# Základy biostatistiky

(MS710P09)
ak. rok 2011/2012

Karel Zvára

karel.zvara@mff.cuni.cz
http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼zvara
katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK

(naposledy upraveno 14. května 2012)





- **cvičení na počítačích v B5**
  - od středy 22. února ve Viničné 7, 1. patro B5
  - nutno **zapsat se do paralelky** prostřednictvím SIS
  - zápočet za aktivní účast + odevzdávání souborů + písemky
  - nutno mít **aktivní účet v učebnách**, znát svoje heslo
  - volně šiřitelný program R (http://cran.r-project.org/)
- **zkouška v B5**
  - jen se zápočtem, přihlašování prostřednictvím SIS
  - kombinace písemného a ústního zkoušení
  - řešení úloh na počítači, **interpretace výsledků**
  - základy teorie (pojmy, metody a jejich volba, interpretace)
- **literatura**
  - K. Zvára: Biostatistika. Karolinum 1998,. . . , 2008
  - internetová stránka http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼zvara
- **konzultace** středa 8:00–9:00 v pracovně, I. patro K157, budova MFF, Sokolovská 83, Karlín (případně po předchozí dohodě jindy, třeba i jinde, např. v ÚAMVT, Albertov 6 nebo ráno před přednáškou v B7)





## tři části přednášky

spěcháme, máme o dvě přednášky méně než jindy!!

- popisná statistika
  - několika čísly vystihnout důležitou vlastnost
  - jednoduchým grafem vyjádřit důležitou vlastnost
  - porovnat soubory dat
- abstraktní pohled (teorie)
  - pravděpodobnost, Bayesův vzorec, náhodná veličina, distribuční funkce, střední hodnota, nezávislost
  - populace a výběr
  - **popisné statistiky jako odhady populačních parametrů**
  - interval spolehlivosti pro parametr
  - test statistické hypotézy
- některé metody (modely)
  - testy o jednom, dvou či několika výběrech
  - rozhodování o závislosti kvantitativních či kvalitativních znaků
- cílem jsou principy, pojmy, základní metody, nikoliv vzorečky





## cvičení

- příležitost **procvičit** pojmy a postupy
- k tomu je třeba **sledovat přednášku** aspoň orientačně
- doporučuji aktivně využít cvičení, spolupracovat s cvičícím, ověřit si tak pochopení principů
- u zkoušky však mechanická aplikace nestačí, je třeba vysvětlit **proč** byl zvolen nějaký postup, **co vyšlo**, **interpretovat výsledky**; také znát **pojmy**, jejich podstatné vlastnosti a interpretaci
- cvičící mají svoje stránky s podrobnějšími informacemi:
- **cvičení není náhradou přednášky!**
- používá se prostředí R, zejména nadstavba Rcmdr
  - nabízí řešení většiny reálných úloh
  - umožňuje modifikaci dosavadního postupu
  - poskytuje demonstrační pomůcky
  - volně šiřitelný SW
  - pracují v něm mnozí další učitelé

## statistika
nejzákladnější dělení, dvojí pohled

- **statistika**
  - **popisná** (deskriptivní):
    data stručně popsat, něco z dat „vydolovat“
    tvrdit něco o daných datech, nezobecňovat
  - **induktivní** (konfirmatorní):
    tvrdit něco nového, zobecnit na větší soubor,
    důležitá je interpretace
- **příklady dat**:
  - **výšky**: výška desetiletých chlapců/dívek
  - **děti**: pohlaví, porodní hmotnost a délka, hmotnost a délka v jednom roce, věk otce a matky, počet onemocnění otitidou v prvním roce věku
  - **kojení**: hmotnost a délka porodní a ve 24. týdnu, věk a výška obou rodičů, zda těhotenství plánováno, zda dudlík, porodnice





## co měříme (zjišťujeme) a kde

- měříme na **statistických jednotkách** (osoba, obec, stát, pokusné pole, rostlinka pšenice, třetí list rostlinky pšenice, ...)
- měříme (zjišťujeme) hodnoty **znaků**
- **znak** - vlastnost měřená na objektu (statistické jednotce)
- zjištěnou hodnotu vyjadřujeme ve zvoleném **měřítku** (stupnici)
- na jedné jednotce můžeme měřit několik znaků (umožní to vyšetřování závislosti)
- měříme na skupinách jednotek – **souborech**
- zajímají nás **hromadné** vlastnosti, které charakterizují celou velkou skupinu (**populaci**), ne jen právě změřené objekty
- hodnoty znaků zjišťujeme u jedinců,
  chceme vypovídat celých souborech jedinců
- Kolik procent mužů kouří? (nikoliv zda kouří Karel Zvára)





## měřítka

- **nula-jedničkové**
  pouze dvě možné hodnoty (muž/žena, kouří/nekouří)
- **nominální**
  seznam všech jednoznačně rozlišitelných hodnot,
  **faktor** (porodnice, pohlaví, odrůda)
- **ordinální**
  hodnoty nominálního měřítka jsou uspořádány,
  **uspořádaný faktor** (vzdělání matky, stupeň bolesti)
- **intervalové**
  stejné vzdálenosti sousedních hodnot (rok narození)
  „**o kolik** je $x$ menší než $y$“ (nikoliv „kolikrát“)
- **poměrové**
  srovnání se zvolenou jednotkou (hmotnost, výška, věk)
  „**kolikrát** je $x$ větší, než $y$“





## hrubší dělení měřítek
(důležitější, bezprostředně ovlivní volbu metod)

- **kvalitativní**
  nula-jedničkové, nominální, často i ordinální
- u kvalitativních se zpravidla udávají **četnosti** jednotlivých hodnot (kolikrát která hodnota nastala)
- **kvantitativní** (spojité)
  intervalové, poměrové, někdy ordinální (ale není spojité)
- hodnoty kvantitativních – čísla
- pro četnosti hodnot v kvalitativním měřítku se používají zpravidla jiné charakteristiky a metody, než pro hodnoty v kvantitativním měřítku

## veličina, statistika

- číselně vyjádřený výsledek měření, pokusu
- **spojitá veličina**: možné hodnoty znaků v intervalovém nebo poměrovém měřítku jsou hustě rozmístěné
- **diskrétní veličina**: četnosti hodnot znaků v nula-jedničkovém, nominálním (či ordinálním) měřítku
- u veličin používáme číselné charakteristiky některých hromadných vlastností (**charakteristiky polohy, charakteristiky variability**, charakteristiky tvaru)
- **statistika** (další význam) – funkce pozorovaných hodnot např. průměrná teplota nebo nejvyšší teplota v roce; číselně charakterizuje důležitou vlastnost veličiny (veličin), společná vlastnost skupiny statistických jednotek





## označení

rozlišujte $n$, $n_i$, $m$, $x_i$, $x_i^*$ (nemusí být čísla)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1,$ | $x_2,$ | $\ldots,$ | $x_n$ | zjištěné hodnoty |
| $x_1^*,$ | $x_2^*,$ | $\ldots,$ | $x_m^*$ | možné hodnoty (různé) |
| $n_1,$ | $n_2,$ | $\ldots,$ | $n_m$ | **četnosti** hodnot |

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = \sum_{j=1}^{m} n_j = n$$

$$\boxed{\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_m}{n} \quad \text{- \textbf{relativní} četnosti}}$$

$$\boxed{N_j = \sum_{i=1}^{j} n_i \quad \text{\textbf{kumulativní} četnosti}}$$

pro kumulativní četnosti nutno aspoň ordinální měřítko





## histogram (barplot u kvalitativní veličiny)

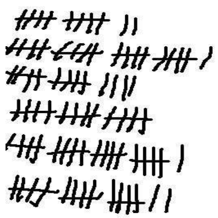
- **histogram**
  grafické znázornění intervalových četností spojité veličiny
- **barplot**
  grafické znázorněné četností (počtů hodnot) kvalitativního znaku
- plocha (výška) obdélníku úměrná četnosti
- relativní četnosti mají jen jiné měřítko svislé osy
- **výsečový diagram** pro relativní četnosti kvalitativního znaku (podíly nějakého celku)



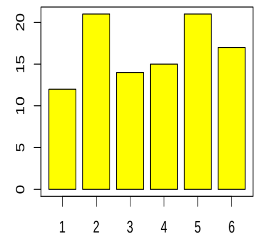


## příklad **hod kostkou A**

zpracování četností (kostka A), nominální měřítko s šesti hodnotami



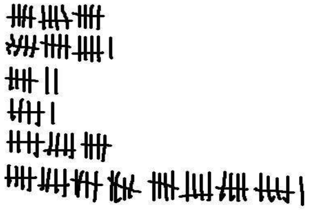
| $j$ | $n_j$ | $f_j = n_j/n$ |
|---|---|---|
| 1 | 12 | 0,12 |
| 2 | 21 | 0,21 |
| 3 | 14 | 0,14 |
| 4 | 15 | 0,15 |
| 5 | 21 | 0,21 |
| 6 | 17 | 0,17 |
| | $n = 100$ | 1,00 |

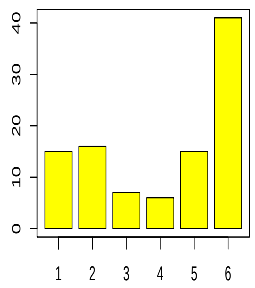


# příklad **hod kostkou** B

zpracování četností (kostka B), nominální měřítko s šesti hodnotami

| $j$ | $n_j$ | $f_j = n_j/n$ |
|---|---|---|
| 1 | 15 | 0,15 |
| 2 | 16 | 0,16 |
| 3 | 7 | 0,07 |
| 4 | 6 | 0,06 |
| 5 | 15 | 0,15 |
| 6 | 41 | 0,41 |
| | $n = 100$ | |









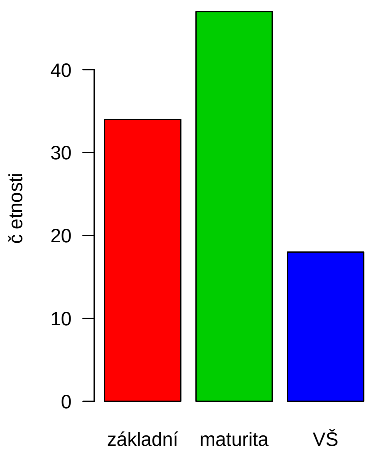

# příklad **kojení** (vzdělání 99 matek)

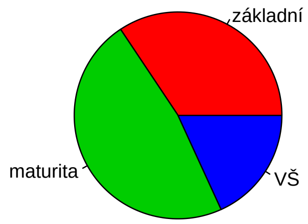
ordinální měřítko se třemi hodnotami

| vzděl. | zákl. | maturita | VŠ | celkem | pozn. |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_j^*$ | 1 | 2 | 3 | | možné hodnoty |
| $n_j$ | 34 | 47 | 18 | 99 | absolutní čet. |
| $n_j/n$ | 0,343 | 0,475 | 0,182 | 1,000 | relativní čet. |
| $n_j/n$ | 34,3 % | 47,5 % | 18,2 % | 100 % | relativní čet. |
| $N_j$ | 34 | 81 | 99 | | kumulativní čet. |












# histogram u **spojité** veličiny

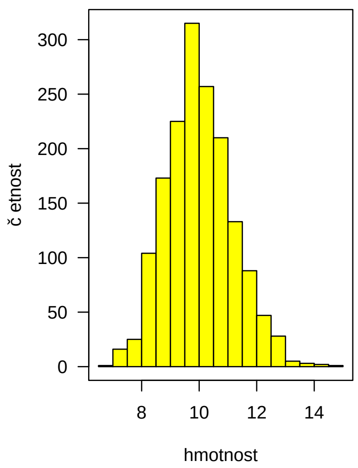
**třídění**: všechny hodnoty z daného intervalu $(t_{j-1}, t_j\rangle$ nahradíme prostřední hodnotou $x_j^* = (t_{j-1} + t_j)/2$

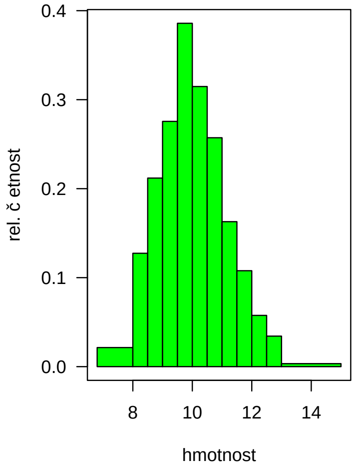
hmotnost dětí ve 12. měsíci (příklad **děti**, $n = 1633$)

| $j$ | $x_j^*$ | $t_j$ | $n_j$ | $n_j/n$ | $N_j$ | $N_j/n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7750 | 8000 | 42 | 0,026 | 42 | 0,026 |
| 2 | 8250 | 8500 | 104 | 0,063 | 146 | 0,089 |
| 3 | 8750 | 9000 | 173 | 0,106 | 319 | 0,195 |
| 4 | 9250 | 9500 | 225 | 0,138 | 544 | 0,333 |
| 5 | 9750 | 10000 | 315 | 0,193 | 859 | 0,526 |
| 6 | 10250 | 10500 | 257 | 0,157 | 1116 | 0,683 |
| 7 | 10750 | 11000 | 210 | 0,129 | 1326 | 0,812 |
| 8 | 11250 | 11500 | 133 | 0,081 | 1459 | 0,893 |
| 9 | 11750 | 12000 | 88 | 0,054 | 1547 | 0,947 |
| 10 | 12250 | 12500 | 47 | 0,029 | 1594 | 0,976 |
| 11 | 12750 | 13000 | 28 | 0,017 | 1622 | 0,992 |
| 12 | 13250 | $\infty$ | 11 | 0,007 | 1633 | 1,000 |

## histogram pro hmotnost v jednom roce

Svislá osa histogramu napravo popsána tak, aby vybarvená plocha byla rovna jedné.
Nepřehlédněte, že většina sloupků má šířku rovnou jedné polovině.








## variační řada, pořadí

nutno rozlišovat $x_i$ a $x_{(i)}$

- původní hodnoty spojité veličiny (kvantitativní znak)

  $x_1, x_2, \ldots, x_n$ např. 7, 4, 5, 4, 2
- **variační řada** [sort(x)]

  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \ldots \leq x_{(n)}$ např. 2, 4, 4, 5, 7
- **pořadí**: [rank(x)]
  na které místo ve variační řadě se dostane daná hodnota
  nejmenší dostane pořadí 1, druhá nejmenší dostane 2, ...
- je-li několik hodnot stejných, dostanou průměr
  z odpovídajících pořadí
- pořadí hodnot 7, 4, 5, 4, 2 jsou po řadě 5, 2,5, 4, 2,5, 1





## empirická distribuční funkce

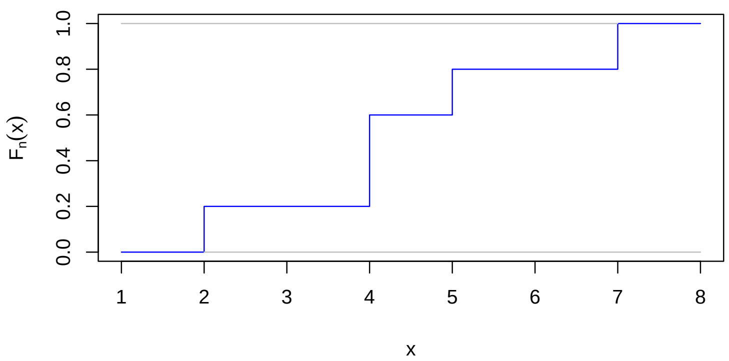
[empirical distribution function]

relativní četnost hodnot, které jsou menší nebo rovny $x$

jaká část dat je **nejvýše** $x$

$$\boxed{F_n(x) = \frac{\#(x_i \leq x)}{n}}$$

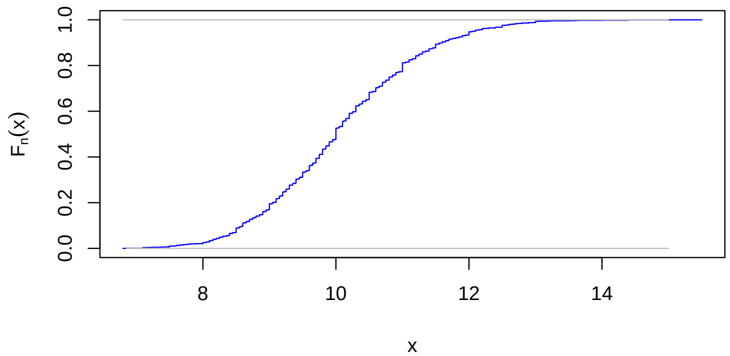
naše variační řada: 2, 4, 4, 5, 7








## empirická distribuční funkce




- příklad: váha dětí v jednom roce ($n = 1633$)
- připomíná hladkou neklesající funkci

## průměry

- **průměr** [mean(x)]

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- **vážený průměr** s využitím četností ($n = \sum_j n_j$)

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\left(n_1 x_1^* + n_2 x_2^* + \ldots + n_m x_m^*\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j x_j^*}$$

- obecněji s nezápornými vahami $w_j$ hodnot $x_j^*$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_j w_j x_j^*}{\sum_j w_j}}$$

[weighted.mean(x, w)]





## příklad: vážený průměr známek vážený kredity

jaký je nevážený průměr?

| známka | kreditů | součin |
|---|---|---|
| $x_j^*$ | $w_j$ | $x_j^* \cdot w_j$ |
| 1 | 6 | 6 |
| 2 | 4 | 8 |
| 2 | 2 | 4 |
| 3 | 4 | 12 |
| celkem | 16 | 30 |

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3}{6 + 4 + 2 + 4} = \frac{30}{16} = 1{,}875$$

[weighted.mean(x=c(1,2,2,3),w=c(6,4,2,4))]





## další míry polohy

opět jsou důležité závorky kolem indexů

- **medián** (**pro**střední hodnota, NIKOLIV *střední hodnota*)

$$\boxed{\tilde{x} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & n \text{ liché} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right) & n \text{ sudé} \end{cases}}$$

[median(x)]

- **minimum, maximum**

$$x_{\min} = x_{(1)} \qquad \text{[min(x)]}$$
$$x_{\max} = x_{(n)} \qquad \text{[max(x)]}$$

[range(x)] spočítá dvojici $(x_{\min}, x_{\max})$

- **variační průměr** [mean(range(x))]

$$\frac{1}{2}\left(x_{(1)} + x_{(n)}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{\min} + x_{\max}\right)$$





## kvartily, decily

- **medián** $\tilde{x}$ je číslo, které dělí data na dvě poloviny: hodnot menších nebo stejných jako medián – hodnot větších nebo stejných jako medián [median(x)] [quantile(x,probs=1/2)]
- **dolní kvartil** $Q_1$ je číslo, které oddělí čtvrtinu hodnot (menších či stejných jako $Q_1$) od tří čtvrtin hodnot (větších či stejných jako $Q_1$) [quantile(x,probs=1/4)]
- **horní kvartil** $Q_3$ je číslo, které oddělí tři čtvrtiny hodnot (menších či stejných jako $Q_3$) od čtvrtiny hodnot (větších či stejných jako $Q_3$) [quantile(x,probs=3/4)]
- **první decil** je číslo, které oddělí desetinu nejmenších hodnot od ostatních hodnot [quantile(x,probs=1/10)]
- **percentil** $x_p$ je číslo, které oddělí $100p$ % nejmenších hodnot od ostatních hodnot [quantile(x,probs=p)]
- několik percentilů současně [quantile(x,probs=(0:4)/4)]

## výpočet percentilu $x_p$ (fakultativně)

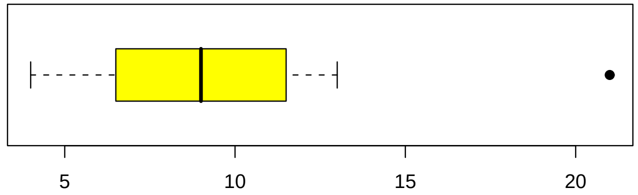
jedna z nejčastěji užívaných metod výpočtu percentilu, též v R

- k daným $n, p$ se najde celé číslo $k$ splňující
$$\frac{k-1}{n-1} \leq p < \frac{k}{n-1}$$
- tedy $k = \lfloor 1 + (n-1) \cdot p \rfloor$
($\lfloor x \rfloor$ znamená celou část z $x$, zaokrouhlí dolů)
- provede se lineární interpolace mezi $x_{(k)}$ a $x_{(k+1)}$
($\{x\}$ znamená zlomkovou část $x$, o kolik přesahuje celé číslo)
$$q = \{1 + (n-1) \cdot p\} = (1 + (n-1) \cdot p) - k$$
$$x_p = (1-q) \cdot x_{(k)} + q \cdot x_{(k+1)}$$
- např. pro $n = 99, p = 0{,}25$ bude
$$k = \lfloor 1 + (99-1) \cdot 0{,}25 \rfloor = \lfloor 25{,}5 \rfloor = 25, \quad q = 25{,}5 - 25 = 0{,}5$$
$$Q_1 = x_{0{,}25} = (1-0{,}5) \cdot x_{(25)} + 0{,}5 \cdot x_{(26)}$$





## krabicový diagram




[boxplot(c(4,5,8,9,10,13,21),horizontal=TRUE,col=7,pch=16)]
znázorněna řada statistik pro data: 4, 5, 8, 9, 10, 13, 21

- medián ($\tilde{x} = 9$) – příčka obdélníka
- kvartily ($Q_1 = 6{,}5$, $Q_3 = 11{,}5$) – kratší strany obdélníka
- tykadla od kvartilu k minimu (maximu), pokud není odlehlé
- odlehlé pozorování – je dál, než $3/2 \cdot (Q_3 - Q_1)$ $(= 7{,}5)$ od bližšího kvartilu





## vlastnosti míry polohy

- přičteme-li ke každé hodnotě $x$ stejnou konstantu $a$, musíme tutéž konstantu $a$ přičíst k průměru (mediánu, kvartilu, ...)
- vynásobíme-li každou hodnotu $x$ stejnou kladnou konstantou $b$, musíme průměr (medián, kvartil, ...) vynásobit totéž konstantou $b$
- pro dobrou míru polohy $\mu(X)$ platí:
$$\mu(a + X) = a + \mu(X)$$
$$\mu(b \cdot X) = b \cdot \mu(X) \qquad (b > 0)$$
- dobrá míra polohy je citlivá vůči posunutí (pozná změnu úrovně) i vůči změně měřítka (např. přechod od g ke kg)





## míry variability

- míra variability $\sigma(x)$ číselně charakterizuje jinou vlastnost, než míry polohy, proto na poloze **nesmí záviset**
- ukazuje nakolik jsou zjištěné hodnoty nestejné, velikost jejich kolísání, jejich **variabilitu**
- pro dobrou míru variability $\sigma(X)$ platí:
$$\sigma(a + X) = \sigma(X) \qquad \text{rozdíl proti míře polohy!!!}$$
$$\sigma(b \cdot X) = b \cdot \sigma(X) \qquad b > 0$$
- přičtení konstanty $a$ míru variability nezmění, na vynásobení kladnou konstantou $b$ reaguje

## směrodatná odchylka, rozptyl

- **rozptyl** (variance, $s^2_{b\cdot x} = b^2 s^2_x$) $\boxed{s^2_x = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ [var(x)]
- např. pro data: 4, 5, 8, 9, 10, 13, 21 dostaneme $\bar{x} = 10$, tedy

$$s^2_x = \frac{1}{7-1}\left((4-10)^2 + (5-10)^2 + \ldots + (21-10)^2\right) = \frac{196}{6}$$

- **směrodatná odchylka** [standard deviation]

$$\boxed{s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$ [sd(x)]





## další míry variability

- **rozpětí** $R = x_{\max} - x_{\min}$ [range]
- **kvartilové rozpětí** $\boxed{R_Q = Q_3 - Q_1}$ [interquartile range]
- **variační koeficient** (nesplňuje ani jeden požadavek) slouží k porovnání variability při různých úrovních [coefficient of variation]

$$\boxed{V_x = \frac{s_x}{\bar{x}}}$$

- **entropie** (pro nominální, požadavky nemají smysl, nezávisí na označení hodnot, jen na jejich relativních četnostech) [entropy]

$$H = -\sum_{j=1}^{m}\frac{n_j}{n}\ln\frac{n_j}{n}$$





## příklad ICHS: vztah mužů ke kouření

| | vztah ke kouření | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vzděl. | nekuřák/bývalý | | střední | | silný | | celk. | $H$ |
| zákl. | 25 | 21,4 % | 14 | 12,0 % | 78 | 66,7 % | 117 | 0,854 |
| odb. | 83 | 28,0 % | 24 | 8,1 % | 189 | 63,9 % | 296 | 0,847 |
| stř. | 99 | 33,2 % | 24 | 8,1 % | 175 | 58,7 % | 298 | 0,882 |
| VŠ | 115 | 48,3 % | 17 | 7,1 % | 106 | 44,5 % | 238 | 0,900 |

muži se základním vzděláním:

$$H = -\left(\frac{25}{117}\ln\frac{25}{117} + \frac{14}{117}\ln\frac{14}{117} + \frac{78}{117}\ln\frac{78}{117}\right) = 0{,}854123$$

větší vyrovnanost $\Rightarrow$ větší entropie

maximum pro $n_1 = n_2 = n_3$ vyjde $H = \ln(3) = 1{,}098612$





## *z*-skóry

- ***z*-skóry** (normovaná veličina)

$$\boxed{z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n}$$ [(x-mean(x))/sd(x)]

- hodnoty $z_1, z_2, \ldots, z_n$ „ztratily“ informaci o poloze a variabilitě, vždy platí $\bar{z} = 0, \quad s_z = 1$
- přičtení konstanty ani násobení konstantou *z*-skóry nezmění
- hodnocení vlastností nezávislých na poloze a variabilitě
- pro data: 4, 5, 8, 9, 10, 13, 21 platí $\bar{x} = 10, s_x = 5{,}715$
- proto dostaneme

$$z_1 = \frac{4-10}{5{,}715} = -1{,}050, \ldots, z_7 = \frac{21-10}{5{,}715} = 1{,}925$$

## šikmost, špičatost

- **šikmost** (průměr 3. mocnin $z$-skórů)

$$g_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s_x}\right)^3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{s_x^3}$$

[mean(((x-mean(x))/sd(x))^3)]

- **špičatost** (průměr 4. mocnin $z$-skórů zmenšený o 3)

$$g_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^4 - 3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s_x}\right)^4 - 3$$

[mean(((x-mean(x))/sd(x))^4)-3]

- $g_1, g_2$ se používají k posouzení normality
- pro data: 4, 5, 8, 9, 10, 13, 21 dostaneme

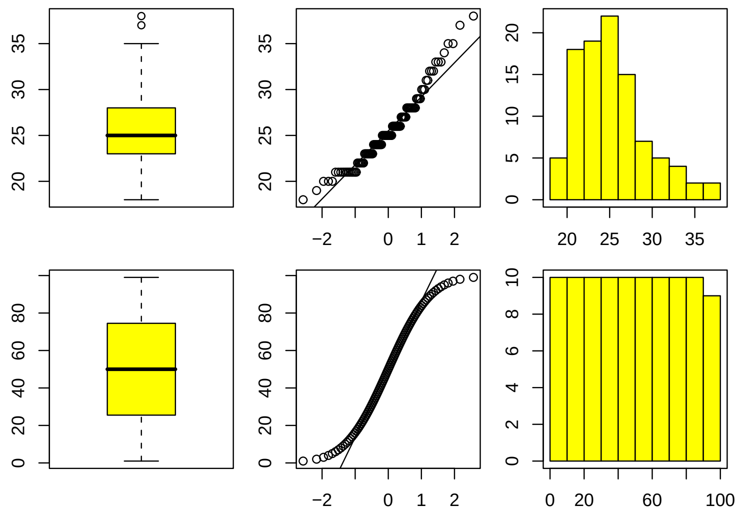
$$g_1 = 0{,}771 \qquad g_2 = -0{,}770$$





## příklad: věk matky, čísla 1 až 99

věk matek: $g_1 = 0{,}741$, $g_2 = 0{,}220$ čísla 1 až 99: $g_1 = 0$, $g_2 = -1{,}236$








## normální diagram

[(normal) probability plot], [quantile-comparison plot]

- k ověřování předpokladu **normálního** rozdělení
- porovnává skutečnou variační řadu s ideální variační řadou normálního (Gaussova) rozdělení
- v ideálním případě body téměř na přímce
- systematická odchylka ukazuje na rozdělení, které není normální
- konvexní či konkávní průběh – nesymetrie (nenulová šikmost)
- esovitý průběh – nenulová špičatost
- [qqnorm(x)]
- přímku vloží [qqline(x)]





## závislost dvojice znaků

- možnost zkoumání závislosti dvou znaků
- způsob znázornění (prokazování) závisí na měřítcích znaků
- **kvantitativní – kvantitativní**
  rozptylový (bodový) diagram [scatter plot]
  korelace, regrese [correlation, regression]
- **kvantitativní - kvalitativní**
  krabicový diagram [box-plot]
  $t$-test, ANOVA
- **kvalitativní - kvalitativní**
  kontingenční tabulka [contingency table]
  chí-kvadrát test, Fisherův exaktní test

## kvantitativní – kvantitativní

- pokud záleží na směru závislosti, pak vysvětlovanou (**závisle proměnnou**) veličinu umístíme na svislou osu $y$
- **korelační koeficient** vyjadřuje sílu a směr **vzájemné** závislosti

$$\boxed{r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}}, \quad \text{kde} \quad s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- [cor(x,y)] [correlation coefficient]
- $s_{xy}$ – výběrová **kovariance** [covariance]
- pomocí $z$-skórů (nezávislost na poloze a měřítku)

$$\boxed{r_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)}$$

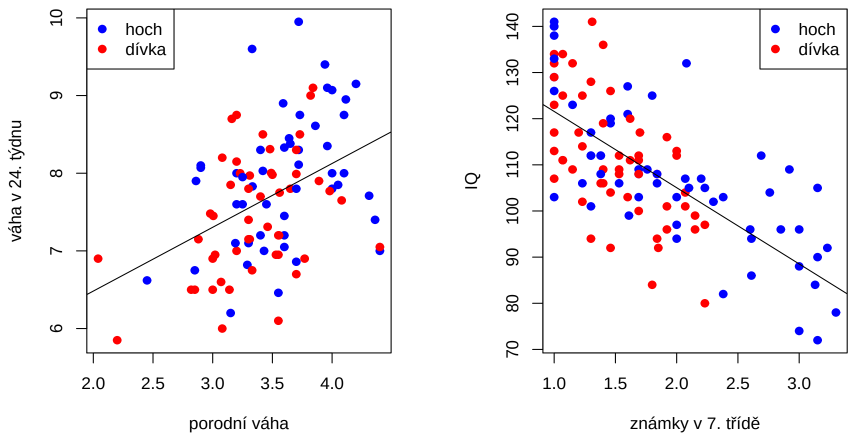
- pro $r_{xy} > 0$ s rostoucím $x$ v průměru roste $y$
  pro $r_{xy} < 0$ s rostoucím $x$ v průměru klesá $y$ $\boxed{-1 \le r_{xy} \le 1}$
  nezávislosti odpovídají hodnoty $r_{xy}$ blízké nule





## kvantitativní – kvantitativní, příklady

vlevo – závislost váhy v 24. týdnu na porodní váze s rozlišením pohlaví (data: Kojení)
vpravo – závislost IQ na průměrné známce v 7. třídě (data: Iq3)




$r = 0{,}429$ $r = -0{,}689$



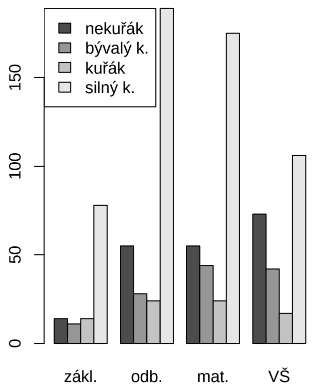


## příklad: kouření u mužů

data: Ichs

| vzdělání | zákl. | odb. | mat. | VŠ | celk. |
|---|---|---|---|---|---|
| nekuřák | 14 | 55 | 55 | 73 | 197 |
| bývalý k. | 11 | 28 | 44 | 42 | 125 |
| kuřák | 14 | 24 | 24 | 17 | 79 |
| silný k. | 78 | 189 | 175 | 106 | 548 |
| celkem | 117 | 296 | 298 | 238 | 949 |

v grafu znázorněny **absolutní** četnosti (sdružené, marginální četnosti)
[barplot(t,beside=TRUE)]







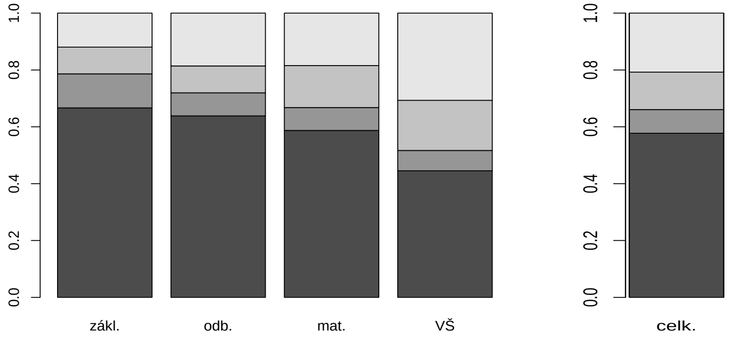

## kvalitativní – kvalitativní

- **kontingenční tabulka** [contingency table]
  obsahuje přehledně zapsané úplné údaje
- sdružené četnosti jednotlivých kombinací hodnot dvou znaků
- marginální četnosti:
  - **řádkové** marginální četnosti: součty sdružených četností v jednotlivých řádcích (pro jednotlivé hodnoty řádkového znaku)
  - **sloupcové** marginální četnosti: součty sdružených četností v jednotlivých sloupcích (pro jednotlivé hodnoty sloupcového znaku)
- [table(F,G)] nebo [xtabs($\sim$ F + G)]
  resp. [xtabs($\sim$ F + G , data=DataFrame)]
  kde F a G jsou v R faktory, DataFrame je databáze

## příklad: kouření u mužů

podmíněné relativní četnosti marginální relativní četnosti

| vzdělání | zákl. | odb. | mat. | VŠ | celk. |
|---|---|---|---|---|---|
| nekuřák | 12,0 % | 18,6 % | 18,5 % | 30,7 % | 20,8 % |
| bývalý k. | 9,4 % | 9,5 % | 14,8 % | 17,6 % | 13,2 % |
| kuřák | 12,0 % | 8,1 % | 8,1 % | 7,1 % | 8,3 % |
| silný k. | 66,7 % | 63,9 % | 58,7 % | 44,5 % | 57,7 % |
| celkem | 100 % | 100 % | 100 % | 100 % | 100 % |








## relativní četnosti v kontingenční tabulce

- **řádková procenta** (relativní četnosti v daném řádku)
  - podíl jednotlivých hodnot sloupcového znaku pro danou hodnotu řádkového znaku
  - **podmíněné rozdělení** hodnot sloupcového znaku pro danou hodnotu řádkového znaku
- **sloupcová procenta** (relativní četnosti v daném sloupci)
  - podíl jednotlivých hodnot řádkového znaku pro danou hodnotu sloupcového znaku
  - **podmíněné rozdělení** hodnot řádkového znaku pro danou hodnotu sloupcového znaku
- **nezávislosti** obou znaků odpovídá situace, kdy jsou např. sloupcová procenta pro všechny hodnoty sloupcového znaku podobné; podobně pro řádková procenta

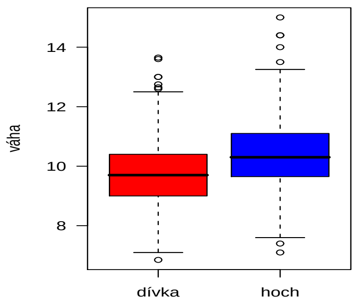


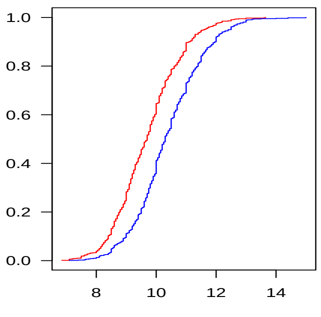


## kvantitativní – kvalitativní

váha v jednom roce podle pohlaví, data: Deti1633

- lze chápat jako závislost spojité veličiny na kvalitativní
- srovnání souborů dat (spojitá veličina)
- krabicové diagramy resp. empirické distribuční funkce
- příklad: hmotnost chlapců a dívek v jednom roce
- **nezávislosti** odpovídá podobné umístění krabic resp. empirických distribučních funkcí



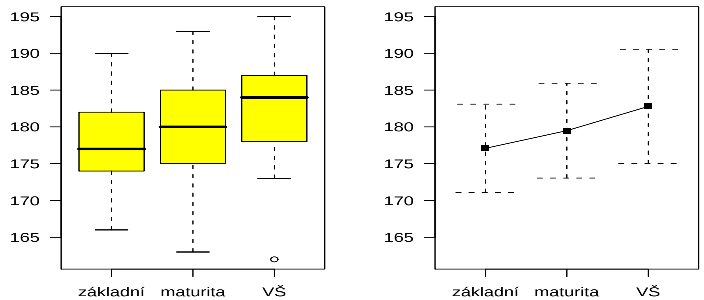




## příklad: závislost výšky otce na vzdělání matky

data: Kojení

- porovnáme výšky otců ve skupinách podle vzdělání matky
- napravo znázorníme průměry a směrodatné odchylky
- intervaly kolem průměru mívají i jinou interpretaci (jsou jiné)



## Náhodné jevy

- **náhodný pokus** výsledek předem neurčitý
- předpokládá se **stabilita relativních četností** možných výsledků, která s nezávislými opakováními pokusu roste
- **náhodný jev** tvrzení o výsledku náhodného pokusu (podmnožina množiny $\Omega$)
- **jistý jev** $\Omega$ nastává vždy
- **nemožný jev** $\emptyset$ nenastává nikdy
- **podjev**: $B \subset D$ znamená $B \Rightarrow D$
- **jev opačný**: $\overline{D} \Leftrightarrow$ neplatí $D$
- **průnik jevů** $B \cap D$ nastaly oba jevy
- **sjednocení jevů** $D \cup B$ nastal **aspoň** jeden
- **neslučitelné jevy** $B \cap D = \emptyset$

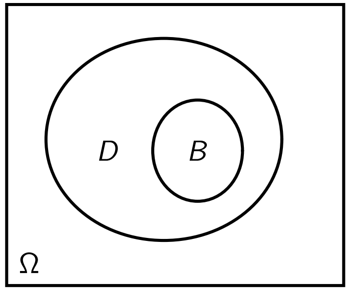




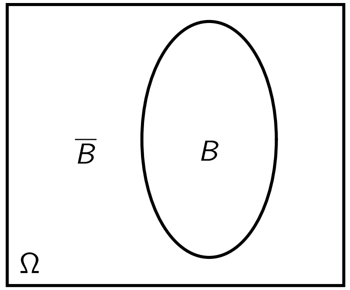
## znázornění pomocí Vennova diagramu

celý obdélník – jev jistý

$B \subset D \Rightarrow \mathrm{P}(B) \leq \mathrm{P}(D)$




$\mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \mathrm{P}(B)$

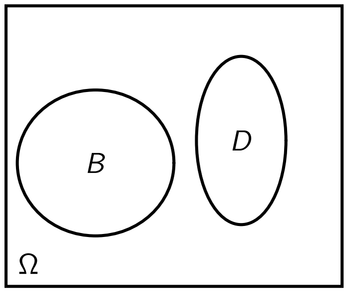



velikost plochy odpovídá pravděpodobnosti

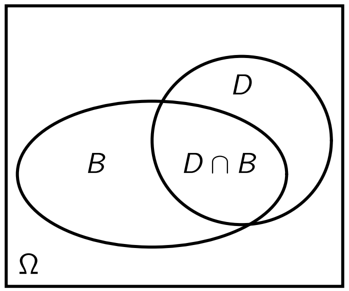




$B \cap D = \emptyset \Rightarrow$
$\mathrm{P}(B \cup D) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(D)$




obecně platí
$\mathrm{P}(B \cup D) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(D) - \mathrm{P}(B \cap D)$




velikost plochy odpovídá pravděpodobnosti





## pravděpodobnost

- objektivní číselné vyjádření „naděje“, že nastane jev $B$
- modelový protějšek relativní četnosti
- pravděpodobnost (pst) by měla mít stejné vlastnosti jako relativní četnost:
  - $\boxed{0 \leq \mathrm{P}(B) \leq 1}$
  - $\boxed{\mathrm{P}(\Omega) = 1, \mathrm{P}(\emptyset) = 0}$
  - $\boxed{B \cap D = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P}(B \cup D) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(D)}$ (**sčítání pravděpodobností**)
  - $\boxed{\mathrm{P}(B \cup D) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(D) - \mathrm{P}(B \cap D)}$
  - $\boxed{B \subset D \Rightarrow \mathrm{P}(B) \leq \mathrm{P}(D)}$
  - $\boxed{\mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \mathrm{P}(B)}$

## klasická definice pravděpodobnosti

- **klasická definice psti**
  - $m$ **stejně pravděpodobných** elementárních jevů $\omega_1, \ldots, \omega_m$
  - jsou neslučitelné, sjednocení všech je jistý jev
  - $m_B$ elementárních jevů **příznivých jevu** $B$ (tj. takových $\omega_i$, že $\omega_i \in B$, je právě $m_B$)

$$\boxed{\mathrm{P}(B) = \frac{m_B}{m}}$$

- **příklad**
  - hází se dvěma kostkami (modrá, zelená)
  - $B$ – součet aspoň 10

$$m = 6 \cdot 6 = 36; \quad m_B = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(B) = \frac{6}{36}$$

příznivé možnosti: (6,4), (6,5), (6,6), (5,5), (5,6), (4,6)





## kombinační číslo

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$
- kolika způsoby lze z $n$ rozlišitelných objektů vybrat nějakých $k$ objektů *bez ohledu na pořadí*
- kolika způsoby lze z 5 studentů vybrat trojici na přezkoušení?

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

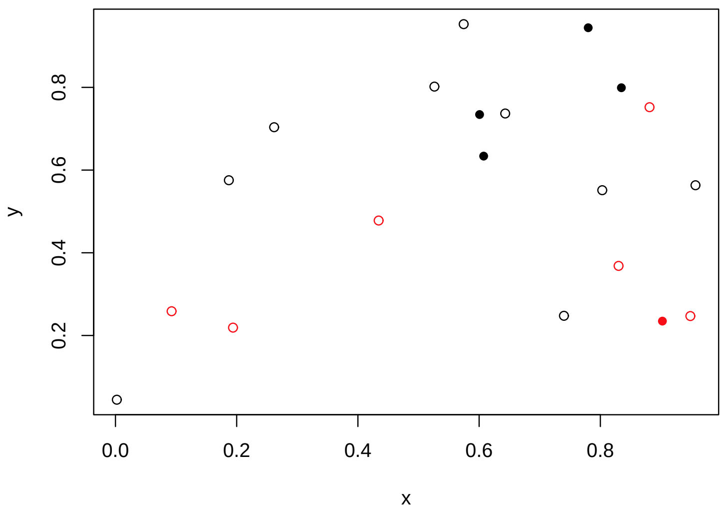
  - v čitateli je počet možností, kolika způsoby lze postupně (s ohledem na pořadí!) uspořádat všech 5 studentů
  - ve jmenovateli je součin dvou činitelů
  - první udává kolikrát lze uspořádat tři vybrané studenty
  - druhý udává kolikrát lze uspořádat dva nevybrané studenty
  - každá trojice vybraných studentů se kombinuje s každou dvojicí studentů nevybraných





## Počítání ryb v rybníku

$(m = 20), a = 7, n = 5, Y = 1 \Rightarrow \hat{m} = n \cdot a / Y = 35$








## hypergeometrické rozdělení

příklad na klasickou pravděpodobnost

- v rybníku je $m$ ryb (zpravidla neznámý počet) $a$ ryb vylovíme, označíme a vypustíme zpět
- po nějaké době vylovíme $n$ ryb, z nich $Y$ je označených
- číslo $Y$ předem neznáme, je to **náhodná veličina**
- s jakou pravděpodobností je $Y = k$?
  - celkem $\binom{m}{n}$ možných $n$-tic vylovených ryb
  - $k$ označených lze vybrat $\binom{a}{k}$ způsoby
  - $n - k$ neoznačených lze vybrat $\binom{m-a}{n-k}$ způsoby

$$\mathrm{P}(Y = k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{m-a}{n-k}}{\binom{m}{n}}, \qquad \max(0, n+a-m) \le k \le \min(a, n)$$

- např. odhad neznámého $m$: $\hat{m} = \frac{n \cdot a}{Y}$ (neboť $Y/n \doteq a/m$)

## příklad ponožky

V noci vzbudili Kubu, že má jít hlídat tábor. Po tmě z pytlíku vytáhl **dvě** ponožky, aniž ověřil jejich barvu. Původně tam byly tři páry ponožek ze stejného materiálu: zelené, modré, šedivé.
Náhodné jevy a veličiny:

- $A$ obě ponožky jsou stejné barvy
- $B$ aspoň jedna obutá ponožka je zelená
- $C$ aspoň jedna obutá ponožka je modrá
- $D$ na pravé noze je zelená ponožka
- $X$ počet obutých šedivých ponožek
- $Y$ počet obutých modrých ponožek





## příklad ponožky – výpočet pravděpodobností jevů

označení (z,m) znamená barvu postupně na levé a na pravé noze

možnosti vytáhnou **dvojici** ponožek: $m = 6 \cdot 5 = 30$
možnosti vytáhnout dvě zelené: $m_{z,z} = 2 \cdot 1 = 2$
možnosti vytáhnout zelenou a modrou: $m_{z,m} = 2 \cdot 2 = 4$

| $\omega_i$ | $P(\omega_i)$ | $A$ | $B$ | $C$ | D | $B \cap C$ | $B \cup C$ | $Y$ | $X$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (z,z) | 1/15 | • | • | | • | | • | 0 | 0 |
| (z,m) | 2/15 | | • | • | | • | • | 1 | 0 |
| (z,š) | 2/15 | | • | | | | • | 0 | 1 |
| (m,z) | 2/15 | | • | • | • | • | • | 1 | 0 |
| (m,m) | 1/15 | • | | • | | | • | 2 | 0 |
| (m,š) | 2/15 | | | • | | | • | 1 | 1 |
| (š,z) | 2/15 | | • | | • | | • | 0 | 1 |
| (š,m) | 2/15 | | | • | | | • | 1 | 1 |
| (š,š) | 1/15 | • | | | | | | 0 | 2 |
| pravděpodobnost | | 3/15 | 9/15 | 9/15 | 5/15 | 4/15 | 14/15 | | |

$$P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{9}{15} + \frac{9}{15} - \frac{4}{15} = \frac{14}{15} = P(B \cup C)$$

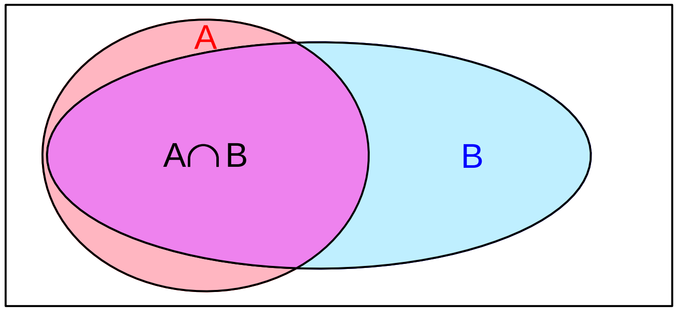




## podmíněná pravděpodobnost

když víme, že nastalo $A$ (je to jisté, pst $A$ za podmínky $A$ je rovna 1), pak **podmíněná pst** jevu $B$ za podmínky $A$ bude rovna relativní velikosti $B \cap A$ vzhledem k velikosti $A$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$








## příklad ponožky: s jakou pstí se Kuba obul rozumně?

- bez další informace: $P(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$
- spolubydlící ve stanu Aleš se v noci vzbudil a v pytlíku viděl pár zelených ponožek

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{2/15}{6/15} = \frac{1}{3} > \frac{1}{5} = P(A)$$

- v pytlíku chyběla aspoň jedna modrá nebo aspoň jedna zelená

$$P(A|(B \cup C)) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \frac{2/15}{14/15} = \frac{1}{7} < \frac{1}{5} = P(A)$$

- na pravé noze má Kuba zelenou

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{1/15}{5/15} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5} = P(A)$$

## nezávislost náhodných jevů

informace, že na pravé noze je zelená ponožka (jev $D$) neovlivnila pravděpodobnost jevu $A$ (stejná barva ponožek)
jevy $A$ a $D$ jsou **nezávislé**

$$\mathrm{P}(A|D) = \frac{\mathrm{P}(A \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \mathrm{P}(A)$$

a tedy po odstranění zlomku v druhé rovnosti

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cap D) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(D)}$$

definuje **nezávislost** náhodných jevů $A$ a $D$
vlastnost symetrická, nezávisí na pořadí





## vlastnosti podmíněné pravděpodobnost

- pravděpodobnost jevu $D$ za podmínky jevu $C$

$$\boxed{\mathrm{P}(D|C) = \frac{m_{D \cap C}}{m_C} = \frac{m_{D \cap C}/m}{m_C/m} = \frac{\mathrm{P}(D \cap C)}{\mathrm{P}(C)}}$$

- pravděpodobnost průniku jevů $D, C$ obecně

$$\mathrm{P}(D \cap C) = \mathrm{P}(D|C)\,\mathrm{P}(C)$$
$$\mathrm{P}(C \cap D) = \mathrm{P}(C|D)\,\mathrm{P}(D)$$

(ale $\mathrm{P}(C \cap D) = \mathrm{P}(D \cap C)$, neboť $D \cap C = D \cap C$)

- odtud vztah, z něhož dostaneme Bayesův vzorec:

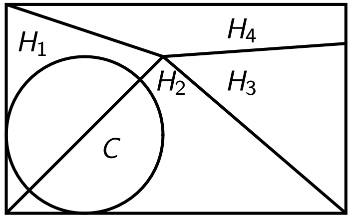
$$\mathrm{P}(D|C)\,\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(C|D)\,\mathrm{P}(D)$$





## vzorec pro úplnou pst, Bayesův vzorec

počítáme $\mathrm{P}(H_1|C)$, např. $C$ – správná odpověď, $H_j$ – správná známka $j$




$\mathrm{P}(H_1) = 0{,}231$
$\mathrm{P}(H_2) = 0{,}375$
$\mathrm{P}(H_3) = 0{,}219$
$\mathrm{P}(H_4) = 0{,}175$
$\mathrm{P}(C|H_1) = 0{,}589$
$\mathrm{P}(C|H_2) = 0{,}362$ (proč je $\mathrm{P}(C|H_2) < \mathrm{P}(C|H_1)$?)

$$\mathrm{P}(C \cap H_1) = \mathrm{P}(C|H_1)\,\mathrm{P}(H_1), \quad \mathrm{P}(C \cap H_2) = \mathrm{P}(C|H_2)\,\mathrm{P}(H_2)$$
$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(C \cap H_1) + \mathrm{P}(C \cap H_2) = 0{,}136 + 0{,}136 = 0{,}272$$
$$\mathrm{P}(H_1 \cap C) = \mathrm{P}(H_1|C)\,\mathrm{P}(C)$$
$$\mathrm{P}(H_1|C) = \frac{\mathrm{P}(H_1 \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{\mathrm{P}(C|H_1)\,\mathrm{P}(H_1)}{\mathrm{P}(C|H_1)\,\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(C|H_2)\,\mathrm{P}(H_2)} = \frac{1}{2}$$





## obecný vzorec pro úplnou pravděpodobnost

(totéž, ale obecně))

- $H_1, \ldots, H_k$ neslučitelné (tj. $H_i \cap H_j = \emptyset$ pro $i \neq j$)
- sjednocení $H_1, \ldots, H_k$ dá jev jistý (tj. $H_1 \cup \ldots \cup H_k = \Omega$)

z definice podmíněné psti plyne $\mathrm{P}(C \cap H_j) = \mathrm{P}(C|H_j) \cdot \mathrm{P}(H_j)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}(C \cap \Omega) = \mathrm{P}(C \cap (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k)) \\ &= \mathrm{P}((C \cap H_1) \cup (C \cap H_2) \cup \ldots \cup (C \cap H_k)) \text{ (neslučitelné jevy)} \\ &= \mathrm{P}(C \cap H_1) + \mathrm{P}(C \cap H_2) + \ldots + \mathrm{P}(C \cap H_k) \\ &= \mathrm{P}(C|H_1)\,\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(C|H_2)\,\mathrm{P}(H_2) + \ldots + \mathrm{P}(C|H_k)\,\mathrm{P}(H_k)\end{aligned}$$

tedy obecně $\boxed{\mathrm{P}(C) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(C|H_j)\,\mathrm{P}(H_j)}$

$\mathrm{P}(C)$ je váženým průměrem podmíněných pstí $\mathrm{P}(C|H_j)$

# Bayesův vzorec [Bayes formula]

stejné předpoklady: $H_j$ neslučitelné, sjednocení všech jistý jev

$$\mathrm{P}(H_i|C) = \frac{\mathrm{P}(H_i \cap C)}{\mathrm{P}(C)}, \qquad \mathrm{P}(C|H_i) = \frac{\mathrm{P}(C \cap H_i)}{\mathrm{P}(H_i)}$$

odtud je pro libovolně zvolené $i$

$$\mathrm{P}(H_i \cap C) = \mathrm{P}(C \cap H_i) = \mathrm{P}(C|H_i)\,\mathrm{P}(H_i)$$

proto pro každé $i$, $i = 1, \ldots, k$ platí

$$\boxed{\mathrm{P}(H_i|C) = \frac{\mathrm{P}(H_i \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{\mathrm{P}(C|H_i)\,\mathrm{P}(H_i)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{\mathrm{P}(C|H_i)\,\mathrm{P}(H_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(C|H_j)\,\mathrm{P}(H_j)}}$$

$H_1, \ldots, H_k$ – **hypotézy**, $\mathrm{P}(H_1|C), \ldots, \mathrm{P}(H_k|C)$ – **aposteriorní** psti
$\mathrm{P}(H_1), \ldots, \mathrm{P}(H_k)$ – **apriorní** psti (nutně $\mathrm{P}(H_1) + \ldots + \mathrm{P}(H_k) = 1$)





# příklad: zkoušení

$H_j$ – student si zaslouží známku $j$, učitel studenta (tedy $j$) nezná
$C$ – student správně odpoví na položenou otázku
$\mathrm{P}(H_j)$ – apriorní představa učitele o neznámém studentovi
$\mathrm{P}(C|H_j)$ – obtížnost otázky, volí učitel

| $H_j$ | $\mathrm{P}(H_j)$ | $\mathrm{P}(C\|H_j)$ | $\mathrm{P}(C\|H_j)\,\mathrm{P}(H_j)$ | $\mathrm{P}(H_j\|C)$ | $\mathrm{P}(H_j\|C_2)$ | $\mathrm{P}(H_j\|C_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,20 | 1,00 | 0,2000 | 0,2694 | 0,3451 | 0,4230 |
| 2 | 0,35 | 0,80 | 0,2800 | 0,3771 | 0,3865 | 0,3790 |
| 3 | 0,25 | 0,65 | 0,1625 | 0,2189 | 0,1822 | 0,1452 |
| 4 | 0,20 | 0,50 | 0,1000 | 0,1347 | 0,0863 | 0,0529 |
| $\Sigma$ | 1,00 | | 0,7425 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

$\mathrm{P}(C) = 0{,}7425$
podobně $C_2$, $C_3$ správné odpovědi na další stejně obtížné otázky, když použijeme předchozí aposteriorní psti jako apriorní





# senzitivita, specificita, prevalence

- $D$ – subjekt je nemocen, **prevalence** – podíl nemocných v populaci $\mathrm{P}(D)$, zvolme $\mathrm{P}(D) = 0{,}001$
- nemoc je skrytá, vyhledáváme ji pomocí testu s vlastnostmi:
  - $\mathrm{P}(P|D)$ – pravděpodobnost pozitivního výsledku u nemocného (**senzitivita**, pokud možno velká, zvolme $\mathrm{P}(P|D) = 0{,}98$, na test pozitivně reaguje 98 % nemocných)
  - $\mathrm{P}(\overline{P}|\overline{D})$ – pravděpodobnost negativního výsledku u zdravého (**specificita**, pokud možno velká, zvolme $\mathrm{P}(\overline{P}|\overline{D}) = 0{,}99$, na test pozitivně reaguje jen $1 - \mathrm{P}(\overline{P}|\overline{D}) = 1$ % zdravých)





# senzitivita, specificita, prevalence

- jaká je pst, že pozitivně reagující je opravdu nemocný?

$$\mathrm{P}(D|P) = \frac{\mathrm{P}(P|D)\,\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(P|D)\,\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(P|\overline{D})\,\mathrm{P}(\overline{D})} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}001}{0{,}98 \cdot 0{,}001 + 0{,}01 \cdot 0{,}999} \doteq 0{,}089$$

- jaká je pst, že jde o zdravého člověka v případě, že test byl negativní?

$$\mathrm{P}(\overline{D}|\overline{P}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{P}|\overline{D})\,\mathrm{P}(\overline{D})}{\mathrm{P}(\overline{P}|\overline{D})\,\mathrm{P}(\overline{D}) + \mathrm{P}(\overline{P}|D)\,\mathrm{P}(D)} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}999}{0{,}99 \cdot 0{,}999 + 0{,}02 \cdot 0{,}001} = 0{,}99998$$

- porovnej s apriorními pstmi: 0,001 resp. 0,999

## náhodná veličina

[random variable]

- číselně vyjádřený výsledek náhodného pokusu
- předem nevíme, který výsledek vyjde, známe jen
  - možné hodnoty
  - jejich pravděpodobnosti
- každému elementárnímu jevu přiřadíme reálné číslo
- **diskrétní rozdělení** náhodné veličiny $X$
  - model pro počty případů (četnosti)
  - možné hodnoty $x_1^*, x_2^*, \ldots$
  - psti hodnot $\mathrm{P}(X = x_1^*), \mathrm{P}(X = x_2^*), \ldots$ (pstní funkce)
- **spojité rozdělení** náhodné veličiny $X$
  - model pro spojitou veličiny (délka, váha, koncentrace ...)
  - obor (množina) možných hodnot $X$
  - hustota $f(x)$





## příklad: ponožky

$X$ a $Y$ mají **stejné rozdělení**

náhodná veličina $Y$ – počet modrých ponožek
rozdělení $Y$ dáno hodnotami $y_j^*$ a pstmi těchto hodnot $\mathrm{P}(Y = y_j^*)$
náhodná veličina $X$ – počet šedivých ponožek
rozdělení $X$ dáno hodnotami $x_j^*$ a pstmi těchto hodnot $\mathrm{P}(X = x_j^*)$

| $\omega_i$ | $\mathrm{P}(\omega_i)$ | $Y$ | $X$ |
|---|---|---|---|
| (z,z) | 1/15 | 0 | 0 |
| (z,m) | 2/15 | 1 | 0 |
| (z,š) | 2/15 | 0 | 1 |
| (m,z) | 2/15 | 1 | 0 |
| (m,m) | 1/15 | 2 | 0 |
| (m,š) | 2/15 | 1 | 1 |
| (š,z) | 2/15 | 0 | 1 |
| (š,m) | 2/15 | 1 | 1 |
| (š,š) | 1/15 | 0 | 2 |

| $j$ | $x_j^*$ | $\mathrm{P}(X = x_j^*)$ |
|---|---|---|
| 1 | **0** | 2/15+4/15=**6/15** |
| 2 | **1** | 0/15+8/15=**8/15** |
| 3 | **2** | 1/15+0/15=**1/15** |

| $j$ | $y_j^*$ | $\mathrm{P}(Y = y_j^*)$ |
|---|---|---|
| 1 | **0** | 2/15+4/15=**6/15** |
| 2 | **1** | 0/15+8/15=**8/15** |
| 3 | **2** | 1/15+0/15=**1/15** |

Střední hodnota





## distribuční funkce

protějšek empirické distribuční funkce (str. 19),[(cumulative) distribution function]

- pst, že $X$ nepřekročí $x$ $\boxed{F_X(x) = \mathrm{P}(X \le x)}$
- diskrétní rozdělení: $\boxed{F(x) = \sum_{k \le x} \mathrm{P}(X = k)}$
- spojité rozdělení: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, kde $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$
- vlastnosti distribuční funkce

$$0 \le F(x) \le 1$$

neklesající: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$

$$\boxed{\mathrm{P}(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)}$$

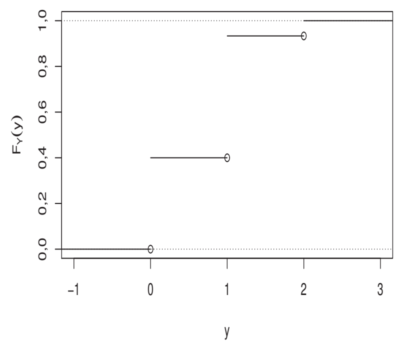




## příklad diskrétního rozdělení

rozdělení počtu modrých ponožek $Y$

| $j$ | $y_j^*$ | $\mathrm{P}(Y = y_j^*)$ | $F_Y(y_j^*)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 6/15 | 6/15=0,400 |
| 2 | 1 | 8/15 | 14/15≐0,933 |
| 3 | 2 | 1/15 | 15/15=1,000 |



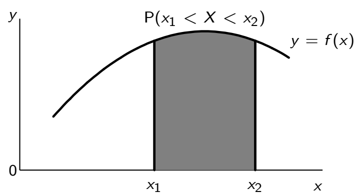
## hustota spojitého rozdělení

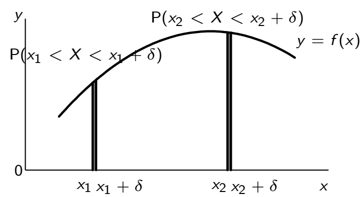
[density function]

- nechť $f(x)$ je hustota náhodné veličiny $X$
- hustota je nezáporná, plocha pod celou hustotou je rovna jedné

$$f(x) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

- plocha pod hustotou nad intervalem $x_1, x_2$ je rovna pravděpodobnosti, že $X$ je mezi $x_1, x_2$





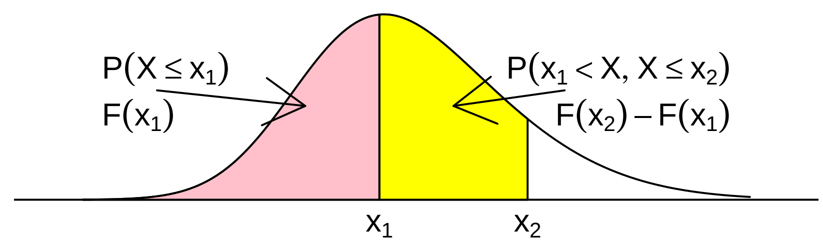



## geometrický význam hustoty

$P(x_1 < X, X <= x_2) = P(x_1 < X <= x_2)$, vpravo stručnější, používaný zápis

$$F(x_2) = P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$
$$= F(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

odtud $\boxed{P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)}$





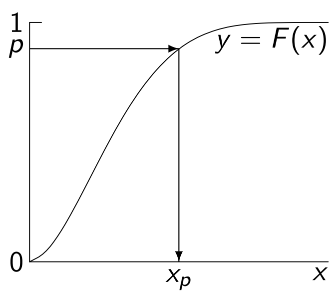


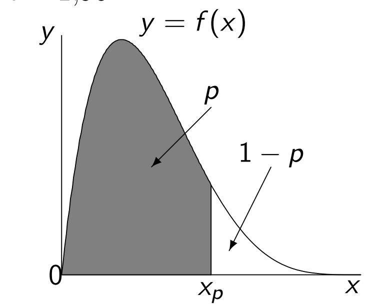

## $p$-kvantil $x_p$

- $x_p$ je hodnota, pod kterou je $100p$ procent pravděpodobnosti

$$\boxed{P(X \leq x_p) = p}$$

- populační protějšek percentilu
- např. [qnorm(0.975)] dá 1,959964 $\doteq$ 1,96





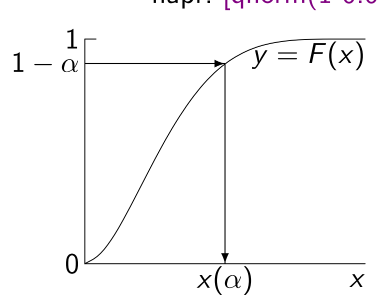


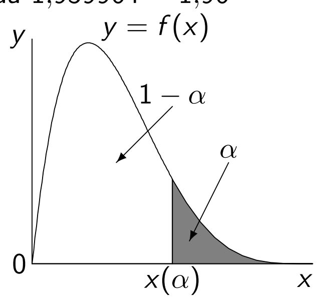

## kritická hodnota $x(\alpha)$

kritická hodnota $x(\alpha)$ je překročena s pstí $\alpha$

$$\boxed{P(X \geq x(\alpha)) = \alpha}$$

např. [qnorm(1-0.025)] dá 1,959964 $\doteq$ 1,96



## střední hodnota

pokračujeme v idealizovaných představách

- míra polohy, **populační průměr**, očekávaná hodnota [expected value, mean value]
- metoda výpočtu se značí $\mathrm{E}\,X$
- vypočtená hodnota se značí $\mu$ nebo úplněji $\mu_X$
- **vážený průměr možných hodnot**
- ideální protějšek výběrového průměru
- diskrétní rozdělení: vahami jsou pravděpodobnosti

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}\,X = \sum_j x_j^* \,\mathrm{P}(X = x_j^*)}$$

- spojité rozdělení: místo vah je hustota $f_X(x)$

$$\mu_X = \mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\mathrm{d}x$$





## příklad ponožky

$X$ – počet modrých ponožek

| $j$ | $x_j^*$ | $\mathrm{P}(X = x_j^*)$ | $x_j^* \cdot \mathrm{P}(X = x_j^*)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 6/15 | 0 |
| 2 | 1 | 8/15 | 8/15 |
| 3 | 2 | 1/15 | 2/15 |
| součet | | 15/15 | 10/15 |

$$\mu_X = 0 \cdot \frac{6}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

▸ Náhodná veličina





## (populační) rozptyl $\sigma^2$, (populační) směrodatná odchylka $\sigma$

[variance, standard deviation]

- míra variability, **populační rozptyl, popul. směr. odchylka**
- udává velikost kolísání (variabilitu) kolem střední hodnoty
- metoda výpočtu se značí $\mathrm{var}\,X$
- vypočtená hodnota $\sigma^2$, úplněji $\sigma_X^2$
- lze vyjádřit pomocí střední hodnoty

$$\sigma_X^2 = \mathrm{var}\,X = \mathrm{E}\,(X - \mu_X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - (\mu_X)^2$$

- $\sigma_X^2$ – ideální protějšek výběrového rozptylu
- $\sigma_X$ – ideální protějšek výběrové směrodatné odchylky
- diskrétní rozdělení

$$\boxed{\sigma_X^2 = \mathrm{var}\,X = \sum_j \left(x_j^* - \mu_X\right)^2 \mathrm{P}\left(X = x_j^*\right)}$$

- spojité rozdělení $\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_X)^2 f_X(x)\mathrm{d}x$





## příklad ponožky

$X$ – počet šedivých ponožek, $\mu_X = 2/3$

| $j$ | $x_j^*$ | $\mathrm{P}(X = x_j^*)$ | $x_j^* - \mu_X$ | $(x_j^* - \mu_X)^2$ | $(x_j^* - \mu_X)^2\,\mathrm{P}(X = x_j^*)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 6/15 | −2/3 | 4/9 | 24/135 |
| 2 | 1 | 8/15 | 1/3 | 1/9 | 8/135 |
| 3 | 2 | 1/15 | 4/3 | 16/9 | 16/135 |
| $\sum$ | | 15/15 | ??? | | 48/135=16/45 |

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \sum_j (x_j^* - \mu_X)^2 p_j \\
&= (0 - 2/3)^2 \cdot 6/15 + (1 - 2/3)^2 \cdot 8/15 \\
&\quad + (2 - 2/3)^2 \cdot 1/15 = 16/45 \doteq 0{,}356 \\
\sigma_X &= \sqrt{16/45} \doteq 0{,}596
\end{aligned}$$

## sdružené rozdělení

- abychom mohli popsat **závislost** náhodných veličin, zajímáme se o **společné** chování dvojice (trojice,...) náhodných veličin, tedy chování **náhodného vektoru**
- příklad **ponožky**
  - $X$ – počet šedivých ponožek
  - $Y$ – počet modrých
  - $Z$ – počet jiných než šedivých ponožek
- zajímá nás rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)$
- proč nemá smysl vyšetřovat **vektor** $(X, Z)$?
- (protože $Z$ je určeno $X$ jednoznačně: $Z = 2 - X$)





## příklad ponožky

$X$ šedivých ponožek, $Y$ počet modrých ponožek

sdružené, marginální a podmíněné rozdělení $Y$ při daném $X = x$

| $\omega_i$ | $P(\omega_i)$ | $Y$ | $X$ |
|---|---|---|---|
| (z,z) | 1/15 | 0 | 0 |
| (z,m) | 2/15 | 1 | 0 |
| (z,š) | 2/15 | 0 | 1 |
| (m,z) | 2/15 | 1 | 0 |
| (m,m) | 1/15 | 2 | 0 |
| (m,š) | 2/15 | 1 | 1 |
| (š,z) | 2/15 | 0 | 1 |
| (š,m) | 2/15 | 1 | 1 |
| (š,š) | 1/15 | 0 | 2 |

| | $y_j^*$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i^*$ | 0 | 1 | 2 | celkem |
| 0 | 1/15 | 4/15 | 1/15 | 6/15 |
| 1 | 4/15 | 4/15 | 0/15 | 8/15 |
| 2 | 1/15 | 0/15 | 0/15 | 1/15 |
| | 6/15 | 8/15 | 1/15 | 15/15 |

| | $y_j^*$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i^*$ | 0 | 1 | 2 | celkem |
| 0 | 1/6 | 4/6 | 1/6 | 1 |
| 1 | 3/6 | 3/6 | 0/6 | 1 |
| 2 | 6/6 | 0 | 0 | 1 |





## sdružené, marginální a podmíněné rozdělení

**sdružené rozdělení** – popisuje **společné chování** $X, Y$

$$\boxed{P(X = x_i^*, Y = y_j^*)} \text{ resp. } \boxed{f_{X,Y}(x, y)}$$

**marginální rozdělení**: chování jedné bez ohledu na hodnotu druhé

$$\boxed{P(X = x_i^*) = \sum_j P(X = x_i^*, Y = y_j^*) \qquad \forall x_i^*}$$

$$\boxed{P(Y = y_j^*) = \sum_i P(X = x_i^*, Y = y_j^*) \qquad \forall y_j^*}$$

**podmíněné rozdělení**: chování $Y$ při **dané** hodnotě $X$

$$P(Y = y_j^* | X = x_i^*) = \frac{P(X = x_i^*, Y = y_j^*)}{P(X = x_i^*)}$$





## kovariance

protějšek $s_{xy}$ (str. 37), [covariance]

**kovariance** vyjadřuje vzájemnou závislost náhodných veličin:

$$\boxed{\sigma_{X,Y} = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)}$$

$$\boxed{\sigma_{X,Y} = \sum_i \sum_j (x_i^* - \mu_X)(y_j^* - \mu_Y) P(X = x_i^*, Y = y_j^*)}$$

označení metody výpočtu: $\text{cov}(X, Y)$

zřejmě platí $\boxed{\text{cov}(X, X) = \text{var}\, X}$ tj. $\boxed{\sigma_{X,X} = \sigma_X^2}$

náhodné veličiny jsou **nezávislé** právě tehdy, když platí **(ze znalosti hodnoty jedné nic nevíme o druhé)**

$$\boxed{P(X = x_i^*, Y = y_j^*) = P(X = x_i^*) \cdot P(Y = y_j^*), \qquad \forall (x_i^*, y_j^*)}$$

jsou-li $X, Y$ – nezávislé $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{X,Y} = 0}$ (nikoliv obrácená implikace)

## shrnutí vlastností populačního průměru a rozptylu

srovnej s požadavky na míry polohy a míry variability

$$\mu_{\alpha+X} = \alpha + \mu_X, \qquad \mu_{\beta X} = \beta \cdot \mu_X,$$
$$\sigma^2_{\alpha+X} = \sigma^2_X, \qquad \sigma^2_{\beta X} = \beta^2 \cdot \sigma^2_X,$$
$$\sigma_{\alpha+X} = \sigma_X, \qquad \sigma_{\beta X} = |\beta| \cdot \sigma_X,$$

pro součet náhodných veličin $X+Y$ dále platí

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$$
$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2\sigma_{XY} \qquad \text{obecně}$$
$$\sigma_{X,Y} = 0 \qquad \text{pro nezávislé } X, Y$$
$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y \qquad \text{pro nezávislé } X, Y$$

$\mu_X, \sigma_X, \ldots$ jsou konstanty, vyjadřují (charakterizují) polohu, variabilitu ... náhodné veličiny $X$





## ukázka důkazu

$$\begin{aligned}\mu_{\alpha+\beta X} &= \mathrm{E}(\alpha+\beta X)\\ &= \sum_i (\alpha + \beta x_i^*)\,\mathrm{P}(X = x_i^*)\\ &= \sum_i \alpha\,\mathrm{P}(X=x_i^*) + \sum_i \beta x_i^*\,\mathrm{P}(X=x_i^*)\\ &= \alpha \sum_i \mathrm{P}(X=x_i^*) + \beta \sum_i x_i^*\,\mathrm{P}(X=x_i^*)\\ &= \alpha + \beta\cdot \mathrm{E}\,X = \alpha + \beta\cdot\mu_X\end{aligned}$$

**normování** náhodné veličiny $X$ (populační obdoba $z$-skórů)

$$Z = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \qquad \text{(bezrozměrné!)}$$
$$\Rightarrow \qquad \mu_Z = 0, \qquad \sigma_Z = 1$$





## charakteristiky založené na normované verzi

charakteristiky $X$ nezávislé na $\mu_X$ a $\sigma_X$, protějšky popisných statistik

- (populační) **korelační koeficient** [correlation coefficient]

$$\rho_{XY} = \mathrm{cov}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

- (populační) **šikmost** náhodné veličiny $X$ [skewness]

$$\gamma_1 = \mathrm{E}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^3 = \frac{\mathrm{E}(X-\mu_X)^3}{\sigma_X^3}$$

- (populační) **špičatost** náhodné veličiny $X$ (někdy bez $-3$) [kurtosis]

$$\gamma_2 = \mathrm{E}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^4 - 3 = \frac{\mathrm{E}(X-\mu_X)^4}{\sigma_X^4} - 3$$





## příklad ponožky

| $x_i^*$ \ $y_j^*$ | 0 | 1 | 2 | celkem |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/15 | 4/15 | 1/15 | 6/15 |
| 1 | 4/15 | 4/15 | 0/15 | 8/15 |
| 2 | 1/15 | 0/15 | 0/15 | 1/15 |
| | 6/15 | 8/15 | 1/15 | 15/15 |

$$\mu_X = \mu_Y = 2/3 \qquad \sigma^2_X = \sigma^2_Y = 48/135 = 16/45$$
$$\begin{aligned}\sigma_{XY} &= (0-2/3)\cdot(0-2/3)\cdot 1/15 + (0-2/3)\cdot(1-2/3)\cdot 4/15\\ &+ (0-2/3)\cdot(2-2/3)\cdot 1/15 + (1-2/3)\cdot(0-2/3)\cdot 4/15\\ &+ (1-2/3)\cdot(1-2/3)\cdot 4/15 + (1-2/3)\cdot(2-2/3)\cdot 0/15\\ &+ (2-2/3)\cdot(0-2/3)\cdot 1/15 + (2-2/3)\cdot(1-2/3)\cdot 0/15\\ &+ (2-2/3)\cdot(2-2/3)\cdot 0/15 = -24/135 \doteq -0{,}177\end{aligned}$$

$X, Y$ jsou závislé, neboť např.
$6/15 \cdot 8/15 \doteq 0{,}213 < 4/15 \doteq 0{,}267, \qquad \rho_{X,Y} = -1/2$

## alternativní rozdělení

nula-jedničkové, Bernoulliovo

- pouze dvě možné hodnoty: 1 (zdar), 0 (nezdar)
- $\mathrm{P}(X=1)=\pi, \mathrm{P}(X=0)=1-\pi$
- $\pi$ je jediný parametr, $0<\pi<1$
- $X$ – počet zdarů v jednom pokusu, v němž je pst zdaru $\pi$
- $X \sim \mathrm{alt}(\pi)$
- $\mu_X = \mathrm{E}\,X = 1\cdot\pi + 0\cdot(1-\pi) = \pi$
- $\sigma_X^2 = \mathrm{var}\,X = (1-\pi)^2\cdot\pi + (0-\pi)^2\cdot(1-\pi) = \pi(1-\pi)$





## binomické rozdělení

[binomial distribution]

- $Y \sim \mathrm{bi}(n,\pi)$
- $n$ **nezávislých** pokusů takových, že
- $\mathrm{P}(\text{zdar})=\pi, \mathrm{P}(\text{nezdar})=1-\pi$, $(0<\pi<1)$
- $Y$ je **počet zdarů** v těchto pokusech
- $\boxed{\mathrm{P}(Y=k)=\binom{n}{k}\pi^k(1-\pi)^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots,n}$
  [dbinom(k,n,prob)]
- např. ze 7 vajíček se vylíhne $Y$ slepiček, $Y\sim\mathrm{bi}(7,1/2)$
- např. při 60 hodech kostkou padlo $Y$ šestek, $Y\sim\mathrm{bi}(60,1/6)$
- předem nevíme, kolik bude slepiček (šestek), ale v dlouhodobém průměru je relativní četnost blízká 1/2 (1/6)





## binomické rozdělení pomocí alternativního rpzdělení

- $Y \sim \mathrm{bi}(n,\pi)$
- $Y$ je celkový počet zdarů v $n$ pokusech, tedy
- $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$,
  kde $X_i$ je počet zdarů v $i$-tém pokusu
- z vlastností střední hodnoty (očekávaný počet zdarů)

$$\mu_Y = \mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}\,X_i = \sum_{i=1}^n \pi = n\pi$$

- protože jsou pokusy **nezávislé**

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{var}\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \mathrm{var}\,X_i = \sum_{i=1}^n \pi(1-\pi) = n\pi(1-\pi)$$





## příklad: kuřáci

- mezi dvacetiletými muži je (řekněme) 35 % kuřáků ($\pi=0{,}35$)
- je-li dvacetiletých 70 tisíc ($m = 70\,000$), pak je kuřáků asi $m\pi = 70\,000\cdot 0{,}35 = 24\,500$, ale nevíme, kteří to jsou
- vyberme náhodně $n=60$ dvacetiletých mužů, označme jako $Y$ počet kuřáků mezi nimi, je tedy $Y\sim\mathrm{bi}(60, 0{,}35)$
- střední hodnota (očekávaný počet), rozptyl

$$\mu_Y = 60\cdot 0{,}35 = 21 \qquad \sigma_Y^2 = 60\cdot 0{,}35\cdot 0{,}65 = 13{,}65 \doteq (3{,}7)^2$$

- ukázky pravděpodobností možných hodnot

| $k$ | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(Y=k)$ | 0,029 | 0,062 | 0,095 | 0,107 | 0,091 | 0,059 |

- psti počítány pomocí [dbinom(0:60,60,0.35)]

## Poissonovo rozdělení

[Poisson distribution]

- $X \sim \mathrm{Po}(\lambda) \qquad (\lambda > 0)$
- zákon vzácných (řídkých) jevů
- kolikrát nastal jev během jednotkového časového intervalu, na jednotkové ploše, v jednotkovém objemu ...
- předpokládá se, že počet výskytů jevu v jednom intervalu **nezávisí** na počtu výskytu jevu v jiném intervalu
- $\boxed{\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}}, \qquad k = 0, 1, \ldots$
- $\mu_X = \lambda,\ \sigma_X^2 = \lambda$
- při nestejných intervalech, objemech ... je parametr úměrný velikosti intervalu ... (např. $\lambda t$ u časového intervalu délky $t$)
- pro velké $n$ a malé $\pi$ lze rozdělení $\mathrm{bi}(n, \pi)$ aproximovat pomocí rozdělení $\mathrm{Po}(n\pi)$
- např. počet kolonií na Petriho misce





## příklad

s jakou pstí udělá 5 z 55 stejně připravených studentů zkoušku na výbornou, je-li pst jedničky 0,08?

- binomické rozdělení $Y \sim \mathrm{bi}(55, 0{,}08)$ [dbinom(5,55,0.08)]

$$\mathrm{P}(Y = 5) = \binom{55}{5} \cdot 0{,}08^5 \cdot 0{,}92^{50} = 0{,}176$$

- aproximace Poissonovým rozdělením (použij $\lambda = n\pi = 4{,}4$) $Y \sim \mathrm{Po}(55 \cdot 0{,}08) = \mathrm{Po}(4{,}4)$ [dpois(5, 4.4)]

$$\mathrm{P}(Y = 5) = \frac{4{,}4^5}{5!} \mathrm{e}^{-4{,}4} = 0{,}169$$





## normální (Gaussovo) rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

[normal (Gaussian) distribution]

- $\boxed{\mu_X = \mu,\ \sigma_X^2 = \sigma^2}$
- spojité rozdělení, symetrické okolo střední hodnoty $\mu$
- maximální hodnota hustoty přibližně $0{,}4/\sigma$
- $\mathrm{N}(0, 1)$ (normované normální rozdělení): $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$ (hustota), $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) \mathrm{d}t$ (distr. fce)
- $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, pak $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$

$$\boxed{\mathrm{P}(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)}$$

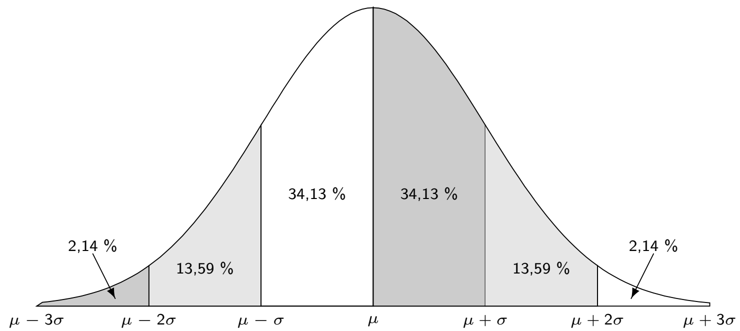
- model vzniku: součet velkého počtu nepatrných příspěvků
- velmi často modeluje znaky v poměrovém měřítku





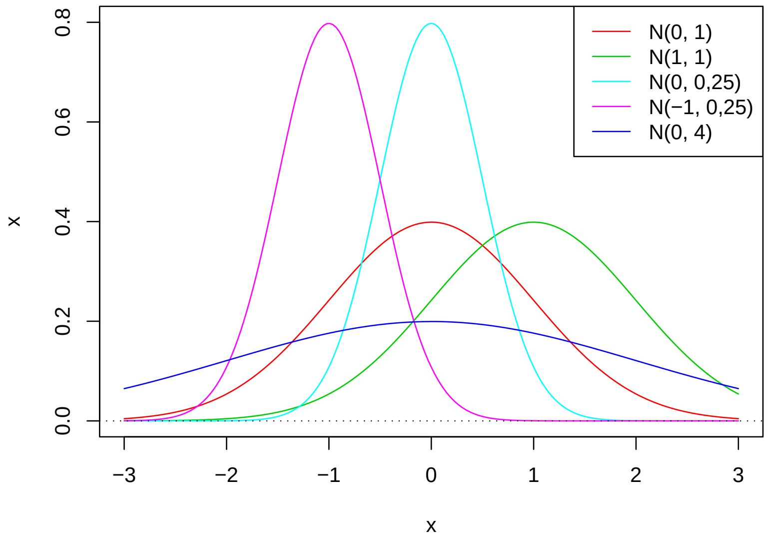
## hustota $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

[dnorm(x,mu,sigma)]



## normální (Gaussovo) rozdělení $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$

význam parametrů








## výpočet pravděpodobnosti, že $a < X < b$

použije distribuční funkci $\mathrm{N}(0,1)$

$$\mathrm{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) \qquad \text{platí obecně pro spoj. rozděl.}$$

$$X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$$\mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{P}(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$$

[pnorm((b-mu)/sigma)-pnorm((a-mu)/sigma)]

v programu R je distribuční funkce $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ s obecnými parametry:

[pnorm(b,mu,sigma)-pnorm(a,mu,sigma)]





## příklad

- u jakého dílu populace desetiletých hochů naměříme výšku od 135 do 140 cm, když pro výšku desetiletých platí $X \sim \mathrm{N}\left(136{,}1, 6{,}4^2\right)$
- předpokládáme zaokrouhlování na celá čísla při měření, takže hodnoty od 135 cm do 140 cm naměříme, když měřené výšky budou od 134,5 cm do 140,5 cm:

$$\mathrm{P}(134{,}5 < X < 140{,}5) = \Phi\left(\frac{140{,}5 - 136{,}1}{6{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{134{,}5 - 136{,}1}{6{,}4}\right)$$
$$= 0{,}754 - 0{,}401 = 0{,}353$$

[pnorm((140.5-136.1)/6.4)-pnorm((134.5-136.1)/6.4)]

- pomocí distribuční fce s obecnými parametry [pnorm(140.5,136.1,6.4)-pnorm(134.5,136.1,6.4)]





## kritické hodnoty normálního a Studentova $t$-rozdělení

[Student distribution]

- **normální rozdělení** $\mathrm{N}(0,1)$ [qnorm(1-alpha)]

$$Z \sim \mathrm{N}(0,1): \quad \mathrm{P}(Z > z(\alpha)) = \alpha$$

ze symetrie platí $\mathrm{P}(|Z| > z(\alpha/2)) = \alpha$

- **Studentovo $t$-rozdělení s $k$ stupni volnosti** $\mathrm{t}_k$ (podobné normálnímu, protože místo $\sigma$ používá jeho odhad, má větší rozptyl)

$$T \sim \mathrm{t}_k: \quad \mathrm{P}(|T| > t_k(\alpha)) = \alpha$$

- jsou to spíše kritické hodnoty $|T|$ [qt(1-alpha/2,k)]

## některé kritické hodnoty

| $\alpha$ | 0,50 | 0,25 | 0,10 | **0,05** | 0,01 |
|---|---|---|---|---|---|
| $z(\alpha/2)$ | 0,674 | 1,150 | 1,645 | **1,960** | 2,576 |
| $t_{100}(\alpha)$ | 0,677 | 1,157 | 1,660 | **1,984** | 2,626 |
| $t_{20}(\alpha)$ | 0,687 | 1,185 | 1,725 | **2,086** | 2,845 |
| $t_5(\alpha)$ | 0,727 | 1,301 | 2,015 | **2,571** | 4,032 |

- $T \sim \mathrm{t}_k$ má jediný parametr $k$ (počet stupňů volnosti)
- s rostoucím $k$ se chování blíží normálnímu rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$
- pro $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ je 95 % hodnot v intervalu $(-1{,}960; 1{,}960)$
- pro $T \sim \mathrm{t}_5$ je 95 % hodnot v intervalu $(-2{,}571; 2{,}571)$
- pro $T \sim \mathrm{t}_{20}$ je 95 % hodnot v intervalu $(-2{,}086; 2{,}086)$
- pro $T \sim \mathrm{t}_{100}$ je 95 % hodnot v intervalu $(-1{,}984; 1{,}984)$

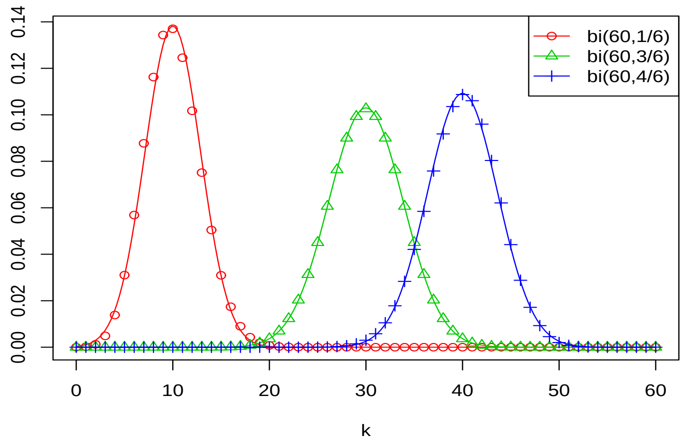




## aproximace binomického rozdělení normálním

se stejnou střední hodnotou a stejným rozptylem

rozdělení $\mathrm{bi}(n,\pi)$ lze aproximovat pomocí $\mathrm{N}(n\pi, n\pi(1-\pi))$








## další rozdělení související s normálním

[F-distribution, chi-square distribution]

- $V$ má rozdělení (musí být $\mathrm{P}(V > 0) = 1$ !!) **logaritmicko-normální**, platí-li $\boxed{\ln V \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)}$
- **Fisherovo $F$-rozdělení** $\mathrm{F}_{k,m}$ [qf(1-alpha,k,m)]

$$F \sim \mathrm{F}_{k,m}: \quad \mathrm{P}(F > F_{k,m}(\alpha)) = \alpha$$

- **rozdělení chí-kvadrát** $\chi^2_k$ [qchisq(1-alpha,k)]

$$X^2 \sim \chi^2_k: \quad \mathrm{P}(X^2 > \chi^2_k(\alpha)) = \alpha$$

- speciálně platí:
  - $\chi^2_1(0{,}05) = 3{,}841 = 1{,}960^2$
  - $\chi^2_1(\alpha) = z(\alpha/2)^2$
  - $F_{1,m}(\alpha) = (t_m(\alpha))^2$





## populace a výběr

[population, (random) sample, representative, parameter, statistics, estimator]

- **populace (základní soubor)**: soubor jednotek, o jejichž hromadných vlastnostech chceme vypovídat (všechny možné výsledky pokusu, všichni hoši zvoleného věku, všichni čolci v rybníčku) $\Rightarrow$ rozdělení náhodné veličiny
- **výběr**: náhodně vybraná vyšetřovaná část populace (vzorek)
- **reprezentativní výběr** obráží poměry v populaci (nutná vlastnost výběru, aby mohl vypovídat o populaci)
- **náhodný výběr**: nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením (model pro měření na výběru)
- **parametr**: neznámé číslo popisující nějakou **vlastnost** populace, charakteristika rozdělení náhodné veličiny
- **statistika**: funkce náhodného výběru (pozorování)
- **odhad**: statistika použitá k odhadu parametru

## Jsou desetiletí hoši stejně vysocí jako desetileté dívky?

- Jak porovnat různě vysoké chlapce s různě vysokými dívkami?
- potřebujeme nějaké číslo charakterizující výšky **všech** chlapců a podobné číslo pro dívky
- budeme porovnávat **populační** průměr výšek chlapců s **populačním** průměrem výšek dívek
- $X_1, \ldots, X_n$ jsou výšky **náhodně vybraných** chlapců; předem je neznáme $\Rightarrow$ v úvahách jsou to **náhodné veličiny**
- hodnoty $X_1, \ldots, X_n$ kolísají kolem střední hodnoty $\mathrm{E}\, X_i = \mu_X$ (populační průměr)
- velikost kolísání popisuje rozptyl $\sigma^2$
- (bodovým) odhadem populačního průměru bude výběrový průměr $\bar{X}$ spočítaný z $n$ skutečně zjištěných výšek
- Jaké vlastnosti má průměr $\bar{X}$?





## průměr z náhodného výběru

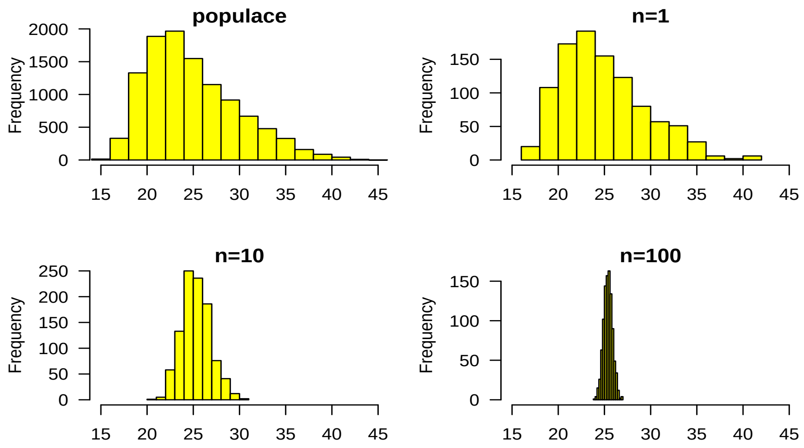
- $X_1, \ldots, X_n$ **nezávislé**, mají stejné rozdělení — **náhodný výběr**
  $\mu_{X_i} = \mathrm{E}\, X_i = \mu$ (stejná střední hodnota) — populační průměr
  $\sigma^2_{X_i} = \mathrm{var}\, X_i = \sigma^2$ (stejný rozptyl) — populační rozptyl
- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ — výběrový průměr
- $\mu_{\bar{X}} = \mathrm{E}\, \bar{X} = \mu$
  - výběrový průměr $\bar{X}$ je opět náhodná veličina
  - je **nestranným** odhadem [unbiased estimator] parametru $\mu$
  - nestranným odhadem populačního průměru (střední hodnoty)
  - když pořizujeme výběry opakovaně, průměry kolísají kolem skutečné hodnoty populačního průměru
- představu o závislosti rozptylu $\bar{X}$ na $n$ získáme z pokusu





## příklad: věk matek (umělá situace)

populace - 10 916 matek, opakované výběry rozsahu $n = 1, 10, 100$
je patrná variabilita klesající s rostoucím $n$








## příklad: věk matek – shrnutí

- velká populace dětí (a tedy jejich matek, téměř 11 tisíc)
- na rozdíl od běžné praxe **známe** populační průměr $\mu$
- náhodně vybráno 1000 matek (vlastně průměry výběrů rozsahu $n = 1$), nakreslen histogram
- 1000 krát náhodně vybráno vždy $n = 10$ matek, vždy spočítán průměr, nakreslen histogram průměrů
- 1000 krát náhodně vybráno vždy $n = 100$ matek, vždy spočítán průměr, nakreslen histogram průměrů
- podle teorie by každý další rozptyl ze 1000 průměrů měl být desetkrát menší než ten založený na desetkrát menším $n$
- skutečné rozptyly (odhady z 1000 realizací): 23,5; 2,20; 0,21

## příklad: věk matek

průměrný věk matek v opakovaných výběrech, počet opakování $B = 1000$
(20. března 2012 některé hodnoty opraveny)

| rozsah výběru $n$ | průměr průměrů | směr. odch. průměrů | rozptyl průměrů | rozptyl průměrů teoreticky |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 25,42 | 4,625 | 21,388 | 24,428 |
| 10 | 25,35 | 1,544 | 2,385 | 2,443 |
| 100 | 25,39 | 0,480 | 0,231 | 0,244 |
| 1000 | 25,40 | 0,150 | 0,022 | 0,024 |
| populace | $\mu$ =25,40 | $\sigma$ =4,932 | $\sigma^2$ =24,428 | |





## rozptyl průměru z náhodného výběru

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{X}} = \operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var} X_i = \frac{\sigma^2}{n} = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 = (\text{S.E.}(\bar{X}))^2}$$

- $\text{S.E.}(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – **střední chyba průměru**
  [standard error of mean]
- variabilita průměrů (měřená rozptylem) z výběrů rozsahu $n$ je $n$-krát menší, než variabilita jednotlivých pozorování $\sigma^2$
- střední chyba průměru je $\sqrt{n}$-krát menší než $\sigma$
- čím jsou rozsahy výběru větší, tím méně výběrové průměry kolísají (kolem populačního průměru)
- speciálně pro normální rozdělení $X_i \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$ nezávislé:

$$\bar{X} \sim \text{N}(\mu, \sigma^2/n) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \text{N}(0,1)$$

  (všimněte si závislosti na $n$)





## interval spolehlivosti pro $\mu$ (výběr z $\text{N}(\mu, \sigma^2)$)

[confidence interval]

- víme, že $\bar{X} \sim \text{N}(\mu, \sigma^2/n)$, tedy $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \text{N}(0,1)$

$$\text{P}(|Z| < 1{,}96) = \text{P}\left(\frac{|\bar{X} - \mu|}{\sigma}\sqrt{n} < 1{,}96\right) = 0{,}95$$

- což je totéž, jako ($\mu$ se od $\bar{X}$ liší nejvýše ...)

$$\text{P}\left(|\bar{X} - \mu| < 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

- tedy (všimněte si zkracování intervalu s rostoucím $n$)

$$\text{P}\left(\bar{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

- dostali jsme 95% **interval spolehlivosti pro parametr** $\mu$





## interpretace intervalu spolehlivosti

- je to **intervalový** odhad hodnoty $\mu$
- $\bar{X}$ je **bodový** odhad
- **základní vlastnost**: 95% interval spolehlivosti **překryje** s pravděpodobností 95 % **neznámé** $\mu$ (**odhadovaný parametr**)
- kdybychom postup prováděli opakovaně, pak asi v 95 % případů interval překryje skutečnou hodnotu $\mu$, ve zbylých asi 5 % zůstane skutečné $\mu$ mimo interval spolehlivosti
- pro obecné $\alpha$ (spolehlivost $1 - \alpha$):

$$\text{P}\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(\alpha/2) < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(\alpha/2)\right) = 1 - \alpha$$

- POZOR na nesprávné interpretace, vypovídá o neznámé **konstantě** $\mu$, nikoliv o **náhodných veličinách** $X$ nebo $\bar{X}$

## příklad: výšky desetiletých chlapců

- $$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(\alpha/2) < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(\alpha/2)\right)$$
- náhodně vybráno $n = 15$ desetiletých chlapců,
- předpokládá se, že je $\sigma = 6{,}4$ cm
- průměrná výška ve výběru 139,1 cm
- $\alpha = 5$ %, tedy $z(\alpha/2) = z(0{,}025) = 1{,}96$
- 95% interval spolehlivosti pro **průměrnou výšku všech desetiletých chlapců**:

$$\left(139{,}13 - \frac{6{,}4}{\sqrt{15}} \cdot 1{,}96\,;\ 139{,}13 + \frac{6{,}4}{\sqrt{15}} \cdot 1{,}96\right)$$

$$(135{,}9;\ 142{,}3)$$

- **průměr výšek všech** desetiletých chlapců leží s pstí 95 % v rozmezí od 135,9 cm do 142,3 cm





## interval spolehlivosti při neznámém $\sigma$

- pro $X_i$ s normálním rozdělením je třeba použít kritické hodnoty Studentova $t$-rozdělení (pozor na **jinak značené** kritické hodnoty Studentova $t$-rozdělení)

$$\mathrm{P}\left(\bar{X} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha) < \mu < \bar{X} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)\right) = 1 - \alpha$$

- jako odhad $\sigma$ se použije výběrová směrodatná odchylka

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

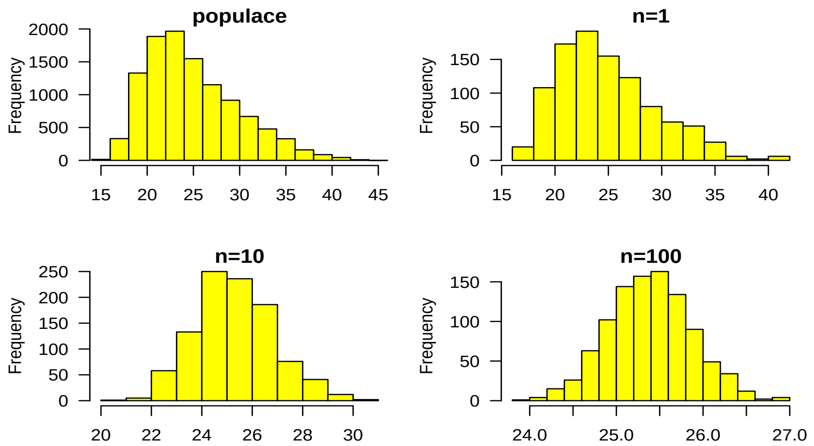
- při velkých $n$ ($n \geq 50$) stačí použít $z(\alpha/2)$ místo $t_{n-1}(\alpha)$
- interval spolehlivosti se počítá i při odhadu jiných parametrů
- je to interval, který s požadovanou pravděpodobností překryje odhadovaný parametr – **intervalový odhad**





## příklad: věk matek (nestejná měřítka!)

populace - 10 916 matek, opakované výběry rozsahu $n = 1, 10, 100$
je patrno, že s rostoucím $n$ se histogram blíží histogramu norm. rozdělení








## příklad: věk matek

průměrný věk matek v opakovaných výběrech,
počet opakování $B = 1000$
(20. března 2012 některé hodnoty opraveny)

| rozsah výběru $n$ | průměr průměrů | směr. odch. průměrů | šikmost průměrů | špičatost průměrů |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 25,42 | 4,625 | 0,740 | 0,287 |
| 10 | 25,35 | 1,544 | 0,275 | -0,038 |
| 100 | 25,39 | 0,480 | 0,081 | -0,053 |
| 1000 | 25,40 | 0,150 | 0,003 | 0,037 |
| populace | $\mu$ =25,40 | $\sigma$ =4,942 | $\gamma_1$ =0,773 | $\gamma_2$ =0,192 |

# centrální limitní věta (CLV, CLT)

[Central Limit Theorem]

- Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, se střední hodnotou $\mu$ a rozptylem $\sigma^2 > 0$ (nemusí pocházet z normálního rozdělení). Potom **pro velké** $n$ má průměr $\bar{X}$ přibližně rozdělení $\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, součet $X_1 + \ldots + X_n$ pak rozdělení $\mathrm{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.
- prakticky: **průměr** má pro dost velká $n$ **normální rozdělení** s rozptylem $n$-krát menším než jednotlivá pozorování, a to bez ohledu na výchozí rozdělení jednotlivých pozorování
- CLT je často důvodem předpokladu o normálním rozdělení, výsledná hodnota je ovlivněna součtem velikého počtu nahodilých malých vlivů
- příklad: průměrný věk matek z velkých výběrů má už (téměř) normální rozdělení





# příklad: věk matek

normální rozdělení průměrů dáno CLT a velkým $n$, $t_{98}(0{,}05) = 1{,}98$

- 95% interval spolehlivosti pro populační průměr věku *všech* matek na základě výběru 99 matek

$$\left(25{,}7 - 1{,}98 \cdot \frac{4{,}1}{\sqrt{99}}; 25{,}7 + 1{,}98 \cdot \frac{4{,}1}{\sqrt{99}}\right) = (24{,}9; 26{,}5)$$

  [confint(lm(vek.m∼1,data=Kojeni))], [t.test(Kojeni$vek.m)]
- 99% interval spolehlivosti pro populační průměr věku *všech* matek na základě výběru 99 matek (bude užší nebo širší?)
- větší jistota způsobí delší interval spolehlivosti

$$\left(25{,}7 - 2{,}63 \cdot \frac{4{,}1}{\sqrt{99}}; 25{,}7 + 2{,}63 \cdot \frac{4{,}1}{\sqrt{99}}\right) = (24{,}6; 26{,}8)$$

  [confint(lm(vek.m∼1,data=Kojeni),level=0.99)]





# příklad: věk matek

normální rozdělení průměrů dáno CLT a velkým $n$, $t_{98}(0{,}10) = 1{,}66$

- 90% interval spolehlivosti pro populační průměr věku *všech* matek na základě výběru 99 matek

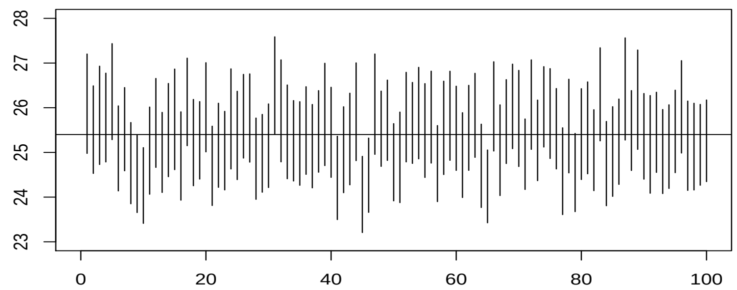
$$\left(25{,}7 - 1{,}66 \cdot \frac{4{,}1}{\sqrt{99}}; 25{,}7 + 1{,}66 \cdot \frac{4{,}1}{\sqrt{99}}\right) = (25{,}0; 26{,}4)$$

  [confint(lm(vek.m∼1,data=Kojeni),level=0.9)]
- příklady **nesprávné interpretace** 90% intervalu spolehlivosti:
  - *90 % žen má věk v intervalu (25,0; 26,4)*
    např. mezi našimi 99 matkami je jen 12 ve věku 25 a 10 ve věku 26 roků, navíc, s rostoucím $n$ se interval zužuje
  - *výběrový průměr věku matek je s pravděpodobností 90 % v intervalu (25,0; 26,4)*
    výběrový průměr je uprostřed (tedy uvnitř) intervalu **vždy**





# simulované výběry pro $n = 100$ (věk matek)




znázorněno celkem 100 95% intervalů spolehlivosti pro $\mu$
ve skutečnosti mimořádně víme, že $\mu = 25{,}4$
v 7 případech je $\mu$ nepřekryto
(7 je realizace náhodné veličiny s rozdělením $\mathrm{bi}(100, 0{,}05)$)

## centrální limitní věta pro četnosti

- (CLT obecně:) Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, se střední hodnotou $\mu$ a rozptylem $\sigma^2 > 0$. Potom pro velké $n$ má průměr z nich přibl. rozdělení $\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, jejich součet přibl. rozdělení $\mathrm{N}\big(n\mu, n\sigma^2\big)$.
- $Y \sim \mathrm{bi}(n, \pi)$: $Y$ je absolutní četnost výskytu jevu s pravděpodobností výskytu $\pi$ v $n$ nezávislých pokusech
- $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ je součet nezávislých náhodných veličin $X_i$ s alternativním rozdělením, $X_i \sim \mathrm{alt}(\pi), \mathrm{var}\, X_i = \pi(1-\pi)$
- podle CLT proto přibližně $Y \dot{\sim} \mathrm{N}(n\pi, n\pi(1-\pi))$
- relativní četnost $Y/n = \bar{X}$ je průměr veličin s alternativním rozdělením, označme $\hat{\pi} = Y/n$
- podle CLT je přibližně $\hat{\pi} \dot{\sim} \mathrm{N}(\pi, \pi(1-\pi)/n)$
- $\hat{\pi}$ je **nestranný** odhad $\pi$





## interval spolehlivosti pro pravděpodobnost $\pi$

- odmocnina z rozptylu odhadu $\hat{\pi}$ je $\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$
- střední chyba relativní četnosti = směrodatná odchylka relativní četnosti
- pravděpodobnost $\pi$ neznáme, odhadneme ji pomocí relativní četnosti $\hat{\pi} = Y/n$
- odtud je $100(1-\alpha)\%$ přibližný interval spolehlivosti pro $\pi$

$$\left(\hat{\pi} - z(\alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}; \hat{\pi} + z(\alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}\right)$$

  [prop.test(y,n,correct=FALSE)]
- existují přesnější (pracnější) postupy [binom.test(y,n)]





## příklad: hody s hrací kostkou

- odhadujeme pravděpodobnost šestky, $\alpha = 0{,}05$
- kostka A: $n = 100, y = 17, \hat{\pi}_A = 0{,}17$

$$\left(0{,}17 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{100}}; 0{,}17 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{100}}\right) = (0{,}10; 0{,}24)$$

- kostka B: $n = 100, y = 41, \hat{\pi}_B = 0{,}41$

$$\left(0{,}41 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}41 \cdot 0{,}59}{100}}; 0{,}41 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}41 \cdot 0{,}59}{100}}\right) = (0{,}31; 0{,}51)$$

- důležitý rozdíl: u kostky A patří $1/6 = 0{,}167$ do 95% intervalu spolehlivosti; u kostky B nikoliv





## příklad: výška desetiletých chlapců

- v roce 1951 bylo provedeno rozsáhlé měření výšky desetiletých hochů, výška byla vyšetřena v populaci desetiletých chlapců: $\mu = 136{,}1$ cm, $\sigma = 6{,}4$ cm
- na základě výběru pořízeného v roce 1961 máme rozhodnout, zda se po deseti letech výška populace desetiletých **zvýšila**
- hodnoty zjištěné v roce 1961 [cm]: 130, 140, 136, 141, 139, 133, 149, 151, 139, 136, 138, 142, 127, 139, 147
- $\bar{x} = 139{,}13$ cm, $s^2 = 6{,}56^2$ cm$^2$
- jiný (další) výběr z roku 1961 by obsahoval jiných 15 hochů, tedy by vedl k jinému výběrovému průměru (náhodná veličina)
- stačí rozdíl $139{,}13 - 136{,}1 = 3{,}03$ (=náhodná veličina, proč?), abychom prokázali, že se **populační průměr** výšek desetiletých chlapců po deseti letech změnil?

## testování statistických hypotéz

[hypothesis testing, null hypothesis, alternative hypothesis, critical (rejection) region, Type I (II) error, significance level]

- **nulová hypotéza** $H_0$: tvrzení o populaci (parametru), o jehož platnosti rozhodujeme (**ne**ní rozdíl, **ne**závisí, **ne**liší se od ...)
- **alternativní hypotéza** $H_1$: (alternativa) zbývající možnost (k $H_0$), často „vědecká hypotéza", kterou chceme dokázat
- volba mezi $H_0, H_1$ dána, volíme **o čem** budou hypotézy
- **kritický obor**: možné výsledky pokusu, kdy $H_0$ zamítáme; zpravidla popsán pomocí statistiky (např. $|Z| \geq z(\alpha/2)$)
- **obor přijetí**: možné výsledky pokusu, kdy $H_0$ nezamítáme
- **chyba prvního druhu**: (náhodný jev) rozhodnutí zamítnout $H_0$, když platí $H_0$, tj. falešně prokázat „vědeckou hypotézu"
- **chyba druhého druhu**: (náhodný jev) rozhodnutí nezamítnout $H_0$, když platí $H_1$, tj. nepoznat neplatnost $H_0$





## statistické rozhodování

[significance level, power, p-value]

- **hladina testu** $\alpha$ (zpravidla $\alpha = 5$ %)
  - maximální dovolená pst chyby prvního druhu
  - volí se před pokusem, nezávisle na jeho výsledku
  - **pevná** (nenáhodná) hodnota
- **síla testu** $1 - \beta$
  - pravděpodobnost zamítnutí neplatné $H_0$
  - pst, s jakou prokážeme platnou „vědeckou hypotézu"
  - závisí na tom, co opravdu platí
- ***p*-hodnota**
  - za platnosti $H_0$ určená pst, že dostaneme statistiku, která stejně nebo ještě méně podporuje $H_0$
  - nejmenší hladina $\alpha$, na které lze ještě $H_0$ zamítnout
  - „stupeň důvěry" v platnost nulové hypotézy
  - **náhodná veličina**, nikoliv pravděpodobnost $H_0$
- $H_0$ se **zamítá**, právě když $\boxed{p \leq \alpha}$ (**zapamatovat**)





## testování statistických hypotéz

| rozhodnutí | skutečnost | |
|---|---|---|
| | $H_0$ platí | $H_0$ neplatí |
| $H_0$ zamítnout (reject) | **chyba 1. druhu** (pst $\leq \alpha$) | správné rozhodnutí (pst $= 1 - \beta$) |
| $H_0$ nezamítnout (accept) | správné rozhodnutí (pst $\geq 1 - \alpha$) | chyba 2. druhu (pst $= \beta$) |

- zamítnutí $\Leftrightarrow$ výsledek pokusu v kritickém oboru
- přijetí $\Leftrightarrow$ výsledek pokusu v oboru přijetí
- nikdy spolehlivě nevíme, zda $H_0$ platí
- chybu 1. druhu nechceme dělat často



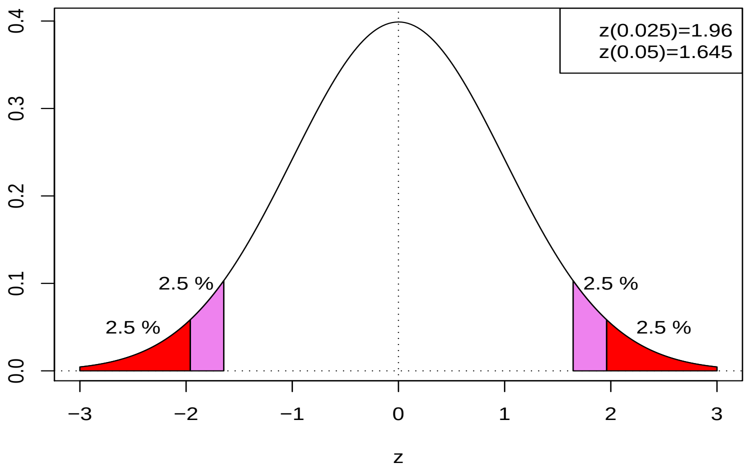


## rozhodování o populačním průměru normálního rozdělení ($\sigma$ známé)

- $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ **nezávislé**; $\sigma > 0$ známe
- $\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$, tedy $\mathrm{S.E.}(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$
- $H_0 : \mu = \mu_0$ (dané číslo, jiný zápis $H_0 : \mu - \mu_0 = 0$)
- platí-li $H_0$, pak $\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathrm{N}(0,1)}$
- $H_1 : \mu \neq \mu_0 \Rightarrow$ kritický obor: $|Z|$ velké, tj. $\boxed{|Z| \geq z(\alpha/2)}$
- $H_1 : \mu > \mu_0$: zamítnout pro $\boxed{Z \geq z(\alpha)}$
- $H_1 : \mu < \mu_0$: zamítnout pro $\boxed{Z \leq -z(\alpha)}$
- volba jednostranné alternativy jen podle zadání úlohy, nikoliv podle výsledku pokusu (nezávisle na datech)

## kritický obor pro $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$

červeně na 5% hladině, červeně a fialově na 10% hladině








## příklad: výška desetiletých chlapců

pozor, **jednostranná** alternativa!

- zvolíme klasickou hladinu $\alpha = 5$ %
- v roce 1951 velký výběr: $\mu_0 = 136{,}1$ cm, $\sigma = 6{,}4$ cm
- v roce 1961 změřeno $n = 15$ náhodně vybraných desetiletých hochů, $\bar{x} = 139{,}13$ cm
- stačí tento vzrůst k důkazu, že nová generace je vyšší?
- vzrostla výška desetiletých ? $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu > \mu_0$

$$z = \frac{139{,}13 - 136{,}1}{6{,}4}\sqrt{15} = 1{,}836$$

- $z(0{,}05) = 1{,}645 < 1{,}836$, tedy $H_0$ na 5% hladině **zamítáme**
- na 5% hladině jsme prokázali, že nová generace je vyšší
- v případě, že nová generace není vyšší, riskovali jsme jen 5% pravděpodobnost, že budeme nesprávně tvrdit, že vyšší je





## příklad: výška desetiletých chlapců

kritický obor (nezapomeň na jednostrannou alternativu!)

- kritický obor pomocí $Z$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq z(\alpha)$$

- totéž pro $\bar{X}$:

$$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(\alpha)$$

- konkrétně pro výšku hochů:

$$\bar{X} \geq 136{,}1 + \frac{6{,}4}{\sqrt{15}} \cdot 1{,}645 = 138{,}82$$

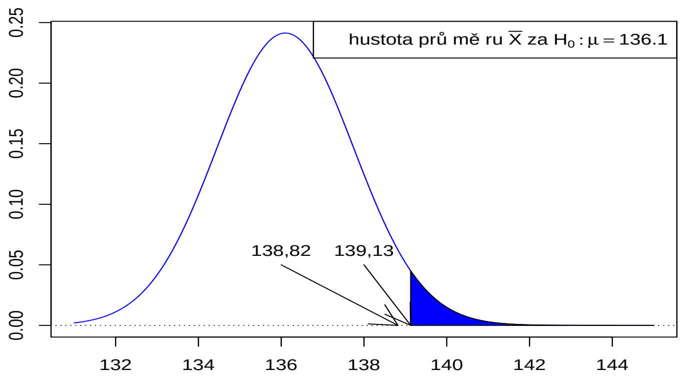




## výška desetiletých hochů

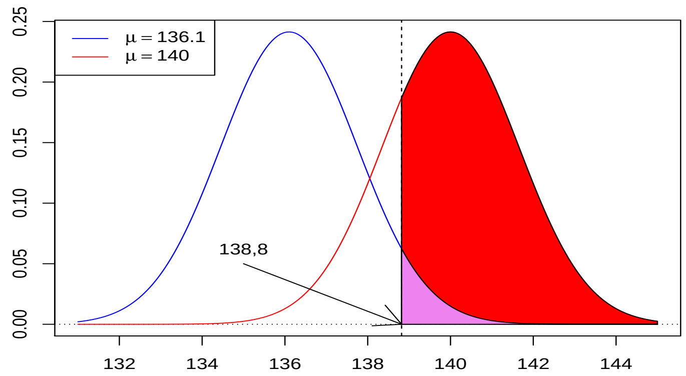
hustota $\bar{X}$ za platnosti hypotézy $H_0 : \mu = 136{,}1$, $H_1 : \mu > \mu_0$ při $\sigma = 6{,}4$

- $p$-hodnota – pst, že za $H_0$: $Z = (\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma > 1{,}836$ tj. $\bar{X} > 136{,}1 + 1{,}836 \cdot 6{,}4/\sqrt{15} = 139{,}13$ [1-pnorm(1.836)]
- $p$-hodnota – modrá plocha napravo od 139,13, $p = 3{,}3$ %



## výška desetiletých chlapců – síla testu

hustota $\bar{X}$ za hypotézy (modře) a při $\mu = 140$ (červeně)
hladina testu = fialová plocha, síla testu = fialová + červená plocha




hraniční hodnota $\bar{X}$, při které se „láme" rozhodování (hranice kritického oboru a oboru přijetí): $136{,}1 + 6{,}4/\sqrt{15} \cdot 1{,}645 = 138{,}8$





## volba rozsahu výběru

$H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- pro zvolenou hodnotu $\mu_1 \neq \mu_0$ požadujeme sílu $1 - \beta$
- $1 - \beta$ je pravděpodobnost, s jakou odhalíme neplatnost $H_0$, je-li ve skutečnosti $\mu = \mu_1$

$$n \geq \left(\frac{z(\alpha/2) + z(\beta)}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 \sigma^2$$

- při jednostranné alternativě by bylo $z(\alpha)$ místo $z(\alpha/2)$
- aby při jednostranné alternativě pro $\mu_1 = 140$ byla síla 90 % (tj. $1 - \beta = 0{,}9$, $\beta = 0{,}1$, $z(0{,}1) = 1{,}282$), bude třeba aspoň

$$n \geq \left(\frac{1{,}645 + 1{,}282}{140 - 136{,}1}\right)^2 6{,}4^2 = 23{,}1$$

(místo 15 pozorování jich potřebujeme aspoň 24, při oboustranné alternativě aspoň 29)





## jednovýběrový $t$-test

výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma$ **neznámé**

- $n$ nezávislých pozorování $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$
- $H_0 : \mu = \mu_0$ (populační průměr roven dané konstantě)
- nutno odhadnout neznámý rozptyl $\sigma^2$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

- statistika (místo $\sigma$ použijeme $S_x$)

$$\boxed{T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_x} \sqrt{n}}$$

- $H_1 : \mu \neq \mu_0$ zamítat při $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- $H_1 : \mu > \mu_0$ zamítat při $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- $H_1 : \mu < \mu_0$ zamítat při $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$





## výšky hochů pro případ neznámého $\sigma$

- $H_0 : \mu = 136{,}1$ proti $H_1 : \mu > 136{,}1$ ($\alpha = 5$ %)

$$\bar{x} = 139{,}133 \qquad s_x^2 = 6{,}556^2$$

$$t = \frac{139{,}133 - 136{,}1}{6{,}556}\sqrt{15} = 1{,}792 > 1{,}761 = t_{14}(0{,}10)$$

$$p = P(T \geq 1{,}792) = 0{,}047 \qquad (\text{ tj. } 4{,}7\ \%)$$

- na 5% hladině jsme prokázali zvýšení populačního průměru ($H_0$ se na 5% hladině **zamítá**)
- [t.test(hosi,mu=136.1,alternative="greater")]

## výšky hochů pro případ neznámého $\sigma$

(jiné zadání úlohy)

- **kdybychom** předem neměli určenu jednostrannou alternativu, museli bychom zvolit $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 136{,}1$, pak

$$|t| = |1{,}792| < 2{,}145 = t_{14}(0{,}05)$$
$$p = \mathrm{P}(|T| \geq 1{,}792) = 0{,}0948 \qquad \text{(tj. 9,48 \%)}$$

- hypotézu na 5% hladině nezamítáme
- [t.test(hosi,mu=136.1,alternative="two.sided")], stačí ale [t.test(hosi,mu=136.1)]





## výšky hochů pro případ neznámého $\sigma$

- 95% interval spolehlivosti: (135,5; 142,8) s 95% pravděpodobností je skutečný populační průměr (střední hodnota $\mu$) v uvedeném intervalu
- je jen 5% riziko, že leží mimo uvedený interval
- 99% interval spolehlivosti (134,1; 144,2) [t.test(hosi,mu=136.1,conf.level=0.99)] (vedlejší výsledek) [confint(lm(hosi~1),level=0.99)]
- aby byla zajištěna větší spolehlivost intervalu (větší pravděpodobnost, že zachytí skutečnou hodnotu), je nutně 99% interval spolehlivosti delší, než 95% interval spolehlivosti





## souvislost s intervalem spolehlivosti pro $\mu$

při oboustranné alternativě

- oboustranný interval spolehlivosti pro $\mu$ (viz str. 110)

$$\left(\bar{X} - \frac{S_x}{\sqrt{n}}\,t_{n-1}(\alpha), \bar{X} + \frac{S_x}{\sqrt{n}}\,t_{n-1}(\alpha)\right)$$

- $\mu_0$ patří do intervalu spolehlivosti, právě když platí

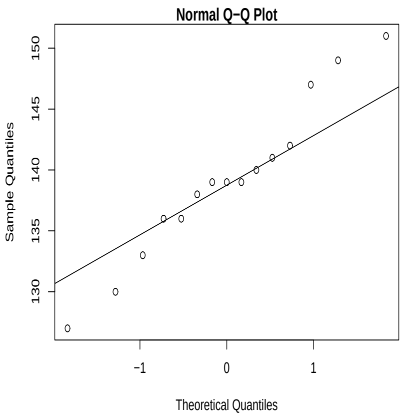
$$|\bar{X} - \mu_0| < \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)$$

- tedy, právě když se nezamítne hypotéza $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ při oboustranné alternativě $\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$
- interval spolehlivosti obsahuje takové hodnoty $\mu_0$, pro které bychom **nezamítli** hypotézu $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$
- podobně u jednostranných intervalů spolehlivosti a jednostranných alternativ





## ověření předpokladu o normálním rozdělení




- **Shapirův-Wilkův test**
- $\mathrm{H}_0$ : normální rozdělení s nějakými (neznámými) parametry
- [shapiro.test(hosi)]
- $W = 0{,}966$, $p = 80$ %
- test hodnotí kvalitu přiblížení bodů k přímce na diagramu normality
- [qqnorm(hosi);qqline(hosi)]

## pravděpodobnost výskytu jevu

test hypotézy o parametru $\pi$ binomického rozdělení

- $Y \sim \mathrm{bi}(n,\pi) \quad \mathrm{H}_0 : \pi = \pi_0$:
$$Z = \frac{Y - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}} = \frac{\hat\pi - \pi_0}{\mathrm{S.E.}(\hat\pi)} = \frac{\hat\pi - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_o)/n}} \dot\sim \mathrm{N}(0,1)$$
- podobnost s intervalem spolehlivosti pro $\pi$ na str. 118
- někdy s opravou na spojitost (Yates)
$$Z = \frac{|Y - n\pi_0| - 0{,}5}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}}\,\mathrm{sign}(Y - n\pi_0) \dot\sim \mathrm{N}(0,1)$$
- $\mathrm{H}_1 : \pi \neq \pi_0$: zamítnout pokud $|Z| \geq z(\alpha/2)$
- $\mathrm{H}_1 : \pi > \pi_0$: zamítnout pokud $Z \geq z(\alpha)$
- $\mathrm{H}_1 : \pi < \pi_0$: zamítnout pokud $Z \leq -z(\alpha)$
- existuje přesný postup, bez použití aproximace





## příklad kalous

- pokusit se prokázat, že kalous dá přednost infikované myši před myší neinfikovanou
- $Y$ – počet „zdarů“, $n = 50$, $\pi$ – pst, že zvolí infikovanou
- $Y$ má **binomické rozdělení**
  za $\mathrm{H}_0 : \pi = 1/2$ ($= \pi_0$, myši se neliší) je $Y \sim \mathrm{bi}(50, 1/2)$
- **alternativní hypotéza**: $\mathrm{H}_1 : \pi > 1/2$
- v pokusu z 50 případů dal kalous ve 33 případech přednost infikované myši před neinfikovanou
- **kritický obor**: velká hodnota $Y$ (tj. velké $\hat\pi$ resp. velké $Z$)
$$z = \frac{33 - 50\cdot 0{,}5}{\sqrt{50\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}} = 2{,}263 \qquad p = \mathrm{P}(Z \geq 2{,}263) = 0{,}0118$$
- s opravou na spojitost jsme opatrnější:
$$z = \frac{33 - 50\cdot 0{,}5 - 0{,}5}{\sqrt{50\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}} = 2{,}121 \qquad p = \mathrm{P}(Z \geq 2{,}121) = 0{,}0169$$





## příklad kalous

- prop.test() počítá $Z^2$, která má za $\mathrm{H}_0$ : rozdělení $\chi^2_1$
  [prop.test(33,n=50,p=0.5,alternative="greater",correct=FALSE)]
  [prop.test(33,50,alternative="greater")]
  [binom.test(33,50,alternative="greater")]
- $p$-**hodnota (dosažená hladina)**: za $\mathrm{H}_0$ počítaná pst, že dostaneme výsledek aspoň tolik odporující nulové hypotéze, jako ve skutečném pokusu:
$$\begin{aligned} p &= \mathrm{P}(Y \geq 33) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq 32) \\ &= \sum_{k=33}^{50} \binom{50}{k} 0{,}5^k (1-0{,}5)^{50-k} \\ &= 0{,}0164 \end{aligned}$$

[1-pbinom(32,50,1/2)]





## párové testy

(převedou úlohu na jednovýběrové testy)

- $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ – párová pozorování
  **nezávislé** dvojice (možná) závislých náhodných veličin
- $U_i, V_i$ – dvojice měření na stejných jedincích, např. hodnota zjištěná před ošetřením a po něm
- např. výška otce a jeho syna nebo věk otce a věk matky
- **nezajímá nás** zda je mezi nimi **závislost**, tu připouštíme, těsná závislost uvnitř dvojic je dokonce výhodná
- **zajímá nás zda** jsou **co do polohy stejné**,
  nebo např. synové v (populačním) průměru vyšší, než otcové
- $X_i = U_i - V_i$ (označení rozdílů)
- předp. **stejný druh rozdělení** $X_1, \ldots, X_n$ (např. normální)
- $\mathrm{H}_0$ tvrdí, že např. mezi výškami otců a synů **není rozdíl**, tedy že rozdíly $X_i$ **kolísají kolem nuly**: populační míra polohy je nulová (např. populační průměr – střední hodnota)

## párový $t$-test

předpoklad normálního rozdělení rozdílů

- **normální** rozdělení: $X_i = U_i - V_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, **nezávislé**
- $\mathrm{H}_0 : \mu = 0$ (pak je $\mu_U = \mu_V$)
- odhad $\sigma^2$: $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
- $T = \dfrac{\bar{X}}{\mathrm{S.E.}\,(\bar{X})} = \dfrac{\bar{X}}{S}\sqrt{n} = \dfrac{\bar{U} - \bar{V}}{\mathrm{S.E.}\,(\bar{U} - \bar{V})}$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 0$, když $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu < 0$, když $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu > 0$, když $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- vlastně jednovýběrový $t$-test pro $X_i = U_i - V_i$





## příklad: výšky rodičů (párová pozorování!)

$\mathrm{H}_0$: otcové jsou o 10 cm vyšší než matky

- $U$ – výška otce, $V$ – výška matky, $X = U - V - 10$
- $\alpha = 0{,}05, \mathrm{H}_0 : \mu_U - 10 = \mu_V$ resp. $\mu_U - \mu_V = 10$
- $n = 99, \bar{u} = 179{,}267, \bar{v} = 166{,}970$
- $\bar{x} = \bar{u} - \bar{v} - 10 = 2{,}293, s_X = s_{U-10-V} = s_{U-V} = 8{,}144$
- $t = \frac{2{,}293}{8{,}144}\sqrt{99} = 2{,}801$, tedy $|t| > t_{98}(0{,}05) = 1{,}9845 \quad \Rightarrow$ zamítnout $\mathrm{H}_0$
- $p = \mathrm{P}(|T| \geq t) = 0{,}0061 \qquad (0{,}61\ \%)$
- 95% interval spolehlivosti pro $\mu_U - \mu_V$:

$$\left(12{,}293 - \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\ ;\ 12{,}293 + \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\right) = (10{,}67; 13{,}92)$$

[shapiro.test(vyska.o-vyska.m)] ověření normality
[t.test(vyska.o,vyska.m, mu=10, paired=TRUE)]
[t.test(vyska.o-vyska.m, mu=10)]





## znaménkový test

bez předpokladu normálního rozdělení, stačí libovolné **spojité** rozdělení

- stačí znát znaménka rozdílů $X_i = U_i - V_i$
- pozorování s $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$) se vynechají, upraví se $n$
- $Y$ – počet **kladných** znamének $X_i = U_i - V_i$
- $\mathrm{H}_0$ : rozdělení $U$ a $V$ jsou stejná, pak je nutně $\mathrm{P}(U_i > V_i) = \mathrm{P}(X_i > 0) = 1/2$, tedy $Y \sim \mathrm{bi}(n, 1/2)$
- $\mathrm{H}_0$ zamítáme pro velká nebo malá $Y$:

$$Z = \frac{Y - n/2}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

- pro malá $n$ je bezpečnější použít Yatesovu korekci

$$Z = \frac{|Y - n/2| - 0{,}5}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$





## příklad: věk rodičů (párová pozorování!)

normalitu rozdílu věku rodičů sotva lze předpokládat

- celkem 99 dvojic (otec, matka), sledujeme jejich věk $(U, V)$
- $\mathrm{H}_0 : \mu_U = \mu_V + 2$ (populační míra polohy věku otců je o 2 roky větší, než matek), $\mathrm{H}_1$ oboustranná
- v jedenácti případech je vek.o – vek.m = 2, tyto dvojice nepoužijeme, proto $n = 99 - 11 = 88$
- u 50 dvojic je vek.o – vek.m > 2, proto

$$z = \frac{50 - 88/2}{\sqrt{88/4}} = 1{,}279, \qquad p = 0{,}201\ (20{,}1\ \%)$$

- s Yatesovou korekcí: $z = 1{,}172$, $p = 0{,}241$ (24,1 %)

[n = sum(vek.o-vek.m != 2)] počet nenulových $X_i$
[y = sum(vek.o-vek.m > 2)] počet kladných $X_i$
[prop.test(y,n,correct=FALSE)] bez Yatesovy korekce
[prop.test(y,n,correct=TRUE)] s Yatesovou korekcí

## párový Wilcoxonův test [Wilcoxon signed rank test]

(silnější předpoklad, než u znaménkového testu)

- nutné **spojité a symetrické** rozdělení $X_i = U_i - V_i$
- $\mathrm{H}_0$ : populační medián $X_i$ je roven 0 (tj. $\mathrm{P}(X_i > 0) = 0{,}5$)
- opět vyloučíme případy $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$)
- určíme pořadí $R_i^+$ absolutních hodnot $|X_i| = |U_i - V_i|$
- $W$ součet těch pořadí, kde bylo $U_i > V_i$ (tj. $X_i > 0$)

$$Z = \frac{W - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

- pod odmocninou bývá ještě oprava na výskyt shodných hodnot, která jmenovatele poněkud zmenší
  [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,mu=10,paired=TRUE)]
- pro malá $n$ se čitatel zpravidla přibližuje o 1/2 k nule:
  (všimněte si zkrácených názvů parametrů – jednoznačnost!)
  [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,m=10,p=TRUE,cor=FALSE)]





## příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

- u devíti osob provedeno porovnávání dvou způsobů předávání informace (např. poslouchání vers. čtení)
- rozhodnout, zda je mezi oběma způsoby rozdíl
- $\mathrm{H}_0$: rozdělení $U$ a $V$ stejná, tedy populační medián rozdílů $X = U - V$ je roven 0
- znaménkový test s Yatesovou korekcí (málo pozorování):

$$y = 5 \qquad n = 8$$

$$z = \frac{|5 - 8/2| - 0{,}5}{\sqrt{8/4}} = 0{,}3536 \qquad p = 72{,}4\ \%$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_i$ | 90 | 86 | 72 | 65 | 44 | 52 | 46 | 38 | 43 |
| $v_i$ | 85 | 87 | 70 | 62 | 44 | 53 | 42 | 35 | 46 |
| $x_i$ | 5 | -1 | 2 | 3 | 0 | -1 | 4 | 3 | -3 |
| $r_i^+$ | 8 | 1,5 | 3 | 5 | – | 1,5 | 7 | 5 | 5 |





## příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

párový Wilcoxonův test [Wilcoxon signed-rank test]

- $\mathrm{H}_0$ : populační medián rozdílů $= 0$
- nově předpokládáme symetrii
- Wilcoxonův test:

| $u_i - v_i$ | 5 | -1 | 2 | 3 | -1 | 4 | 3 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_i^+$ | 8 | 1,5 | 3 | 5 | 1,5 | 7 | 5 | 5 |

$$w = 8 + 3 + 5 + 7 + 5 = 28$$

$$z = \frac{28 - 8 \cdot 9/4 - 1/2}{\sqrt{8 \cdot 9 \cdot 17/24}} = \frac{9{,}5}{\sqrt{51}} = 1{,}33$$

$$p = 18{,}3\ \%$$

- program R dá $p = 18{,}1\ \%$, protože kromě opravy na spojitost bere ohled na shody (přesný výpočet by dal $p = 19{,}5\ \%$)





## porovnání populačních měr polohy

| rozdělení | normální | spojité |
|---|---|---|
| populační parametr (o čem je hypotéza) | populační průměr | populační medián (distribuční funkce) |
| jeden výběr | jednovýběrový *t*-test | jednovýběrový Wilcoxon, znaménkový |
| výběr dvojic | párový *t*-test | párový Wilcoxon, znaménkový |
| dva nezávislé výběry | dvouvýběrový *t*-test | Mann-Whitney (Kolmogorov-Smirnov) |
| *k* nezávislých výběrů | analýza rozptylu jedn. třídění | Kruskal-Wallis |
| výběr *r*-tic | analýza rozptylu náhodné bloky | Friedman |

## dvouvýběrový *t*-test

(předpoklad **normálního rozdělení**, testuje se **shoda středních hodnot** $\mu_X = \mu_Y$)

- $n_X$ nezávislých pozorování $X$, $n_Y$ nezávislých pozorování $Y$
- tyto výběry musí být **nezávislé** (musí to zajistit způsob pořízení dat)
- rozptyly $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ shodné (lze ověřit, odhady $S_X^2, S_Y^2$ podobné)
- normální rozdělení v obou výběrech (lze ověřit, pro velká $n_X, n_Y$ nenormalita tolik nevadí)
- společný odhad rozptylu (vážený průměr odhadů z jednotlivých výběrů)

$$S^2 = \frac{n_X - 1}{n_X + n_Y - 2} S_X^2 + \frac{n_Y - 1}{n_X + n_Y - 2} S_Y^2$$

- statistika (pro test hypotézy, že rozdělení $X$ a $Y$ jsou stejná)

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}}$$





## dvouvýběrový *t*-test

- $\mathrm{H}_0 : \mu_X = \mu_Y$
  zamítnout ve prospěch alternativy
  - $\mathrm{H}_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ když $|T| \geq t_{n_X+n_Y-2}(\alpha)$
  - $\mathrm{H}_1 : \mu_X > \mu_Y$ když $T \geq t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$
  - $\mathrm{H}_1 : \mu_X < \mu_Y$ když $T \leq -t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$

  [t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] nebo
  [t.test(vyska~Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]
- zamítáme-li $\mathrm{H}_0$, říkáme, že rozdíl výběrových průměrů **je (statisticky) významný**
- pochyby o shodě rozptylů: Welchův test (modifikace *t*-testu)
  [t.test(hosi,divky,var.equal=FALSE)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
  [t.test(hosi,divky)] resp. [t.test(vyska~Hoch)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
- shodu rozptylů lze ověřit např. *F*-testem ($\mathrm{H}_0 : \sigma_X = \sigma_Y$)
  [var.test(hosi,divky)]
- ověření normality nutně pro každý výběr zvlášť!





## příklad: výšky desetiletých dětí

| | rozsah | průměr | výb. rozptyl |
|---|---|---|---|
| hoši | 15 | 139,13 | 42,98 |
| dívky | 12 | 140,83 | 33,79 |

$$s^2 = \frac{15-1}{15+12-2} 42{,}98 + \frac{12-1}{15+12-2} 33{,}79 = 38{,}936$$

$$|t| = \frac{|139{,}13 - 140{,}83|}{\sqrt{38{,}936}} \sqrt{\frac{15 \cdot 12}{15+12}} = |-0{,}703| < 2{,}06 = t_{25}(0{,}05)$$

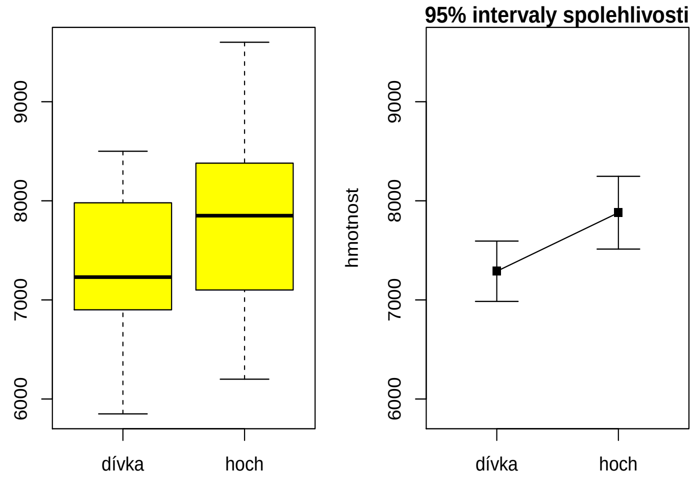
[shapiro.test(hosi)] $p = 80$ %
[shapiro.test(divky)] $p = 38$ %
[tapply(vyska,Hoch,shapiro.test)] (spočítá test pro oba výběry)
[var.test(hosi,divky)] $p = 70$ %
[t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] $p = 49$ %
[t.test(vyska~Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]





## příklad: váha dětí maturantek v 24. týdnu věku dítěte

$t = 2{,}52$, $p = 1{,}5$ %, rozdíl **je významný**



## dvouvýběrový *t*-test a intervaly spolehlivosti

(poznámka na okraj)

- zpravidla platí
  - disjunktní intervaly spolehlivosti ⇒ významný rozdíl
  - nevýznamný rozdíl průměrů ⇒ překryv intervalů
  - rozdíl průměrů může být významný a současně se intervaly mohou překrývat
  - pokud každý z intervalů spolehlivosti obsahuje výběrový průměr druhého výběru, rozdíl průměrů není významný (nemusí platit v případě, kdy oba rozsahy výběru jsou do čtyř)
- příklad: váha v 24. týdnu dětí matek maturantek
  - 95% interval spolehlivosti pro hochy [kg]: (7,51; 8,25)
  - 95% interval spolehlivosti pro dívky [kg]: (6,98; 7,59)
  - intervaly se poněkud překrývají, přestože *t*-test dal: $t = 2{,}52$, $p = 1{,}5$ %, tedy na odpovídající 5% hladině je rozdíl významný





## dvouvýběrový Wilcoxonův test (Mannův-Whitneyův)

(stačí **spojité rozdělení**)

- dva nezávislé výběry rozsahu $n_X, n_Y$
- spojitá rozdělení
- $\mathrm{H}_0$: rozdělení jsou stejná, tedy i **populační mediány** stejné
- za $\mathrm{H}_0$ jsou výběry „dobře promíchané“
- určíme pořadí v rámci spojených výběrů
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- $W_X$ součet pořadí hodnot $X$

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud $|Z| \geq z(\alpha/2)$ (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejné variabilitě





## příklad: věk matek vers. plánované těhotenství

- věk matky nemá normální rozdělení: Shapirův-Wilkův test dal *p*-hodnoty $p = 0{,}0045$ a $p = 0{,}0470$ [tapply(vek.m,Plan,shapiro.test)]
- rozdělení věku matek je nepochybně spojité
- výběry (0 – neplánované, 1 – plánované těhotenství) jsou nezávislé
- dvouvýběrový Wilcoxonův test $\mathrm{H}_0$ : shodná rozdělení (shodné mediány) dal $p = 0{,}02067$, rozdíl je na 5 % hladině **průkazný** [wilcox.test(vek.m∼Plan)]
- $W = 864$ je $\#(vek0 > vek1) + \#(vek0 == vek1)/2$, kde $vek0$ je věk matky s $Plan == 0$, podobně $vek1$



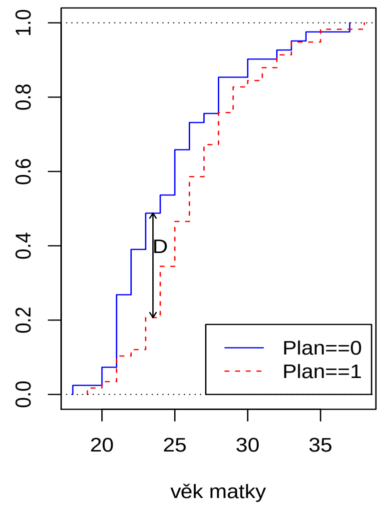


## Kolmogorovův-Smirnovův test

(stačí **spojité rozdělení**)

- porovná empirické distribuční funkce dvou **nezávislých** výběrů
- určí jejich největší „svislou“ vzdálenost
- citlivý vůči všem neshodám (nejen co do populačního průměru či populačního mediánu)
- porovnání věku matek podle plánovaného těhotenství
- $D = \frac{20}{41} - \frac{12}{58} = 0{,}2808$
  $p = 4{,}5$ %

[ks.test(vek.m[Plan==0],vek.m[Plan==1])]



## porovnání populačních měr polohy

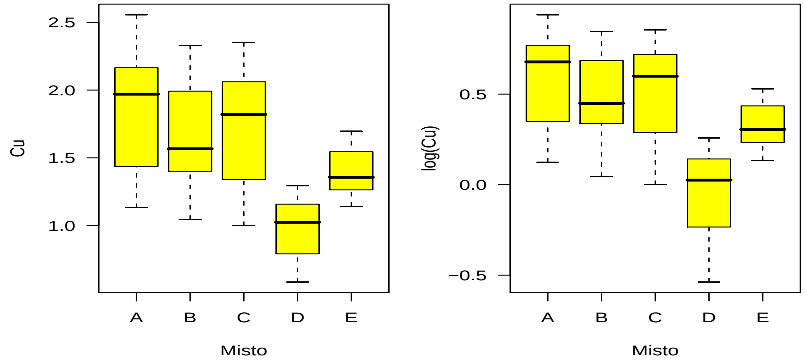
| rozdělení | normální | spojité |
|---|---|---|
| populační parametr (o čem je hypotéza) | populační průměr | populační medián (distribuční funkce) |
| jeden výběr | jednovýběrový *t*-test | jednovýběrový Wilcoxon |
| výběr dvojic | párový *t*-test | znaménkový, Wilcoxon |
| dva nezávislé výběry | dvouvýběrový *t*-test | Mann-Whitney (Kolmogorov-Smirnov) |
| *k* nezávislých výběrů | analýza rozptylu jedn. třídění | Kruskal-Wallis |
| výběr *r*-tic | analýza rozptylu náhodné bloky | Friedman |





## motivační příklad pro analýzu rozptylu (játra):

- pět míst na řece, vždy vyloveno po 7 rybách
- zjišťována koncentrace mědi v játrech
- liší se tato místa svým znečištěním?
- logaritmování na pravé straně stabilizuje rozptyl

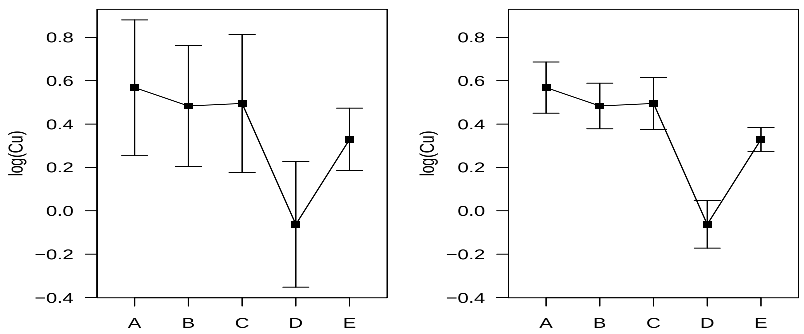







## jiné zobrazení dat (error bars)

- v obou grafech jsou znázorněny průměry na jednotlivých místech
- vlevo: úsečky = směrodatné odchylky, vyjadřují **variabilitu dat**
- vpravo úsečky = střední chyba průměru, vyjadřují **přesnost odhadů středních hodnot**








## analýza rozptylu jednoduchého třídění (ANOVA)

- $Y_{11}, \dots, Y_{1n_1} \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ (první výběr, průměr $\bar{Y}_{1\bullet}$)
  $Y_{21}, \dots, Y_{2n_2} \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ (druhý výběr, průměr $\bar{Y}_{2\bullet}$)
  $\dots$
  $Y_{k1}, \dots, Y_{kn_k} \sim \mathrm{N}(\mu_k, \sigma^2)$ ($k$-tý výběr, průměr $\bar{Y}_{k\bullet}$)
- **nezávislé** výběry (shodné rozptyly, normální rozdělení)
- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (= \mu)$ $\qquad H_1$ : neplatí $H_0$
- celkový průměr $\bar{Y}_{\bullet\bullet}$, celkový rozsah $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$
- rozklad součtu čtverců

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_i}(Y_{it} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_i}(Y_{it} - \bar{Y}_{i\bullet})^2$$

(celková variabilita) = (variabilita mezi) + (variabilita uvnitř)

$$S_T = S_A + S_e$$

$$f_T = f_A + f_e$$

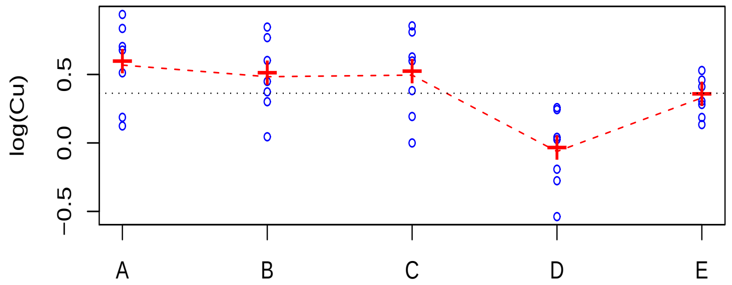
$$(n-1) = (k-1) + (n-k)$$

## rozklad součtu čtverců

příklad játra (celkový průměr $\bar{y}_{\bullet\bullet} = 0{,}36$)

(celková variabilita) = (variabilita mezi) + (variabilita uvnitř)

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_i}(Y_{it} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_i}(Y_{it} - \bar{Y}_{i\bullet})^2$$








## tabulka analýzy rozptylu

$$\text{H}_0 \text{ zamítnout, je-li } F_A = \frac{S_A/f_A}{S_e/f_e} \geq F_{f_A,f_e}(\alpha)$$

| variabilita | $S$ | $f$ | $S/f$ | $F$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| výběry | $S_A$ | $f_A = k - 1$ | $S_A/f_A$ | $F_A$ | $p_A$ |
| reziduální | $S_e$ | $f_e = n - k$ | $S_e/f_e$ | | |
| celková | $S_T$ | $f_T = n - 1$ | | | |

- $S$ – součty čtverců, jejich rozklad
- $f$ – počty stupňů volnosti
- $S/f$ – průměrné čtverce
- $F$ – $F$-statistika
- $p$ – $p$-hodnota





## příklad játra

| variab. | $S$ | $f$ | $S/f$ | $F$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| místa | 1,796 | 4 | 0,4490 | 5,862 | 0,0013 |
| rezid. | 2,285 | 30 | 0,0762 | | |
| celk. | 4,081 | 34 | | | |

$F = 5{,}862 > F_{4,30}(0{,}05) = 2{,}690$
na 5% hladině jsme **prokázali rozdíl**
[summary(aov(lnCu~Misto,data=Med))]
nebo také
[anova(lm(lnCu~Misto,data=Med))]





## varianty zápisu modelu AR jednoduchého třídění

- **model** – idealizovaná představa o vzniku pozorované hodnoty
- měření = úroveň + náhodná „chyba“
  měření = systematická složka + náhodná složka

$$\begin{aligned} Y_{it} &= \mu_i + E_{it} & 1 \leq t \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq k \\ &= \mu + (\mu_i - \mu) + E_{it} & E_{it} \text{ nezávislé} \\ &= \mu + \alpha_i + E_{it} & E_{it} \sim \text{N}(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

- **reparametrizace** ($\alpha_i$ – **efekty** faktoru $A$):

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$$

- $\text{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$ (totéž jako $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$)
- pro $k = 2$ je $F_A = T^2$ (vztah s dvouvýběrovým $t$-testem)

## ověření předpokladů

- **nezávislost**: dáno organizací (plánem) pokusu
  předpoklad nelze vynechat či nahradit
- **shoda rozptylů**: (vyvážený model je málo citlivý na neshodu)
  - Leveneův test
    (vlastně jednoduché třídění s $|Y_{it} - \mathrm{med}_t Y_{it}|$)
    $p = 64{,}8$ % [levene.test(lnCu,Misto)]
  - Bartlettův test
    (citlivý na splnění předpokladu o normálním rozdělení)
    $p = 45{,}3$ % [bartlett.test(lnCu,Misto)]
- **normální rozdělení**: (vyvážený model je málo citlivý na nenormalitu), test normality nutno uplatnit na rezidua $Y_{it} - \bar{Y}_{i\bullet}$ (na všech $n$ reziduí najednou) $p = 6{,}8$ %
  [shapiro.test(resid(aov(lnCu∼Misto)))]
  nebo [shapiro.test(resid(lm(lnCu∼Misto)))]





## mnohonásobná srovnání

(Tukeyův test, Kramerova verze)

- nutnost zachovat zvolenou hladinu testu i při současném rozhodování o řadě hypotéz
  (např. že $\mu_1 = \mu_2, \quad \mu_1 = \mu_3, \quad \mu_2 = \mu_3, \quad \ldots$)
- které dvojice úrovní faktoru (stř. hodnoty $\mu_i$ resp. efekty $\alpha_i$) se liší?

$$|\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}| \geq q_{k,n-k}(\alpha)\sqrt{\frac{S^2}{2}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

kde $q_{k,n-k}(\alpha)$ je tabelovaná kritická hodnota

$$S^2 = \frac{S_e}{f_e} = \frac{\sum\sum(Y_{it} - \bar{Y}_{i\bullet})^2}{n-k}$$





## příklad játra

| místo | počet | průměr | efekt | směr. odchylka |
|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 0,568 | 0,206 | 0,312 |
| B | 7 | 0,484 | 0,121 | 0,279 |
| C | 7 | 0,495 | 0,133 | 0,318 |
| D | 7 | -0,063 | -0,426 | 0,290 |
| E | 7 | 0,329 | -0,034 | 0,144 |
| celkem | 35 | 0,363 | 0,000 | 0,104 |

$$q_{5,30}(0{,}05)\sqrt{\frac{0{,}0762}{2}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right)} = 4{,}10 \cdot 0{,}104 = 0{,}428$$

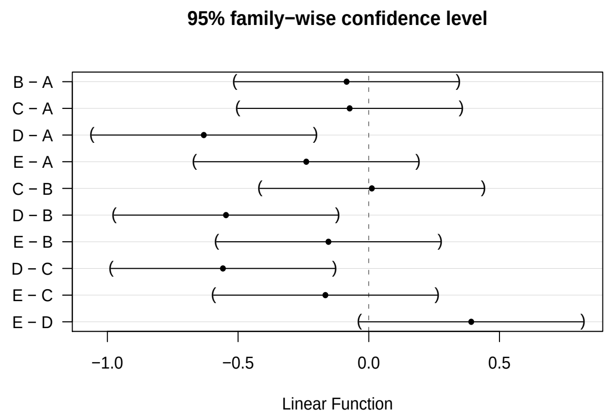
$-0{,}063 + 0{,}428 = 0{,}365 \Rightarrow$ na 5% hladině se místa D s nejmenším průměrem liší všechna místa s průměry aspoň 0,365, tedy místa A, B, C, nikoliv E
[TukeyHSD(aov(lnCu∼Misto,data=Med))]





## příklad játra

funkce [TukeyHSD(aov(lnCu∼Misto,data=Med))]
dá tabulku porovnání všech dvojic
pomocí knihovny Rcmdr dostaneme také graf



## Kruskalův-Wallisův text
(neparametrický test)

- zobecnění dvouvýběrového Wilcoxonova testu (použije opět pořadí místo původních hodnot)
- předpoklady:
  - $k$ nezávislých výběrů
  - spojitá rozdělení
- $H_0$: rozdělení jsou stejná (tedy i mediány jsou stejné)
- $T_i$ - součet pořadí v $i$-tém výběru

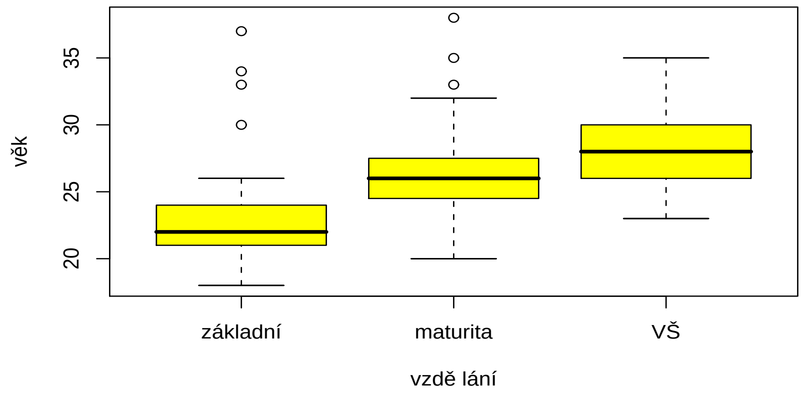
$$Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

$H_0$ se zamítá při $Q \geq \chi^2_{k-1}(\alpha)$
(velká variabilita průměrných pořadí)





## příklad kojení – věk matek podle vzdělání




je patrná nesymetrie, zejména u základního vzdělání





## příklad kojení – věk matek podle vzdělání

| vzdělání | $n_i$ | průměrný věk | střední chyba | součet pořadí | průměrné pořadí |
|---|---|---|---|---|---|
| základní | 34 | 23,412 | 0,638 | 1025 | 30,15 |
| maturita | 47 | 26,278 | 0,543 | 2618 | 55,70 |
| VŠ | 18 | 28,500 | 0,877 | 1307 | 72,61 |
| celk. | 99 | 25,697 | | 4950 | 50,00 |

$$Q = \frac{12}{99 \cdot 100} \left( \frac{1025^2}{34} + \frac{2618^2}{47} + \frac{1307^2}{18} \right) - 3 \cdot 100 = 29{,}25$$

$$\chi^2_2(0{,}05) = 5{,}99 \qquad p < 0{,}0001$$

[kruskal.test(vek.m~Vzdelani,data=Kojeni)]
(přesnější hodnocení přihlíží ke shodám při určování pořadí)





## motivační příklad diety: váhové přírůstky za danou dobu
rozšíření úlohy párového testu

| vrh | dieta A | B | C | D | průměr |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,6 | 5,2 | 7,4 | 9,1 | 7,075 |
| 2 | 10,1 | 11,4 | 13,0 | 12,6 | 11,775 |
| 3 | 5,8 | 4,2 | 9,5 | 8,8 | 7,075 |
| 4 | 12,1 | 10,7 | 11,9 | 13,0 | 11,925 |
| 5 | 8,2 | 8,8 | 9,6 | 9,4 | 9,000 |
| průměr | 8,56 | 8,06 | 10,28 | 10,58 | 9,370 |

- $r = 4$ ošetření (pevné efekty, zvolili jsme je sami)
- $k = 5$ vrhů (náhodné efekty, zvolila je náhodně příroda)
- jsou patrné rozdíly mezi průměry pro jednotlivá ošetření i pro jednotlivé vrhy
- kdyby byly jen dvě diety ($r = 2$), použili bychom párový test (sourozenci možná reagují na dietu podobně)

# náhodné bloky

**normální rozdělení** náhodné složky modelu

- účel: porovnat dvě nebo více **ošetření** na stejných objektech
- zobecnění **párových testů** na $r$-tice
- **náhodný blok**
  - homogenní skupina $r$ objektů
  - počet objektů ve skupině = počet ošetření (nebo jeho násobek)
  - ošetření se přiřadí uvnitř bloku **náhodně** (každému ošetření stejný počet objektů)
- bloky – náhodné efekty $A_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_A^2)$ (vliv bloku)
  ošetření – pevné efekty $\beta_j$ $(\sum_{j=1}^{r} \beta_j = 0)$ (vliv ošetření)

  $$Y_{ij} = \mu + A_i + \beta_j + E_{ij}, \quad E_{ij} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \quad j = 1, \ldots, r; i = 1, \ldots, k$$

  předpokládá se **aditivní** vliv, symbolicky zapisovaný $A + B$ (vliv ošetření je stejný při různých hodnotách $A_i$)





# náhodné bloky

- testované hypotézy
  - $\mathrm{H}_B : \beta_1 = \ldots = \beta_r = 0$ (ošetření $B$ nemá vliv)
  - případně $\mathrm{H}_A : \sigma_A^2 = 0$ (nulová variabilita mezi bloky)
- rozklad variability

  $$S_T = S_A + S_B + S_e$$

- vliv dvou **faktorů**
  - A – náhodný: nastavuje příroda, při opakování pokusu budou úrovně jiné
  - B – pevný: nastavuje experimentátor, při opakování pokusu budou úrovně stejné
  - rozhodování zda A je pevný nebo náhodný efekt závisí na cíli výzkumu, na interpretaci





# příklad diety

- tabulka ANOVA

| variabilita | $S$ | $f$ | $S/f$ | $F$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| vrhy | 91,932 | 4 | 22,983 | (22,26) | (<0,0001) |
| dieta | 23,322 | 3 | 7,774 | 7,53 | 0,0043 |
| reziduální | 12,388 | 12 | 1,032 | - | - |
| celk. | 127,642 | 19 | - | - | - |

- na 5% hladině jsme prokázali rozdíl mezi dietami ($p = 0{,}4$ %)
- variabilita mezi vrhy je také průkazná ($p < 0{,}1$ %)
- [summary(aov(prirustek~Error(Vrh)+Dieta,data=Mysi))]
- pro takto jednoduchý model vyjde tabulka stejně i když považujeme faktor A za pevný (nenáhodný); porovnáváme pak konkrétních pět vrhů, vrhy nechápeme jako vzorek všech možných vrhů





# příklad diety

- kdybychom **nesprávně** nevzali v úvahu závislost některých pozorování způsobenou náhodnými bloky (vrhy), dostali bychom model ANOVA jednoduchého třídění

| variabilita | $S$ | $f$ | $S/f$ | $F$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| dieta | 23,332 | 3 | 7,774 | 1,193 | 0,344 |
| reziduální | 104,320 | 16 | 6,520 | - | - |
| celk. | 127,642 | 19 | - | - | - |

- [summary(aov(prirustek~Dieta,data=Mysi))]
- porovnání se správnou tabulkou analýzy rozptylu

  $$S_e = 91{,}932 + 12{,}388 = 104{,}320, \quad f_e = 4 + 12 = 16$$

## Friedmanův test, zobecnění znaménkového testu

(neparametrický test, bez předpokladu normality)

- model $Y_{ij} = \mu + A_i + \beta_j + E_{ij}$ (náhodný řádkový efekt) nebo $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + E_{ij}$ (pevný řádkový efekt)
- $E_{ij}$ nezávislé, spojité rozdělení (nemusí být normální)
- $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_r$ (nezávisí na ošetření)
- urči pořadí v rámci každého bloku (řádku) $R_{ij}$
- za hypotézy je v každém řádku náhodná permutace čísel $1,\ldots,r$, součty ve sloupcích (pro ošetření) jsou podobné
- $$Q = \frac{12}{kr(r+1)} \sum_{j=1}^{r} \left( \sum_{i=1}^{k} R_{ij} \right)^2 - 3k(r+1)$$
- zamítat $H_0$ : pro $Q \geq \chi^2_{r-1}(\alpha)$





## příklad diety

[friedman.test(prirustek~Dieta|Vrh,data=Mysi)]

| | dieta | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| vrh | A | B | C | D | prům. |
| 1 | 6,6 | 5,2 | 7,4 | 9,1 | 7,075 |
| 2 | 10,1 | 11,4 | 13,0 | 12,6 | 11,775 |
| 3 | 5,8 | 4,2 | 9,5 | 8,8 | 7,075 |
| 4 | 12,1 | 10,7 | 11,9 | 13,0 | 11,925 |
| 5 | 8,2 | 8,8 | 9,6 | 9,4 | 9,000 |
| prům. | 8,56 | 8,06 | 10,28 | 10,58 | 9,370 |

| | dieta | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| vrh | A | B | C | D | |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 3 | |
| 3 | 2 | 1 | 4 | 3 | |
| 4 | 3 | 1 | 2 | 4 | |
| 5 | 1 | 2 | 4 | 3 | |
| součet | 9 | 7 | 17 | 17 | |

$k = 5$

$r = 4$

$$Q = \frac{12}{5 \cdot 4 \cdot 5}(9^2 + 7^2 + 17^2 + 17^2) - 3 \cdot 5 \cdot 5 = 9{,}96$$

$Q > \chi^2_3(0{,}05) = 7{,}8147$

$p = 0{,}0189$





## dvojné třídění s interakcemi

opět **normální rozdělení**, oba faktory **pevné**

- vliv dvou faktorů nemusí být aditivní ($1 \leq t \leq T$)
$$Y_{ijt} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + E_{ijt} \qquad E_{ijt} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$
- symbolicky $A + B + AB$
- $\sum_i \alpha_i = 0$ (reparametrizační podmínka) **efekty** faktoru A odpovídající jeho $k$ úrovním
- $\sum_j \beta_j = 0$ (reparametrizační podmínka) **efekty** faktoru B odpovídající jeho $r$ úrovním
- $\sum_i \gamma_{ij} = 0, \quad \sum_j \gamma_{ij} = 0$ (reparametrizační podmínka) **interakce** vyjadřují neaditivitu obou faktorů (vliv A závisí na úrovni B, vliv B závisí na úrovni A), pak dvojné třídění bez interakcí (s opakováním pro $T > 1$)





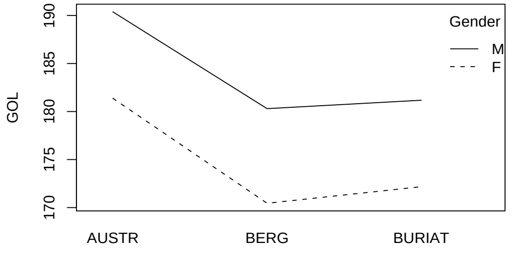
## testy ve dvojném třídění

- $H_{AB} : \gamma_{ij} = 0$ (aditivita obou faktorů) vliv úrovně faktoru A je stejný při všech úrovních faktoru B vliv úrovně faktoru B je stejný při všech úrovních faktoru A
- $H_A : \alpha_i = 0$ (faktor A nemá vliv)
- $H_B : \beta_j = 0$ (faktor B nemá vliv)
- pokud zamítneme $H_{AB}$, nemá smysl testovat $H_A, H_B$, neboť prostřednictvím interakcí oba faktory vliv mají
- v takovém případě je lépe přejít k modelu jednoduchého třídění s kombinovanými úrovněmi

## příklad Howells

- lebky exhumované na třech místech (A)
- lebky jsou rozlišovány podle pohlaví (B)
- měříme největší délku mozkovny GOL

[anova(lm(gol~Gender*Popul))] nebo
[anova(lm(gol~Gender+Popul+Gender:Popul))]




$p_{AB} = 0{,}8872$





## příklad Howells (GOL)

| pohlaví | místo | $n_{ij}$ | $\bar{y}_{ij}$ | $s_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|
| M | Berg | 40 | 180,300 | 7,293 |
| F | Berg | 40 | 170,450 | 6,641 |
| M | Austrálie | 40 | 190,375 | 5,555 |
| F | Austrálie | 40 | 181,375 | 6,632 |
| M | Sibiř | 40 | 181,175 | 6,468 |
| F | Sibiř | 40 | 172,175 | 5,228 |

| variabilita | $S$ | $f$ | $S/f$ | $F$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| místa | 5242,1 | 2 | 2621,1 | 65,2 | <0,0001 |
| pohlaví | 5170,8 | 1 | 5170,8 | 128,6 | <0,0001 |
| interakce | 9,6 | 2 | 4,8 | 0,1 | 0,8872 |
| reziduální | 9410,6 | 234 | 40,2 | | |
| celková | 19833,2 | 239 | | | |

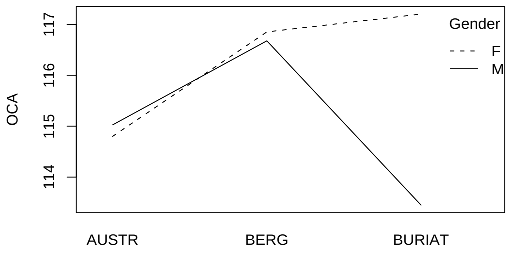




## příklad Howells

- lebky exhumované na třech místech (A)
- lebky jsou rozlišovány podle pohlaví (B)
- měříme týlní úhel OCA

[anova(lm(oca~Gender*Popul))] nebo
[anova(lm(oca~Gender+Popul+Gender:Popul))]




$p_{AB} = 0{,}0222$





## příklad Howells (OCA)

| pohlaví | místo | $n_{ij}$ | $\bar{y}_{ij}$ | $s_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|
| M | Berg | 40 | 116,675 | 5,567 |
| F | Berg | 40 | 116,850 | 5,682 |
| M | Austrálie | 40 | 115,025 | 4,382 |
| F | Austrálie | 40 | 114,800 | 4,286 |
| M | Sibiř | 40 | 113,450 | 4,782 |
| F | Sibiř | 40 | 117,200 | 4,973 |

| variabilita | $S$ | $f$ | $S/f$ | $F$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| místa | 150,908 | 2 | 75,454 | 3,05 | 0,0493 |
| pohlaví | 91,267 | 1 | 91,267 | 3,69 | 0,0560 |
| interakce | 191,608 | 2 | 95,804 | 3,87 | 0,0222 |
| reziduální | 5789,550 | 234 | 24,742 | | |
| celková | 6223,333 | 239 | | | |

## porovnání populačních měr polohy

| rozdělení | normální | spojité |
|---|---|---|
| populační parametr (o čem je hypotéza) | populační průměr | populační medián (distribuční funkce) |
| jeden výběr | jednovýběrový *t*-test | jednovýběrový Wilcoxon |
| výběr dvojic | párový *t*-test | znaménkový, Wilcoxon |
| dva nezávislé výběry | dvouvýběrový *t*-test | Mann-Whitney (Kolmogorov-Smirnov) |
| *k* nezávislých výběrů | analýza rozptylu jedn. třídění | Kruskal-Wallis |
| výběr *r*-tic | analýza rozptylu náhodné bloky | Friedman |





## vyšetřování závislosti

| nezávisle proměnná(é) | závisle proměnná | |
|---|---|---|
| | **spojitá** | **nominální** |
| **spojitá** | regrese korelace | *logistická regrese* |
| **nominální** | analýza rozptylu | kontingenční tabulky |

příklady:

- hmotnost na výšce
- rakovina plic na počtu vykouřených cigaret
- hmotnost obilky na živném roztoku
- barva očí a barva vlasů





## korelace a regrese

[correlation, regression]

- **korelace** (dvojice náhodných veličin)
  - měří **sílu** (těsnost) **vzájemné** závislosti **spojitých** veličin
  - lze použít k **prokazování** existence **vzájemné** závislosti $X, Y$
  - k **porovnávání síly** (těsnosti) závislosti v několika populacích
  - **symetrická** vlastnost veličin $X$ a $Y$
- **regrese** (náhodná veličina na nenáhodné veličině)
  - udává **jak** závisí střední hodnota **spojité** veličiny $Y$ na nezávisle proměnné (proměnných) $x$
  - **nesymetrická** vlastnost: (záv. $Y$ na $x$) $\neq$ (záv. $X$ na $y$)
  - lze použít k **prokazování existence** závislosti **závisle** proměnné $Y$ na **nezávisle** proměnné $x$
  - umožňuje **předpovídat** stř. hodnotu $Y$ pro zvolenou hodnotu $x$





## korelační koeficient

(rozlišuj **výběrový** a **populační** korelační koeficient)

- (populační) korelační koeficient $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$ (str. 83)
  - $|\rho_{XY}| \leq 1$
  - pro nezávislé $X, Y$ je $\rho_{XY} = 0$
  - konstanta, která měří sílu **lineární** závislosti
- (výběrový) korelační koeficient $r_{xy}$ (zaveden na obr. 37)

$$r_{XY} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2 \sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

  - náhodná veličina (závisí na datech)
  - odhaduje populační korelační koeficient $\rho_{XY}$
  - přesnost odhadu závisí na $n$
- alternativní označení: **Pearsonův** korelační koeficient, momentový korelační koeficient, [correlation coefficient]

## dokazování závislosti $X, Y$

- k prokázání závislosti nutno **normální** rozdělení $(X, Y)$
- $H_0 : X, Y$ nezávislé (tedy $\rho_{XY} = 0$) se na hladině $\alpha$ zamítá:

$$T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}, \qquad |T| \geq t_{n-2}(\alpha)$$

($r$ je dost daleko od nuly)

- **Spearmanův** korelační koeficient
  - měří sílu **monotonní** závislosti (nejen lineární záv.)
  - místo hodnot $X_i, Y_i$ použije jejich **pořadí** $R_i, Q_i$
  - lze upravit na tvar

$$r_{XY}^{(S)} = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i - Q_i)^2$$

  - k testu nezávislosti nepotřebuje normální rozdělení
  - $H_0$: (nezávislost) se zamítá, je-li $|r_{XY}^{(S)}\sqrt{n-1}| \geq z(\alpha/2)$

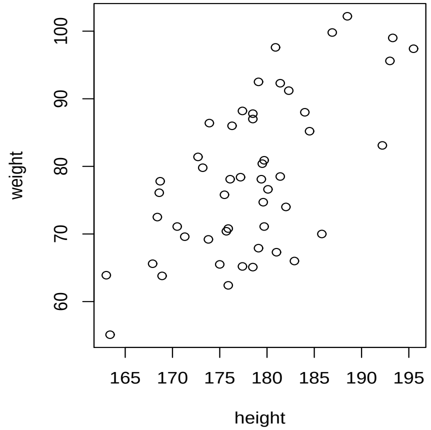




## závislost váhy a výšky u mužů

data: Policie

[plot(weight∼height)]




[cor.test(weight,height)]

$r = 0{,}648$
$t = 5{,}814$
$p < 0{,}001$

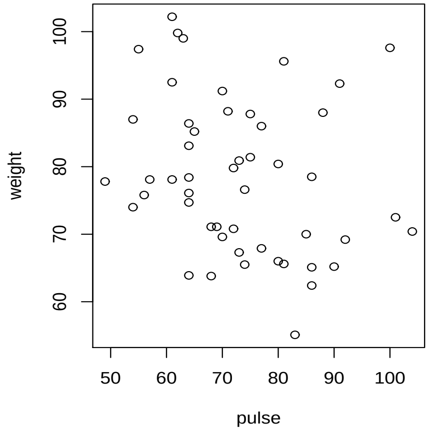




## závislost váhy a pulsu u mužů

data: Policie

[plot(weight∼pulse]




[cor.test(pulse,weight)]

$r = -0{,}245$
$t = -1{,}752$
$p = 8{,}6$ %





## Fisherova $z$-transformace

(přiblíží rozdělení výběrového korelačního koeficientu $r$ normálnímu rozdělení)

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} \dot\sim \mathrm{N}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}, \frac{1}{n-3}\right)$$

**test shody dvou nezávisle odhadovaných korel. koeficientů**

příklad **Kojeni**: výška rodičů chlapců a dívek

- dívky: $r_1 = 0{,}279,\ n_1 = 50,\ z_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0{,}279}{1-0{,}279} = 0{,}286$
- hoši: $r_2 = 0{,}150,\ n_2 = 49,\ z_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0{,}150}{1-0{,}150} = 0{,}151$
- test $H_0 : \rho_1 = \rho_2$ proti $H_1 : \rho_1 \neq \rho_2$

$$z = \frac{0{,}286 - 0{,}151}{\sqrt{\frac{1}{50-3} + \frac{1}{49-3}}} = 0{,}650.$$

srovnej s kritickou hodnotou $z(0{,}05/2) = 1{,}960$, $p = 51{,}6$ %

## interval spolehlivosti pro $\rho$

opět potřebujeme normální rozdělení $(X, Y)$

- ve dvou krocích:
  - interval spolehlivosti pro $\zeta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$
  - pomocí inverzní transformace pak int. spol. pro $\rho$
- interval spolehlivosti součástí funkce cor.test()
- náš příklad:

| skupina | $r$ (bodový odhad ) | 95% int. spol. pro $\rho$ | $p$ |
|---|---|---|---|
| dívky | 0,279 | (0,000; 0,517) | 5,01 % |
| hoši | 0,150 | (−0,137; 0,414) | 30,3 % |

- u chlapců nelze prokázat na 5% hladině závislost
- u děvčat je závislost na 10% hladině průkazná, na 5% hladině těsně nikoliv (interval spolehlivosti je jen přibližný!)





## regrese

(původ pojmu)

- tendence (návrat) k průměrnosti
  F. Galton (1886) vyšetřoval dědičnost výšky postavy
- uvažujme otce, jejichž výška je rovna průměrné výšce generace **všech** otců; průměrná výška synů otců této výšky bude rovna průměrné výšce **všech** synů
- uvažujme otce o 10 cm **vyšší**, než je průměrná výška generace otců: průměrná výška synů těchto otců bude jen asi o 5 cm **vyšší**, než průměrná výška generace synů
- uvažujme otce o 10 cm **nižší**, než je průměrná výška generace otců: průměrná výška synů těchto otců bude jen o asi 5 cm **nižší**, než průměrná výška generace synů
- průměrné výšky synů nereprodukují celou odchylku výšky otce od průměru, je tu návrat k průměru (regrese)





## regresní přímka

- **předpokládaná** závislost střední hodnoty $Y$ na nenáhodné $x$:

$$\mathrm{E}\, Y = \beta_0 + \beta_1 x$$

- k daným $x_1, \ldots, x_n$ zjistíme $Y_1, \ldots, Y_n$
- předpoklady:
  - **nezávislá** pozorování $Y_1, \ldots, Y_n$
  - **stejný** rozptyl $\sigma^2$
  - **normální** rozdělení (potřebné až pro testy, normalitu nelze ověřovat testováním přímo $Y_1, \ldots, Y_n$!)
- neznámé populační parametry $\beta_0, \beta_1$ odhadujeme metodou **nejmenších čtverců**:

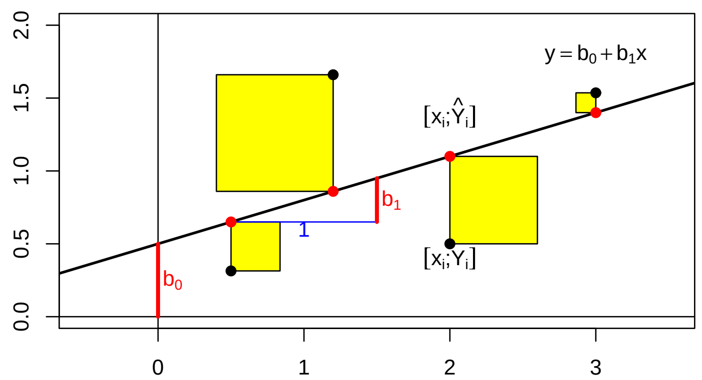
  minimalizovat přes $\beta_0, \beta_1$ výraz $$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$
- odhady označíme $b_0, b_1$





## metoda nejmenších čtverců

| | | |
|---|---|---|
| odhadovaná závislost: | $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$ | (populace) |
| odhad závislosti: | $y = b_0 + b_1 \cdot x$ | (výběr) |
| $i$-tá vyrovnaná hodnota: | $\hat{Y}_i = b_0 + b_1 x_i$ | (výběr) |
| $i$-té reziduum: | $U_i = Y_i - \hat{Y}_i$ | (výběr) |
| celková plocha čtverců: | $S_e = \sum_{i=1}^{n} U_i^2$ | (výběr) |



- $b_1$ – odhad směrnice $\beta_1$
- $b_1$ – odhad změny střední hodnoty závisle proměnné $Y$ při **jednotkové změně** nezávisle proměnné $x$
- $i$-té reziduum $U_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (b_0 + b_1 x_i)$
- $Y_i = \hat{Y}_i + U_i$
- (vysvětlováno)=(vysvětleno závislostí)+(nevysvětleno)
- **reziduální součet čtverců** (nevysvětlená variabilita):

$$S_e = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2$$

- **reziduální rozptyl** (odhad rozptylu $\sigma^2$)

$$S^2 = \frac{S_e}{n-2}$$





## alternativní formulace

- uvažovanou závislost lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} Y_i &= (\beta_0 + \beta_1 \bar{x}) + \beta_1 (x_i - \bar{x}) + E_i \\ &= \beta_0^* + \beta_1 (x_i - \bar{x}) + E_i \end{aligned}$$

- $\beta_0^*$ vyjadřuje střední úroveň vysvětlované proměnné $Y$ při průměrné hodnotě nezávisle proměnné $x$
- $\beta_1$ vyjadřuje citlivost, s jakou reaguje střední hodnota vysvětlované proměnné $Y$ na jednotkovou odchylku nezávisle proměnné $x$ od jejího průměru $\bar{x}$
- $E_i$ vyjadřuje náhodnou složku $i$-tého pozorování, $E_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$
- odhadem závislosti je ($b_1$ je stejné jako při klasickém vyjádření)

$$\hat{Y}_i = \bar{Y} + b_1 (x_i - \bar{x})$$





## prokazování závislosti

- modelujeme závislost $\mathrm{E}\,Y$ na $x$ pomocí $\mathrm{E}\,Y = \beta_0 + \beta_1 x$
- nezávislost $y = \beta_0 + \beta_1 x$ na $x$ znamená $\beta_1 = 0$
- hypotézu $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$ testujeme pomocí statistiky

$$T = \frac{b_1}{\mathrm{S.E.}(b_1)}$$

- hypotézu zamítáme, je-li $|T| \geq t_{n-2}(\alpha)$ tj. je-li příslušná $p$-hodnota $\leq \alpha$
- pokud $\mathrm{H}_0$ zamítneme, říkáme, na hladině $\alpha$ je **závislost průkazná**





## koeficient determinace

[coefficient of determination]

- podíl variability $Y$ vysvětlené uvažovanou závislostí (jakou část variability $Y$ se podařilo závislostí na $x$ vysvětlit)
-

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\text{variabilita vysvětlená}}{\text{variabilita vysvětlovaná}} = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \\ &= 1 - \frac{\text{variabilita nevysvětlená}}{\text{variabilita vysvětlovaná}} = 1 - \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \\ &= 1 - \frac{S_e}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \end{aligned}$$

- $R^2$ je bezrozměrné číslo, často vyjádřeno v procentech
- $R^2$ ukazuje, zda má smysl předpovídat pomocí regrese
- v případě regresní přímky je $R^2 = r_{XY}^2$

## příklad závislost procenta tuku na výšce

data: Policie

| regresor | $b_j$ | S.E.$(b_j)$ | $t$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| abs. člen | –53,870 | 24,657 | –2,185 | 0,0338 |
| height | 0,379 | 0,138 | 2,742 | 0,0086 |

- předpověď: $\hat{Y}_i = -53{,}870 + 0{,}379 x_i$
- $\widehat{\text{fat}} = -\,53{,}870 + 0{,}379 \cdot \text{height}$
- závislost procenta tuku na výšce je na 5% hladině průkazná, neboť $p = 0{,}86$ %
- na každý centimetr výšky *v průměru* přibude 0,379 procentního bodu tuku
- [summary(lm(fat∼height))]





## tabulka analýzy rozptylu

| variabilita | součet čtverců | st. vol. | prům. čtverec | $F$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| regrese | 362,54 | 1 | 362,54 | 7,519 | 0,0086 |
| rezid. | 2314,41 | 48 | 48,22 | | |
| celk. | 2676,95 | 49 | (54,63) | | |

- $$s^2 = 48{,}22$$
- $$R^2 = \frac{362{,}54}{2676{,}95} = 1 - \frac{2314{,}41}{2676{,}95} = 0{,}135$$
- závislostí na výšce jsme vysvětlili jen 13,5 % variability procenta tuku
- [anova(lm(fat∼height))]





## mnohonásobná lineární regrese

- závislost na dvou (nebo více) nezávisle proměnných
- pozorování $(x_1, v_1, Y_1), \ldots, (x_n, v_n, Y_n)$
- představa (model)

$$Y_i = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 v_i}_{\mathrm{E}\, Y_i} + E_i$$

- střední hodnota $Y_i$ (tj. systematická, nenáhodná složka $Y_i$) vysvětlena pomocí $x_i, v_i$ jako $\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 v_i$
- $E_1, \ldots, E_n$ (také $Y_1, \ldots, Y_n$) jsou **nezávislé** náhodné veličiny
- $E_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ (normální rozdělení se stejným rozptylem)
- $b_0, b_1, b_2$ – odhady parametrů $\beta_0, \beta_1, \beta_2$





## interpretace

- $b_1$ – odhad změny střední hodnoty $Y$ při **jednotkové** změně $x$ a **nezměněné** hodnotě $v$
- $b_2$ – odhad změny střední hodnoty $Y$ při **jednotkové** změně $v$ a **nezměněné** hodnotě $x$
- $U_i$ – **reziduum**

$$U_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (b_0 + b_1 x_i + b_2 v_i)$$

- **rozklad variability** $S_T = S_R + S_e$

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

## koeficient determinace

- **koeficient determinace** $R^2$
  podíl celkové variability, který se podařilo vysvětlit závislostí $Y$ na $x$ a $v$ (jakou část variability $Y$ se podařilo vysvětlit)

$$R^2 = \frac{S_R}{S_T} = 1 - \frac{S_e}{S_T}$$

- $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ (chování $Y$ nezávisí ani na $x$ ani na $v$)

$$F = \frac{S_R/2}{S_e/(n-3)} \geq F_{2,n-3}(\alpha)$$

- $p$-hodnota tohoto testu bývá uváděna spolu s $R^2$





## testy o přínosu jednotlivých regresorů

- model $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 v$
- $\mathrm{H}_0 : \beta_2 = 0$
  k vysvětlení chování $Y$ stačí $x$, tj. $y = \beta_0 + \beta_1 x$

$$T_2 = \frac{b_2}{\mathrm{S.E.}(b_2)}, \qquad \text{zamítat pro } |T_2| \geq t_{n-3}(\alpha)$$

- $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$
  k vysvětlení chování $Y$ stačí $v$, tj. $y = \beta_0 + \beta_2 v$

$$T_1 = \frac{b_1}{\mathrm{S.E.}(b_1)}, \qquad \text{zamítat pro } |T_1| \geq t_{n-3}(\alpha)$$

- $\mathrm{H}_0 : \beta_0 = 0$ zpravidla nemá reálný smysl





## příklad: závislost procenta tuku na výšce a váze

data: Policie

| regresor | $b_j$ | S.E.($b_j$) | $t$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| abs. člen | 11,327 | 16,682 | 0,679 | 0,5005 |
| height | –0,262 | 0,110 | –2,376 | 0,0216 |
| weight | 0,624 | 0,0690 | 9,050 | <0,0001 |

- [summary(lm(fat~height+weight))]
- při **stejné výšce** očekáváme na každý kg hmotnosti o 0,6 proc. bodu více tuku
- u mužů, kteří se liší výškou o 10 cm a **mají stejnou hmotnost** očekáváme, že ti vyšší mají v průměru o 2,6 proc. bodu **méně** tuku
- na 5% hladině nelze vyloučit výšku, průkazně přispívá k vysvětlení pomocí váhy
- na 1% hladině nelze vyloučit váhu, průkazně přispívá k vysvětlení pomocí výšky





## tabulka analýzy rozptylu

($F$-statistika je v summary(), v commanderu nutno zvolit typ I a přínosy regresorů sečíst)

| variabilita | souč. čtv, | st. vol. | prům. čtv. | $F$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| regrese | 1833,11 | 2 | 916,55 | 51,050 | <0,001 |
| rezid. | 843,85 | 47 | 17,95 | | |
| celk. | 2676,95 | 49 | (54,63) | | |

- $R^2 = 1833{,}11/2676{,}95 = 1 - 843{,}85/2676{,}95 = 0{,}685$
- závislostí na výšce a váze jsme vysvětlili 68,5 % variability procenta tuku
- $s^2 = 17{,}95$
- na každé rozumné hladině zamítáme hypotézu, podle které procento tuku nezávisí ani na výšce ani na váze

## regresní diagnostika

zda byly splněny předpoklady

a) zvolili jsme správně **tvar závislosti**?
b) je **rozptyl** všude **stejný**?
c) je přiměřeně splněn předpoklad o **normálním rozdělení**?
d) jsou opravdu pozorování **nezávislá**?
problém často tam, kde působí čas

- k odstranění problémů s body a), b), c) často pomůže transformace, např. logaritmování závisle proměnné
- [plot(lm(fat~height+weight))]





## vyšetřování závislosti

| nezávisle proměnná(é) | závisle proměnná | |
|---|---|---|
| | **spojitá** | **nominální** |
| **spojitá** | regrese korelace | (*logistická regrese*) |
| **nominální** | analýza rozptylu | kontingenční tabulky |

příklady:

- hmotnost na výšce
- rakovina plic na počtu vykouřených cigaret
- hmotnost obilky na živném roztoku
- barva očí a barva vlasů





## hodnocení kvalitativních znaků

- znaky v **nominálním** měřítku
- někdy i v ordinálním měřítku, ale uspořádání zde přehlížíme
- postupy pro ordinální znaky existují, ale zde není pro ně čas
- **příklady**
  - počty osob s krevními skupinami A, B, AB, 0
  - počty dětí narozených v jednotlivých měsících v Praze
  - počty matek se základním, středním, vysokoškolským vzděláním
- statistické jednotky třídíme podle hodnoty nominálního znaku do $k$ neslučitelných kategorií
- výsledkem je $k$-tice (náhodný vektor) četností
- modelem pro tento vektor je multinomické rozdělení





## multinomické rozdělení

- v dílčím pokusu $k$ možných výsledků (jevů) $A_1, \ldots, A_k$
- $A_1, \ldots, A_k$ jsou neslučitelné jevy, sjednocení všech je jev jistý
- $\pi_j$ je pst, že vyjde $A_j$ $\quad (\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_k = 1)$
- $n$ **nezávislých** dílčích pokusů ($n$ opakování)
- $N_j$ – počet dílčích pokusů, kdy nastalo $A_j$
- $(N_1, \ldots, N_k)$ má multinomické rozdělení s parametry $n, \pi_1, \ldots, \pi_k$
- **pravděpodobnost** toho, že $N_1 = n_1, \ldots, N_k = n_k$ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n, \quad n_1 \geq 0, \ldots, n_k \geq 0)$

$$\mathrm{P}(N_1 = n_1, \ldots, N_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \pi_1^{n_1} \ldots \pi_k^{n_k}$$

## souvislost s binomickým rozdělením

- pro $k = 2$ jsou v dílčím pokusu jen dva možné výsledky, binomické rozdělení je speciálním případem multinomického

$$\mathrm{P}\,(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!}\pi_1^{n_1}\pi_2^{n_2}$$

je totéž jako (platí přece $n_1 + n_2 = n$)

$$\mathrm{P}\,(N_1 = n_1) = \binom{n}{n_1}\pi_1^{n_1}(1-\pi_1)^{n-n_1}$$

- každé $N_j$ (samotné, proti ostatním četnostem) má binomické rozdělení, tedy

$$\boxed{N_j \sim \mathrm{bi}(n, \pi_j), \quad \mathrm{E}\,N_j = n\pi_j}$$





## vlastnost $\chi^2$ (chí-kvadrát), chí-kvadrát test dobré shody

($X^2$ – velké $\chi^2$)

- platí pro velká $n$, např. pokud $n\pi_j \geq 5$ pro všechna $j$,

$$\boxed{X^2 = \sum_{j=1}^{k}\frac{(N_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j}} \text{ má přibližně rozdělení } \chi^2_{k-1}$$

- **chí-kvadrát test dobré shody** $\mathrm{H}_0 : \pi_1 = \pi_1^0, \ldots, \pi_k = \pi_k^0$ (pravděpodobnosti jsou hypotézou dány **jednoznačně**)
- platí-li $\mathrm{H}_0$, očekáváme četnosti blízké hodnotám $\mathrm{E}\,N_j = n\pi_j^0$:
- $\mathrm{H}_0$ zamítáme, je-li $X^2 \geq \chi^2_{k-1}(\alpha)$, $\boxed{X^2 = \sum_{j=1}^{k}\frac{(N_j - n\pi_j^0)^2}{n\pi_j^0}}$
- $N_j$ – **empirické** (experimentální) četnosti, $n\pi_j^0$ – **očekávané** (teoretické) četnosti
- statistika $X^2$ (velké chí-kvadrát) porovnává experimentální a teoretické četnosti (měří jejich neshodu, „vzdálenost“)





## počty studentů biologie narozených v jednotlivých měsících

**nulová hypotéza**: děti se rodí během roku **rovnoměrně**

[chisq.test(nj,p=c(31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31)/365)]

| měsíc | $n_j$ | $n\pi_j^0$ | přínos k chí-kvadrát |
|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 9,43 | 0,2623 |
| 2 | 9 | 8,52 | 0,0276 |
| 3 | 13 | 9,43 | 1,3539 |
| 4 | 11 | 9,12 | 0,3861 |
| 5 | 8 | 9,43 | 0,2161 |
| 6 | 5 | 9,12 | 1,8635 |
| 7 | 10 | 9,43 | 0,0348 |
| 8 | 6 | 9,43 | 1,2461 |
| 9 | 13 | 9,12 | 1,6473 |
| 10 | 8 | 9,43 | 0,2161 |
| 11 | 8 | 9,12 | 0,1383 |
| 12 | 9 | 9,43 | 0,0194 |
| celkem | 111 | 111,00 | 7,4115 |

$X^2 = 7{,}4115 < \chi^2_{12-1}(0{,}05) = 19{,}675 \qquad p = 76{,}5\ \%$





## příklad: reprezentativnost výběru

(**porovnat procenta** v populaci a výběru **nestačí**)

- ve vzorku pacientů byly počty osob s krevními skupinami 0, A, B a AB po řadě 56, 72, 54, 18 (tedy $n = 200$)
- ve vyšetřované populaci jsou krevní skupiny 0, A, B a AB v poměru 35 %, 35 %, 20 % a 10 % (to určuje $\mathrm{H}_0$)
- očekáváme v průměru četnosti $200 \cdot 0{,}35 = 70 \qquad (70, 40, 20)$
- lze považovat tento výběr za reprezentativní vzhledem k výskytu krevních skupin?

$$\chi^2 = \frac{(56-70)^2}{70} + \frac{(72-70)^2}{70} + \frac{(54-40)^2}{40} + \frac{(18-20)^2}{20}$$
$$= 7{,}96 > 7{,}81 = \chi^2_3(0{,}05) \qquad p = 4{,}7\ \%$$

- výběr **nelze** považovat za reprezentativní
- při polovičních četnostech ve výběru (28, 36, 27, 9) by vyšlo $\chi^2 = 3{,}98$, $p = 26{,}4\ \%$ (**lze** považovat za reprezentativní)

## příklad: barva květů a tvar pylových zrnek

segregace dvou typů genů (C. R. Rao: Lineární metody statistické indukce ..., str. 439)

- barva květů – purpurová : červená v poměru 3 : 1 (dáno)
- tvar pylu – oválný : kulatý v poměru 3 : 1 (dáno)
- platí-li nulová hypotéza ($H_0$ : jde o **nezávislou** segregaci), pak čtyři možné kombinace musí být v poměru 9 : 3 : 3 : 1

| barva<br>tvar | pupurová<br>oválný | červená<br>oválný | purpurová<br>kulatý | červená<br>kulatý | celkem |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 296 | 27 | 19 | 85 | 427 |
| $o_j$ | 3843/16 | 1281/16 | 1281/16 | 427/16 | 427 |
| $\frac{(n_j-o_j)^2}{o_j}$ | 12,97 | 35,17 | 46,57 | 127,41 | 222,12 |

$$\chi^2 = 222{,}12 > \chi^2_3(0{,}05) = 7{,}81$$

- nezávislost jsme **zamítli**





## příklad: barva květů a tvar pylových zrnek

- co způsobilo zamítnutí hypotézy?

| barva | purpurová | červená | celkem |
|---|---|---|---|
| oválný tvar | 296 | 27 | 323 |
| kulatý tvar | 19 | 85 | 104 |
| celkem | 315 | 112 | 427 |

- jsou barvy v očekávaném poměru 3 : 1?
  [chisq.test(c(315,112),p=c(3/4,1/4))]

$$\chi^2 = 0{,}3443 \qquad p = 55{,}7\ \%$$

- jsou tvary v očekávaném poměru 3 : 1?

$$\chi^2 = 0{,}0945 \qquad p = 75{,}9\ \%$$

- důvodem zamítnutí je nutně závislost





## složená nulová hypotéza (hypotéza o struktuře)

- hypotéza určuje vztahy mezi pravděpodobnostmi $\pi_1, \dots, \pi_k$
  některé parametry zůstávají volné, je třeba je odhadnout
- příklad antigen: (Hardy-Weinberg equilibrium, nezávislost)
  model pro fenotypy AA, Aa, aa

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(AA) &\equiv \pi_1(\theta) = \theta^2 \\ \mathrm{P}(Aa) &\equiv \pi_2(\theta) = 2\theta(1-\theta) \\ \mathrm{P}(aa) &\equiv \pi_3(\theta) = (1-\theta)^2 \end{aligned}$$

- neurčený parametr $\theta$ – pravděpodobnost alely A
- jsou zjištěné četnosti fenotypů $n_1 = 18$, $n_2 = 17$, $n_3 = 6$
  v souladu s modelem, tj. s H-W rovnováhou?





## odhad metodou maximální věrohodnosti za $H_0$

[maximum likelihood estimate]

$$\mathrm{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}(\theta^2)^{n_1}(2\theta(1-\theta))^{n_2}((1-\theta)^2)^{n_3}$$

- najít $\theta$ takové, aby pravděpodobnost konkrétního výsledku byla maximální možná (maximálně věrohodná)
- odhad $\theta$ maximalizací *logaritmické věrohodnostní funkce*

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= \ln(\mathrm{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3)) \\ &= \ln\left(c_1\,(\theta^2)^{n_1}\,(2\theta(1-\theta))^{n_2}\,((1-\theta)^2)^{n_3}\right) \\ &= c_2 + (2n_1 + n_2)\ln\theta + (n_2 + 2n_3)\ln(1-\theta) \end{aligned}$$

- v našem příkladu vyjde

$$\hat{\theta} = \frac{2 \cdot N_1 + N_2}{2n} \qquad \left( = \frac{2 \cdot 18 + 17}{82} = 0{,}646 \right)$$

(počet alel $A$ na počet „míst" pro alely)
- $\theta$ má obecně $q$ nezávislých složek, zde $q = 1$
každý odhadovaný parametr ubere jeden stupeň volnosti
- $\mathrm{H}_0$ zamítá pokud

$$X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - n\pi_j(\hat{\theta}))^2}{n\pi_j(\hat{\theta})} \geq \chi^2_{k-1-q}(\alpha)$$

- příklad: $\chi^2 = 0{,}355 < \chi^2_{3-1-1}(0{,}05) = 3{,}84$
$p = 55{,}1\ \%$ hypotézu na 5% hladině nemůžeme zamítnout





## nezávislost **nominálních** znaků

- nominální znak s hodnotami $A_1, \ldots, A_r$
- nominální znak s hodnotami $B_1, \ldots, B_c$
- $N_{ij}$ kolikrát současně $A_i$ a $B_j$ (**sdružené četnosti**)
- **marginální** četnosti

$$N_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{c} N_{ij} \qquad N_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} N_{ij}$$

- **nezávislost** znaků: pro všechny dvojice $i, j$ platí

$$\mathrm{P}(A_i \cap B_j) = \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B_j)$$

- charakteristika nezávislosti: z **marginálních** pstí jevů $A_i, B_j$ dokážeme rekonstruovat **sdružené psti** jevů $A_i \cap B_j$





## test nezávislosti dvou kvalitativních znaků

hodnocení kontingenční tabulky

- $\mathrm{H}_0$ : znaky jsou **nezávislé**

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(N_{ij} - o_{ij})^2}{o_{ij}}$$

- teoretické četnosti (protějšek $N_{ij}$) – četnosti, které **v průměru očekáváme, platí-li hypotéza**

$$o_{ij} = n \cdot \mathrm{P}(\widehat{A_i \cap B_j}) = n \cdot \widehat{\mathrm{P}(A_i)} \cdot \widehat{\mathrm{P}(B_j)} = n \cdot \frac{N_{i\bullet}}{n} \cdot \frac{N_{\bullet j}}{n} = \frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n}$$

- nezávislost se zamítá pokud $X^2 \geq \chi^2_{(r-1)(c-1)}(\alpha)$
- stupně volnosti $n - 1 - q = r \cdot c - 1 - (r-1) - (c-1) = r \cdot c - r - c + 1 = (r-1)(c-1)$
- mělo by být $o_{ij} \geq 5\ \forall\ (i,j)$ (tj. pro všechny dvojice)





## příklad: kouření u mužů

data: Ichs

**empirické** sdružené a marg. četnosti

| vzdělání | zákl. | odb. | mat. | VŠ | celk. |
|---|---|---|---|---|---|
| nekuřák | 14 | 55 | 55 | 73 | 197 |
| bývalý k. | 11 | 28 | 44 | 42 | 125 |
| kuřák | 14 | 24 | 24 | 17 | 79 |
| silný k. | 78 | 189 | 175 | 106 | 548 |
| celkem | 117 | 296 | 298 | 238 | 949 |

**očekávané** sdružené a marg. četnosti

| vzdělání | zákl. | odb. | mat. | VŠ | celk. |
|---|---|---|---|---|---|
| nekuřák | 24,3 | 61,4 | 61,9 | 49,4 | 197 |
| bývalý k. | 15,4 | 39,0 | 39,3 | 31,3 | 125 |
| kuřák | 9,7 | 24,6 | 24,8 | 19,8 | 79 |
| silný k. | 67,6 | 170,9 | 172,1 | 137,4 | 548 |
| celkem | 117 | 296 | 298 | 238 | 949 |

[chisq.test(matrix(c(14,11,14,78, 55,28,24,189, 55,44,24,175, 73,42,17,106),nr=4,nc=4))]

**závislost jsme na 5% hladině prokázali**

$$\chi^2 = \frac{(14 - 24{,}3)^2}{24{,}3} + \ldots + \frac{(106 - 137{,}4)^2}{137{,}4} = 38{,}68$$

$$f = (4-1)(4-1) = 9$$

$$p < 0{,}0001$$

## příklad **Baden**

| barva očí | barva vlasů | | | | celkem |
|---|---|---|---|---|---|
| | světlá | hnědá | černá | ryšavá | |
| modrá | 1 768 | 807 | 189 | 47 | 2 811 |
| šedá/zelená | 946 | 1 387 | 746 | 53 | 3 132 |
| hnědá | 115 | 438 | 288 | 16 | 857 |
| celkem | 2 829 | 2 632 | 1 223 | 116 | 6 800 |

- barva očí $r = 3$, barva vlasů $c = 4$, $n = 6800$
- $o_{11} = 2811 \cdot 2829/6800 = 1169\ldots$
- $o_{34} = 116 \cdot 857/6800 = 14{,}62 \geq 5$

$$\chi^2 = \frac{(1768 - 1169)^2}{1169} + \frac{(807 - 1088)^2}{1088} + \ldots = 1073{,}5$$
$$> \chi^2_6(0{,}05) = 12{,}5916$$
$$p < 0{,}0001$$

závislost je na každé rozumné hladině **prokázána**





## test **homogenity**

- hodnoty znaku $B_1, \ldots, B_c$
- $r$ **nezávislých** výběrů z různých populací
- $H_0$ : populace se **neliší**
- dál stejně jako pro nezávislost
- příklad **krevní skupiny**

| populace | skupina | | | | celkem |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | A | B | AB | |
| C | 121 | 120 | 79 | 33 | 353 |
| D | 118 | 95 | 121 | 30 | 364 |
| celkem | 239 | 215 | 200 | 63 | 717 |

$$\chi^2 = \frac{(121 - 353 \cdot 239/717)^2}{353 \cdot 239/717} + \ldots = 11{,}742 > \chi^2_3(0{,}05) = 7{,}815$$

nejm. teoretická četnost: $353 \cdot 63/717 = 31{,}02 > 5$, $p = 0{,}8$ %





## **McNemarův test** (test symetrie)

nezaměňovat s testem nezávislosti!

- **párový** test pro nominální veličinu s hodnotami $B_1, \ldots, B_k$
- zjišťujeme hodnoty nominálního znaku na **stejných** objektech za **dvojích** okolností (před ošetřením, po ošetření)
- $N_{ij}$ počet objektů, u nichž první měření $B_i$ a druhé měření $B_j$
- **nulová hypotéza**: pravděpodobnosti možných hodnot znaku jsou **stejné** za obojích okolností (před ošetřením i po něm)

$$X^2 = \sum\sum_{i<j} \frac{(N_{ij} - N_{ji})^2}{N_{ij} + N_{ji}}$$

- hypotézu zamítneme při $X^2 \geq \chi^2_{k(k-1)/2}(\alpha)$
- výrazy ve jmenovateli musí být kladné!
- nezávisí na počtu objektů, kdy vyšly oba výsledky stejně ($N_{ii}$)





## příklad **stromy**

| 1994 | 1995 | | | celkem |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 1 | 4 | 3 | 3 | 10 |
| 2 | 7 | 21 | 11 | 39 |
| 3 | 1 | 15 | 35 | 51 |
| celkem | 12 | 39 | 49 | 100 |

- stav týchž stromů ve dvou sezónách
- celkem 100 stromů

$$\chi^2 = \frac{(3-7)^2}{3+7} + \frac{(3-1)^2}{3+1} + \frac{(11-15)^2}{11+15} = 3{,}215$$

- $\chi^2_3(0{,}05) = 7{,}8147$, $p = 36{,}0$ %
- rozdíl mezi sezónami jsme neprokázali
- [mcnemar.test(matrix(c(4,7,1,3,21,15,3,11,35),3,3))]

## čtyřpolní tabulka (tabulka 2×2)

znovu test nezávislosti či homogenity

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a+b$ |
| $c$ | $d$ | $c+d$ |
| $a+c$ | $b+d$ | $n$ |

- speciální případ kontingenční tabulky pro $r = c = 2$
- test nezávislosti i test homogenity
  statistiku lze upravit na pohodlnější vyjádření

$$X^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$

zamítá se pro $X^2 \geq \chi^2_1(\alpha) = z(\alpha/2)^2$





## případ malých četností

- je-li některá očekávaná četnost malá, pak lze u čtyřpolní tabulky použít upravený postup: **Yatesova korekce**

$$X^2_Y = \frac{n(|ad - bc| - n/2)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$

- **Fisherův exaktní** test počítá přímo dosaženou hladinu $p$
- pro tabulku s velkými četnostmi je výpočet Fisherova testu výpočetně náročný (paměťové nároky, trvání výpočtu)
- existuje zobecnění Fisherova testu i pro větší tabulky, než je čtyřpolní





## komplexní příklad **hraboš**

| *Frenkelia spp.* | *Sarcocystis spp.* + | *Sarcocystis spp.* − | celkem |
|---|---|---|---|
| + | 4 | 27 | 31 |
| − | 11 | 473 | 484 |
| celkem | 15 | 500 | 515 |

- souvisí spolu nákazy dvěma cizopasníky?
- nulová hypotéza: **nezávislost**

$$\chi^2 = \frac{515(4 \cdot 473 - 11 \cdot 27)^2}{15 \cdot 500 \cdot 31 \cdot 484} = 11{,}643, \quad p = 0{,}06\ \%$$

- nejmenší očekávaná četnost: $15 \cdot 31/515 = 0{,}9 < 5$
- [chisq.test(matrix(c(4,11,27,473),2,2),correct=FALSE)]





## příklad **hraboš**

- **Yates**: $\chi^2 = 8{,}187$ $p = 0{,}42\ \%$
  [chisq.test(matrix(c(4,11,27,473),2,2))]
- **Fisherův test**: $p = 0{,}92\ \%$
  [fisher.test(matrix(c(4,11,27,473),2,2))]
- na 5% hladině závislost **prokázána**
- **vyskytují se dvojí cizopasníci se stejnou pstí?**
  (zcela jiná otázka, než na nezávislost)
- odpověď dá McNemarův test:

$$\chi^2 = \frac{(11-27)^2}{11+27} = 6{,}7368, \qquad p = 0{,}94\ \%$$

[mcnemar.test(matrix(c(4,11,27,473),2,2),correct=FALSE)]

## příklad: barva květů a tvar pylových zrnek

(jiný postup)

- připoměňme data

| barva | purpurová | červená | celkem |
|---|---|---|---|
| oválný tvar | 296 | 27 | 323 |
| kulatý tvar | 19 | 85 | 104 |
| celkem | 315 | 112 | 427 |

- kdybychom **neznali** předem teoretické poměry u barvy a tvaru, použijeme běžný postup pro čtyřpolní tabulku

$$\chi^2 = \frac{427 \cdot (296 \cdot 85 - 19 \cdot 27)^2}{315 \cdot 112 \cdot 323 \cdot 104} = 218{,}9 > \chi^2_1(0{,}05) = 3{,}84$$

- při **daných** marginálních pstech a předpokládané **nezávislosti** bylo (str. 217) $\chi^2 = 222{,}12$ porovnáváno s $\chi^2_3(0{,}05) = 7{,}81$
- nyní marginální psti odhadujeme, kdežto dříve jsme je znali





## jak statistiku použijeme

- co o problému zjistili jiní? (přečti, sepiš)
- co chceš zjistit?
  - zformuluj otázku (to určí možné statistické metody)
  - zformuluj nulovou a alternativní hypotézu
- zvol hladinu testu $\alpha$
- zvol rozsah výběru (přesnost, délka int. spolehlivosti, síla testu)
- pořiď data
  - proveď měření (podrobné záznamy!)
  - převeď do elektronické formy (kódování)
  - vyčisti data (grafy, popisné statistiky,...)
- proveď výpočty, kresli grafy
- použij výsledky a grafy, interpretuj





## dvojí původ dat

- **plánovaný** (organizovaný) **pokus**
  - aktivně zasahujeme
  - fixujeme okolnosti (stálá teplota, světelný režim)
  - nastavujeme úrovně zvoleného faktoru (např. živné roztoky)
  - jedincům náhodně přiřazujeme ošetření
  - zjistíme-li rozdíl, známe jeho příčinu
- **šetření** (sledování dění)
  - pouze sledujeme, nezasahujeme
  - rozdíl mezi porovnávanými skupinami může být způsoben matoucí (**confounding**) veličinou, která souvisí s rozdělením do skupin i s měřeným znakem (příklad: plánované těhotenství na vzdělání matky, matoucí veličinou je věk matky)
  - rozdělení do skupin nemůžeme ovlivnit, je dáno
  - může záležet na tom, zda dělíme podle možných příčin (kohortové studie, poměr rizik RR vypovídá) nebo následků (case-control, RR nevypovídá, poměr šancí OR ano)





## jaké úlohy řešíme

dělení podle skupin statistických metod

- **popsat stav** (popisná statistika, Exploratory Data Analysis $\Rightarrow$ formulace vědeckých hypotéz)
  - poloha (průměr, medián, kvartily,...)
  - variabilita (směr. odchylka, rozptyl, kvartilové rozpětí)
  - závislost (korelační koeficient, Spearmanův korel. koeficient)
  - tvar rozdělení (šikmost, špičatost)
- **prokázat vliv ošetření** (induktivní, konfirmační statistika)
  - změna polohy ($t$-testy, analýza rozptylu)
  - změna variability (Levene, $F$-test, Bartlettův test)
  - jiná změna rozdělení (Kolmogorov-Smirnov)
- **prokázat závislost** (induktivní, konfirmační statistika)
  - obě spojité (korelační koeficient, regrese)
  - spojitá na kvalitativními (ANOVA)
  - obě kvalitativní (chí-kvadrát v kontingenční tabulce)
  - **predikce** spojité veličiny na spojitých či kvalitativních (regrese)

## výběr metody

- jakou úlohu řešíme?
- jsou výběry nezávislé?
  - zajistit organizací pokusu
- lze předpokládat normální rozdělení?
  - lze soudit z grafu (normální diagram)
  - lze ověřovat pomocí testů
  - v jednotlivých výběrech nebo z reziduí (v regresi)
- je rozptyl stálý?
  - lze soudit z grafu (rozptylový diagram)
  - lze ověřovat pomocí testů
  - porovnat výběry nebo z reziduí
  - u regrese lze ověřit pomocí Breuschova-Paganova testu





## volba nulové a alternativní hypotézy

- $H_0$ zjednodušuje model
  - hypotéza přesněji určuje model (např. test dobré shody)
  - populace se neliší (výběry se liší jen náhodně)
  - veličiny jsou nezávislé
  - $H_0$ zpravidla chceme vyvrátit abychom prokázali svoji vědeckou hypotézu
- $H_1$ je opak nulové hypotézy
  - pokud existuje jednostranná alternativní hypotéza, musíme ji zvolit **před pokusem** na základě úvah, které **nejsou** založeny na použitých datech
  - zpravidla obsahuje více možností než nulová hypotéza
  - zpravidla obsahuje tvrzení, které chceme dokázat
- pouze zamítnutím $H_0$ něco dokazujeme
- u každého testu jsou nulová i alternativní hypotézy dány, nemůžeme je přehodit





## porovnání populačních měr polohy

| rozdělení | normální | spojité |
|---|---|---|
| populační parametr (o čem je hypotéza) | populační průměr | populační medián (distribuční funkce) |
| jeden výběr | jednovýběrový $t$-test | jednovýběrový Wilcoxon |
| výběr dvojic | párový $t$-test | znaménkový, Wilcoxon |
| dva nezávislé výběry | dvouvýběrový $t$-test | Mann-Whitney (Kolmogorov-Smirnov) |
| $k$ nezávislých výběrů | analýza rozptylu jedn. třídění | Kruskal-Wallis |
| výběr $r$-tic | analýza rozptylu náhodné bloky | Friedman |





## vyšetřování závislosti

| nezávisle proměnná(é) | závisle proměnná | |
|---|---|---|
| | **spojitá** | **nominální** |
| **spojitá** | regrese korelace | (*logistická regrese*) |
| **nominální** | analýza rozptylu | kontingenční tabulky |

příklady:

- hmotnost na výšce
- rakovina plic na počtu vykouřených cigaret
- hmotnost obilky na živném roztoku
- barva očí a barva vlasů