství a vzdělá-ním matek?

vzdělání	plánované		celkem
	ne	ano	
základní	20	14	34
střední	16	31	47
VŠ	5	13	18
celkem	41	58	99

vzdělání	plánované		celkem
	ne	ano	
základní	58,8 %	42,1 %	100 %
střední	34,0 %	66,0 %	100 %
VŠ	27,8 %	72,2 %	100 %
celkem	41,4 %	58,6 %	100 %

příklad: plánovaná těhotenství (očekávané četnosti)

vzdělání	plánované		celkem
	ne	ano	
základní	14,08	19,92	34
střední	19,46	27,54	47
VŠ	7,46	10,54	18
celkem	41	58	99

$$99 \cdot \frac{41}{99} \cdot \frac{34}{99} = \frac{41 \cdot 34}{99} = 14{,}08$$

$$99 \cdot \frac{58}{99} \cdot \frac{34}{99} = \frac{58 \cdot 34}{99} = 19{,}92$$

$$\chi^2 = \frac{(20-14{,}08)^2}{14{,}08} + \frac{(14-19{,}92)^2}{19{,}92} + \frac{(16-19{,}46)^2}{19{,}46} + \frac{(31-27{,}54)^2}{27{,}54} + \frac{(5-7{,}46)^2}{7{,}46} + \frac{(13-10{,}54)^2}{10{,}54} = 6{,}68$$

příklad: předvolební výzkum

30 voličů bylo dotázáno, které ze dvou stran dají přednost; souvisí odpovědi s pohlavím?

muž	strana		celkem
	A	B	
muž	**11**	**4**	15
žena	**6**	**9**	15
celkem	17	13	30

muž	strana		celkem
	A	B	
muž	73 %	27 %	100 %
žena	40 %	60 %	100 %
celkem	57 %	43 %	100 %

muž	strana		celkem
	A	B	
muž	65 %	31 %	50 %
žena	35 %	69 %	50 %
celkem	100 %	100 %	100 %

čtyřpolní tabulka

- obecné označení četností v čtyřpolní tabulce

a	b	$a+b$
c	d	$c+d$
$a+c$	$b+d$	n

- **sílu závislosti** lze měřit ϕ-koeficientem [phi coefficient] (čtyřpolním korelačním koeficientem)

$$\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

- ϕ je mezi −1 a 1
- např. pro

11	4	15
6	9	15
17	13	30

vyjde $\phi = \frac{11 \cdot 9 - 4 \cdot 6}{\sqrt{15 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 13}} = 0{,}34$

příklad: předvolební průzkum

- $\phi > 0$ znamená, že četnosti na hlavní diagonále (indexy 1,1 a 2,2) převládají nad četnostmi na vedlejší diagonále (indexy 1,2 a 2,1)
- v našem příkladu

muž	strana		celkem
	A	B	
muž	**11**	**4**	15
žena	**6**	**9**	15
celkem	17	13	30

vychází $\phi = 0{,}34 > 0$ (tedy kladné), protože je $11 \cdot 9 > 6 \cdot 4$

čtyřpolní tabulka – prokazování závislosti

- chí-kvadrát porovnávající teoretické a očekávané četnosti lze upravit na tvar

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = n \cdot \phi^2$$

- příklad (předvolební průzkum)

$$\chi^2 = \frac{30 \cdot (11 \cdot 9 - 4 \cdot 6)^2}{15 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 13} = 3{,}39 = 30 \cdot 0{,}34^2$$

- závislost jsme na 5% hladině neprokázali, neboť

$$3{,}39 < 3{,}84 = \chi^2_1(0{,}05)$$

čtyřpolní tabulka

[chisq.test(matrix(c(1097,1365,362,354),2,2),correct=FALSE)]

a	b	$a+b$
c	d	$c+d$
$a+c$	$b+d$	n

$$\chi^2 = \frac{n(a\cdot d - b\cdot c)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

úmrtí na vnější příčiny v roce 2003

příčina	muži	ženy	celkem
dopr. nehody	1097 (1130,3)	362 (328,7)	1459
sebepoškození	1365 (1331,7)	354 (387,3)	1719
celkem	2462	716	3178

$$\chi^2 = \frac{3178(1097\cdot 354 - 362\cdot 1365)^2}{1459\cdot 1719\cdot 2462\cdot 716} = 8{,}05 > \chi^2_1(0{,}05) = 3{,}84 \qquad p = 0{,}5\ \%$$

prokázali jsme neshodu mezi muži a ženami, souvislost s pohlavím vlastně prokázali neshodu podílů při nehodách (odhady 44,6 %, 50,6 %)

Simpsonův paradox dílčí tabulky mají závislost jiného směru, než jejich součet (zde bez ohledu na to, kde žijí)

venkov	A	B	celkem
muž	6	7	13
žena	2	3	5
celkem	8	10	18

ϕ=0,055

město	A	B	celkem
muž	5	2	7
žena	11	5	16
celkem	16	7	23

ϕ=0,027

celkem	A	B	celkem
muž	11	9	20
žena	13	8	21
celkem	24	17	41

ϕ=-0,07

kdyby byl stejný poměr mezi počtem mužů a počtem žen oslovených ve městě a na venkově, problém by nevznikl

doplněk: bodově-biseriální korelační koeficient

- dva nezávislé výběry, např. hoši $X_1, \ldots, X_{n_0}$ a dívky $X_{n_0+1}, \ldots, X_{n_0+n_1}$, vždy normální rozdělení jako pro dvouvýběrový t-test
- otázka: jak silně souvisí sledovaná vlastnost a pohlaví?
- označme pohlaví formálně $Y_i = 0$ pro chlapce a $Y_i = 1$ pro děvčata
- korelační koeficient $r_{X,Y}$ mezi těmito veličinami se dá zapsat také jako

$$r_{\text{bis}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_0}{S} \sqrt{\frac{n_0 n_1}{n(n-1)}}$$

- kde S je směrodatná odchylka spočítaná bez ohledu na pohlaví, $n = n_0 + n_1$ je celkový počet měření v obou výběrech