# Základy biostatistiky

## (MD710P09)
## ak. rok 2008/2009

Karel Zvára

karel.zvara@mff.cuni.cz
http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼zvara
katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK

(naposledy upraveno 6. dubna 2009)

# párové testy
(převedou se na jednovýběrové)

- $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ – párová pozorování
  **nezávislé** dvojice (možná) závislých náhodných veličin
- těsná závislost uvnitř dvojic je výhodná
- $X_i = U_i - V_i$ (označení rozdílů)
- předpokládáme **stejné rozdělení** $X_1, \ldots, X_n$
- $U_i, V_i$ – dvojice měření na stejných jedincích, např. hodnota zjištěná před ošetřením a po něm
- např. výška otce a jeho syna nebo věk otce a věk matky
- **nezajímá nás** zda je mezi nimi **závislost**, tu připouštíme,
  **zajímá nás zda** jsou **co do polohy stejné**,
  nebo např. synové v (populačním) průměru vyšší, než otcové
- $H_0$ tvrdí, že např. mezi výškami otců a synů **není rozdíl**, tedy že rozdíly $X_i$ **kolísají kolem nuly**

# párové testy
(převedou se na jednovýběrové)

- $(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$ – párová pozorování
  **nezávislé** dvojice (možná) závislých náhodných veličin
- těsná závislost uvnitř dvojic je výhodná
- $X_i = U_i - V_i$ (označení rozdílů)
- předpokládáme **stejné rozdělení** $X_1, \dots, X_n$
- $U_i, V_i$ – dvojice měření na stejných jedincích, např. hodnota zjištěná před ošetřením a po něm
- např. výška otce a jeho syna nebo věk otce a věk matky
- **nezajímá nás** zda je mezi nimi **závislost**, tu připouštíme,
  **zajímá nás zda** jsou **co do polohy stejné**,
  nebo např. synové v (populačním) průměru vyšší, než otcové
- $H_0$ tvrdí, že např. mezi výškami otců a synů **není rozdíl**, tedy že rozdíly $X_i$ **kolísají kolem nuly**

# párové testy
(převedou se na jednovýběrové)

- $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ – párová pozorování
  **nezávislé** dvojice (možná) závislých náhodných veličin
- těsná závislost uvnitř dvojic je výhodná
- $X_i = U_i - V_i$ (označení rozdílů)
- předpokládáme **stejné rozdělení** $X_1, \ldots, X_n$
- $U_i, V_i$ – dvojice měření na stejných jedincích, např. hodnota zjištěná před ošetřením a po něm
- např. výška otce a jeho syna nebo věk otce a věk matky
- **nezajímá nás** zda je mezi nimi **závislost**, tu připouštíme,
  **zajímá nás zda** jsou **co do polohy stejné**,
  nebo např. synové v (populačním) průměru vyšší, než otcové
- $H_0$ tvrdí, že např. mezi výškami otců a synů **není rozdíl**, tedy že rozdíly $X_i$ **kolísají kolem nuly**

# párové testy
(převedou se na jednovýběrové)

- $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ – párová pozorování
  **nezávislé** dvojice (možná) závislých náhodných veličin
- těsná závislost uvnitř dvojic je výhodná
- $X_i = U_i - V_i$ (označení rozdílů)
- předpokládáme **stejné rozdělení** $X_1, \ldots, X_n$
- $U_i, V_i$ – dvojice měření na stejných jedincích, např. hodnota zjištěná před ošetřením a po něm
- např. výška otce a jeho syna nebo věk otce a věk matky
- **nezajímá nás** zda je mezi nimi **závislost**, tu připouštíme,
  **zajímá nás zda** jsou **co do polohy stejné**,
  nebo např. synové v (populačním) průměru vyšší, než otcové
- $H_0$ tvrdí, že např. mezi výškami otců a synů **není rozdíl**, tedy že rozdíly $X_i$ **kolísají kolem nuly**

# párové testy
(převedou se na jednovýběrové)

- $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ – párová pozorování **nezávislé** dvojice (možná) závislých náhodných veličin
- těsná závislost uvnitř dvojic je výhodná
- $X_i = U_i - V_i$ (označení rozdílů)
- předpokládáme **stejné rozdělení** $X_1, \ldots, X_n$
- $U_i, V_i$ – dvojice měření na stejných jedincích, např. hodnota zjištěná před ošetřením a po něm
- např. výška otce a jeho syna nebo věk otce a věk matky
- **nezajímá nás** zda je mezi nimi **závislost**, tu připouštíme, **zajímá nás zda** jsou **co do polohy stejné**, nebo např. synové v (populačním) průměru vyšší, než otcové
- $H_0$ tvrdí, že např. mezi výškami otců a synů **není rozdíl**, tedy že rozdíly $X_i$ **kolísají kolem nuly**

# párové testy
(převedou se na jednovýběrové)

- $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ – párová pozorování
  **nezávislé** dvojice (možná) závislých náhodných veličin
- těsná závislost uvnitř dvojic je výhodná
- $X_i = U_i - V_i$ (označení rozdílů)
- předpokládáme **stejné rozdělení** $X_1, \ldots, X_n$
- $U_i, V_i$ – dvojice měření na stejných jedincích, např. hodnota zjištěná před ošetřením a po něm
- např. výška otce a jeho syna nebo věk otce a věk matky
- **nezajímá nás** zda je mezi nimi **závislost**, tu připouštíme,
  **zajímá nás zda** jsou **co do polohy stejné**,
  nebo např. synové v (populačním) průměru vyšší, než otcové
- $H_0$ tvrdí, že např. mezi výškami otců a synů **není rozdíl**, tedy že rozdíly $X_i$ **kolísají kolem nuly**

# párové testy
(převedou se na jednovýběrové)

- $(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$ – párová pozorování
  **nezávislé** dvojice (možná) závislých náhodných veličin
- těsná závislost uvnitř dvojic je výhodná
- $X_i = U_i - V_i$ (označení rozdílů)
- předpokládáme **stejné rozdělení** $X_1, \dots, X_n$
- $U_i, V_i$ – dvojice měření na stejných jedincích, např. hodnota zjištěná před ošetřením a po něm
- např. výška otce a jeho syna nebo věk otce a věk matky
- **nezajímá nás** zda je mezi nimi **závislost**, tu připouštíme,
  **zajímá nás zda** jsou **co do polohy stejné**,
  nebo např. synové v (populačním) průměru vyšší, než otcové
- $H_0$ tvrdí, že např. mezi výškami otců a synů **není rozdíl**, tedy že rozdíly $X_i$ **kolísají kolem nuly**

# párové testy
(převedou se na jednovýběrové)

- $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ – párová pozorování
  **nezávislé** dvojice (možná) závislých náhodných veličin
- těsná závislost uvnitř dvojic je výhodná
- $X_i = U_i - V_i$ (označení rozdílů)
- předpokládáme **stejné rozdělení** $X_1, \ldots, X_n$
- $U_i, V_i$ – dvojice měření na stejných jedincích, např. hodnota zjištěná před ošetřením a po něm
- např. výška otce a jeho syna nebo věk otce a věk matky
- **nezajímá nás** zda je mezi nimi **závislost**, tu připouštíme,
  **zajímá nás zda** jsou **co do polohy stejné**,
  nebo např. synové v (populačním) průměru vyšší, než otcové
- $H_0$ tvrdí, že např. mezi výškami otců a synů **není rozdíl**, tedy že rozdíly $X_i$ **kolísají kolem nuly**

# párový $t$-test

## předpoklad normálního rozdělení rozdílů

- **normální** rozdělení: $X_i = U_i - V_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, **nezávislé**
- $\mathrm{H}_0 : \mu = 0$ (pak je $\mu_U = \mu_V$)
- odhad $\sigma^2$: $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
- $T = \dfrac{\bar{X}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \dfrac{\bar{X}}{S}\sqrt{n} = \dfrac{\bar{U}-\bar{V}}{\mathrm{S.E.}(\bar{U}-\bar{V})}$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 0$, když $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu < 0$, když $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu > 0$, když $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- vlastně jednovýběrový $t$-test pro $X_i = U_i - V_i$

# párový $t$-test

## předpoklad normálního rozdělení rozdílů

- **normální** rozdělení: $X_i = U_i - V_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, **nezávislé**
- $\mathrm{H}_0 : \mu = 0$ (pak je $\mu_U = \mu_V$)
- odhad $\sigma^2$: $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- $T = \dfrac{\bar{X}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \dfrac{\bar{X}}{S}\sqrt{n} = \dfrac{\bar{U} - \bar{V}}{\mathrm{S.E.}(\bar{U} - \bar{V})}$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 0$, když $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu < 0$, když $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu > 0$, když $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- vlastně jednovýběrový $t$-test pro $X_i = U_i - V_i$

# párový $t$-test

## předpoklad normálního rozdělení rozdílů

- **normální** rozdělení: $X_i = U_i - V_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, **nezávislé**
- $\mathrm{H}_0 : \mu = 0$ (pak je $\mu_U = \mu_V$)
- odhad $\sigma^2$: $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- $T = \dfrac{\bar{X}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \dfrac{\bar{X}}{S}\sqrt{n} = \dfrac{\bar{U} - \bar{V}}{\mathrm{S.E.}(\bar{U} - \bar{V})}$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 0$, když $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu < 0$, když $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu > 0$, když $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- vlastně jednovýběrový $t$-test pro $X_i = U_i - V_i$

# párový $t$-test
## předpoklad normálního rozdělení rozdílů

- **normální** rozdělení: $X_i = U_i - V_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, **nezávislé**
- $\mathrm{H}_0 : \mu = 0$ (pak je $\mu_U = \mu_V$)
- odhad $\sigma^2$: $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- $T = \dfrac{\bar{X}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \dfrac{\bar{X}}{S}\sqrt{n} = \dfrac{\bar{U} - \bar{V}}{\mathrm{S.E.}(\bar{U} - \bar{V})}$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 0$, když $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu < 0$, když $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu > 0$, když $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- vlastně jednovýběrový $t$-test pro $X_i = U_i - V_i$

# párový $t$-test

## předpoklad normálního rozdělení rozdílů

- **normální** rozdělení: $X_i = U_i - V_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, **nezávislé**
- $\mathrm{H}_0 : \mu = 0$ (pak je $\mu_U = \mu_V$)
- odhad $\sigma^2$: $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$
- $T = \dfrac{\bar{X}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \dfrac{\bar{X}}{S}\sqrt{n} = \dfrac{\bar{U} - \bar{V}}{\mathrm{S.E.}(\bar{U} - \bar{V})}$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 0$, když $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu < 0$, když $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu > 0$, když $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- vlastně jednovýběrový $t$-test pro $X_i = U_i - V_i$

# párový $t$-test

## předpoklad normálního rozdělení rozdílů

- **normální** rozdělení: $X_i = U_i - V_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, **nezávislé**
- $\mathrm{H}_0 : \mu = 0$ (pak je $\mu_U = \mu_V$)
- odhad $\sigma^2$: $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- $T = \dfrac{\bar{X}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \dfrac{\bar{X}}{S}\sqrt{n} = \dfrac{\bar{U} - \bar{V}}{\mathrm{S.E.}(\bar{U} - \bar{V})}$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 0$, když $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu < 0$, když $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu > 0$, když $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- vlastně jednovýběrový $t$-test pro $X_i = U_i - V_i$

# párový $t$-test

## předpoklad normálního rozdělení rozdílů

- **normální** rozdělení: $X_i = U_i - V_i \sim \mathrm{N}\big(\mu, \sigma^2\big)$, **nezávislé**
- $\mathrm{H}_0 : \mu = 0$ (pak je $\mu_U = \mu_V$)
- odhad $\sigma^2$: $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \big(X_i - \bar{X}\big)^2$
- $T = \dfrac{\bar{X}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \dfrac{\bar{X}}{S}\sqrt{n} = \dfrac{\bar{U} - \bar{V}}{\mathrm{S.E.}(\bar{U} - \bar{V})}$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 0$, když $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu < 0$, když $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu > 0$, když $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- vlastně jednovýběrový $t$-test pro $X_i = U_i - V_i$

# párový $t$-test

## předpoklad normálního rozdělení rozdílů

- **normální** rozdělení: $X_i = U_i - V_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, **nezávislé**
- $\mathrm{H}_0 : \mu = 0$ (pak je $\mu_U = \mu_V$)
- odhad $\sigma^2$: $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- $T = \dfrac{\bar{X}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \dfrac{\bar{X}}{S}\sqrt{n} = \dfrac{\bar{U}-\bar{V}}{\mathrm{S.E.}(\bar{U}-\bar{V})}$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 0$, když $|T| \geq t_{n-1}(\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu < 0$, když $T \leq -t_{n-1}(2\alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu > 0$, když $T \geq t_{n-1}(2\alpha)$
- vlastně jednovýběrový $t$-test pro $X_i = U_i - V_i$

# příklad: výšky rodičů (párová pozorování!)

H$_0$: otcové jsou o 10 cm vyšší matek

- $U$ – výška otce, $V$ – výška matky, $X = U - V - 10$
- $\alpha = 0{,}05$, $\mathrm{H}_0 : \mu_U - 10 = \mu_V$ resp. $\mu_U - \mu_V = 10$
- $n = 99, \bar{u} = 179{,}267, \bar{v} = 166{,}970$
- $\bar{x} = \bar{u} - \bar{v} - 10 = 2{,}293, s_X = s_{U-10-V} = s_{U-V} = 8{,}144$
- $t = \frac{2{,}293}{8{,}144}\sqrt{99} = 2{,}801$, tedy $|t| > t_{98}(0{,}05) = 1{,}9845 \quad \Rightarrow$ zamítnout H$_0$
- $p = \mathrm{P}(|T| \geq t) = 0{,}0061 \qquad (0{,}61\ \%)$
- 95% interval spolehlivosti pro $\mu_U - \mu_V$:

$$\left(12{,}293 - \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\ ;\ 12{,}293 + \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\right) = (10{,}67; 13{,}92)$$

[shapiro.test(vyska.o-vyska.m)] ověření normality
[t.test(vyska.o,vyska.m, mu=10, paired=TRUE)]
[t.test(vyska.o-vyska.m, mu=10)]

# příklad: výšky rodičů (párová pozorování!)

H$_0$: otcové jsou o 10 cm vyšší matek

- $U$ – výška otce, $V$ – výška matky, $X = U - V - 10$
- $\alpha = 0{,}05, \mathrm{H}_0 : \mu_U - 10 = \mu_V$ resp. $\mu_U - \mu_V = 10$
- $n = 99, \bar{u} = 179{,}267, \bar{v} = 166{,}970$
- $\bar{x} = \bar{u} - \bar{v} - 10 = 2{,}293, s_X = s_{U-10-V} = s_{U-V} = 8{,}144$
- $t = \frac{2{,}293}{8{,}144}\sqrt{99} = 2{,}801$, tedy $|t| > t_{98}(0{,}05) = 1{,}9845 \quad \Rightarrow$ zamítnout H$_0$
- $p = \mathrm{P}(|T| \geq t) = 0{,}0061 \qquad (0{,}61\ \%)$
- 95% interval spolehlivosti pro $\mu_U - \mu_V$:

$$\left(12{,}293 - \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\ ;\ 12{,}293 + \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\right) = (10{,}67; 13{,}92)$$

[shapiro.test(vyska.o-vyska.m)] ověření normality
[t.test(vyska.o,vyska.m, mu=10, paired=TRUE)]
[t.test(vyska.o-vyska.m, mu=10)]

# příklad: výšky rodičů (párová pozorování!)

H$_0$: otcové jsou o 10 cm vyšší matek

- $U$ – výška otce, $V$ – výška matky, $X = U - V - 10$
- $\alpha = 0{,}05, \mathrm{H}_0 : \mu_U - 10 = \mu_V$ resp. $\mu_U - \mu_V = 10$
- $n = 99, \bar{u} = 179{,}267, \bar{v} = 166{,}970$
- $\bar{x} = \bar{u} - \bar{v} - 10 = 2{,}293, s_X = s_{U-10-V} = s_{U-V} = 8{,}144$
- $t = \frac{2{,}293}{8{,}144}\sqrt{99} = 2{,}801$, tedy $|t| > t_{98}(0{,}05) = 1{,}9845 \Rightarrow$ zamítnout H$_0$
- $p = \mathrm{P}(|T| \geq t) = 0{,}0061$ (0,61 %)
- 95% interval spolehlivosti pro $\mu_U - \mu_V$:

$$\left(12{,}293 - \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\, ;\, 12{,}293 + \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\right) = (10{,}67; 13{,}92)$$

[shapiro.test(vyska.o-vyska.m)] ověření normality
[t.test(vyska.o,vyska.m, mu=10, paired=TRUE)]
[t.test(vyska.o-vyska.m, mu=10)]

# příklad: výšky rodičů (párová pozorování!)

$H_0$: otcové jsou o 10 cm vyšší matek

- $U$ – výška otce, $V$ – výška matky, $X = U - V - 10$
- $\alpha = 0{,}05, \mathrm{H}_0 : \mu_U - 10 = \mu_V$ resp. $\mu_U - \mu_V = 10$
- $n = 99, \bar{u} = 179{,}267, \bar{v} = 166{,}970$
- $\bar{x} = \bar{u} - \bar{v} - 10 = 2{,}293, s_X = s_{U-10-V} = s_{U-V} = 8{,}144$
- $t = \frac{2{,}293}{8{,}144}\sqrt{99} = 2{,}801$, tedy $|t| > t_{98}(0{,}05) = 1{,}9845 \quad \Rightarrow$ zamítnout $\mathrm{H}_0$
- $p = \mathrm{P}(|T| \geq t) = 0{,}0061 \qquad (0{,}61\ \%)$
- 95% interval spolehlivosti pro $\mu_U - \mu_V$:

$$\left(12{,}293 - \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\ ;\ 12{,}293 + \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\right) = (10{,}67; 13{,}92)$$

[shapiro.test(vyska.o-vyska.m)] ověření normality
[t.test(vyska.o,vyska.m, mu=10, paired=TRUE)]
[t.test(vyska.o-vyska.m, mu=10)]

# příklad: výšky rodičů (párová pozorování!)

H$_0$: otcové jsou o 10 cm vyšší matek

- $U$ – výška otce, $V$ – výška matky, $X = U - V - 10$
- $\alpha = 0{,}05, \mathrm{H}_0 : \mu_U - 10 = \mu_V$ resp. $\mu_U - \mu_V = 10$
- $n = 99, \bar{u} = 179{,}267, \bar{v} = 166{,}970$
- $\bar{x} = \bar{u} - \bar{v} - 10 = 2{,}293, s_X = s_{U-10-V} = s_{U-V} = 8{,}144$
- $t = \frac{2{,}293}{8{,}144}\sqrt{99} = 2{,}801$, tedy $|t| > t_{98}(0{,}05) = 1{,}9845 \quad \Rightarrow$ zamítnout H$_0$
- $p = \mathrm{P}(|T| \geq t) = 0{,}0061 \qquad (0{,}61\ \%)$
- 95% interval spolehlivosti pro $\mu_U - \mu_V$:

$$\left(12{,}293 - \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\ ;\ 12{,}293 + \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\right) = (10{,}67; 13{,}92)$$

[shapiro.test(vyska.o-vyska.m)] ověření normality
[t.test(vyska.o,vyska.m, mu=10, paired=TRUE)]
[t.test(vyska.o-vyska.m, mu=10)]

# příklad: výšky rodičů (párová pozorování!)

$H_0$: otcové jsou o 10 cm vyšší matek

- $U$ – výška otce, $V$ – výška matky, $X = U - V - 10$
- $\alpha = 0{,}05, H_0 : \mu_U - 10 = \mu_V$ resp. $\mu_U - \mu_V = 10$
- $n = 99, \bar{u} = 179{,}267, \bar{v} = 166{,}970$
- $\bar{x} = \bar{u} - \bar{v} - 10 = 2{,}293, s_X = s_{U-10-V} = s_{U-V} = 8{,}144$
- $t = \frac{2{,}293}{8{,}144}\sqrt{99} = 2{,}801$, tedy $|t| > t_{98}(0{,}05) = 1{,}9845 \quad \Rightarrow$ zamítnout $H_0$
- $p = \mathrm{P}(|T| \geq t) = 0{,}0061 \qquad (0{,}61\ \%)$
- 95% interval spolehlivosti pro $\mu_U - \mu_V$:

$$\left(12{,}293 - \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\ ;\ 12{,}293 + \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\right) = (10{,}67; 13{,}92)$$

[shapiro.test(vyska.o-vyska.m)] ověření normality
[t.test(vyska.o,vyska.m, mu=10, paired=TRUE)]
[t.test(vyska.o-vyska.m, mu=10)]

# příklad: výšky rodičů (párová pozorování!)

$H_0$: otcové jsou o 10 cm vyšší matek

- $U$ – výška otce, $V$ – výška matky, $X = U - V - 10$
- $\alpha = 0{,}05, \mathrm{H}_0 : \mu_U - 10 = \mu_V$ resp. $\mu_U - \mu_V = 10$
- $n = 99, \bar{u} = 179{,}267, \bar{v} = 166{,}970$
- $\bar{x} = \bar{u} - \bar{v} - 10 = 2{,}293, s_X = s_{U-10-V} = s_{U-V} = 8{,}144$
- $t = \frac{2{,}293}{8{,}144}\sqrt{99} = 2{,}801$, tedy $|t| > t_{98}(0{,}05) = 1{,}9845 \quad \Rightarrow$ zamítnout $\mathrm{H}_0$
- $p = \mathrm{P}(|T| \geq t) = 0{,}0061 \qquad (0{,}61\ \%)$
- 95% interval spolehlivosti pro $\mu_U - \mu_V$:

$$\left(12{,}293 - \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\ ;\ 12{,}293 + \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\right) = (10{,}67; 13{,}92)$$

[shapiro.test(vyska.o-vyska.m)] ověření normality
[t.test(vyska.o,vyska.m, mu=10, paired=TRUE)]
[t.test(vyska.o-vyska.m, mu=10)]

# znaménkový test

bez předpokladu normálního rozdělení, stačí libovolné spojité

- stačí znát znaménka rozdílů $X_i = U_i - V_i$
- pozorování s $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$) se vynechají, upraví se $n$
- $Y$ – počet **kladných** znamének $X_i = U_i - V_i$
- $\mathrm{H}_0$ : rozdělení $U$ a $V$ jsou stejná, pak je nutně $\mathrm{P}(U_i > V_i) = \mathrm{P}(X_i > 0) = 1/2$, tedy $Y \sim \mathrm{bi}(n, 1/2)$
- $\mathrm{H}_0$ zamítáme pro velká nebo malá $Y$:

$$Z = \frac{Y - n/2}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

- pro malá $n$ je bezpečnější použít Yatesovu korekci

$$Z = \frac{|Y - n/2| - 0{,}5}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

# znaménkový test

## bez předpokladu normálního rozdělení, stačí libovolné spojité

- stačí znát znaménka rozdílů $X_i = U_i - V_i$
- pozorování s $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$) se vynechají, upraví se $n$
- $Y$ – počet **kladných** znamének $X_i = U_i - V_i$
- $\mathrm{H}_0$ : rozdělení $U$ a $V$ jsou stejná, pak je nutně $\mathrm{P}(U_i > V_i) = \mathrm{P}(X_i > 0) = 1/2$, tedy $Y \sim \mathrm{bi}(n, 1/2)$
- $\mathrm{H}_0$ zamítáme pro velká nebo malá $Y$:

$$Z = \frac{Y - n/2}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

- pro malá $n$ je bezpečnější použít Yatesovu korekci

$$Z = \frac{|Y - n/2| - 0{,}5}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

# znaménkový test

bez předpokladu normálního rozdělení, stačí libovolné spojité

- stačí znát znaménka rozdílů $X_i = U_i - V_i$
- pozorování s $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$) se vynechají, upraví se $n$
- $Y$ – počet **kladných** znamének $X_i = U_i - V_i$
- $H_0$ : rozdělení $U$ a $V$ jsou stejná, pak je nutně $P(U_i > V_i) = P(X_i > 0) = 1/2$, tedy $Y \sim \mathrm{bi}(n, 1/2)$
- $H_0$ zamítáme pro velká nebo malá $Y$:

$$Z = \frac{Y - n/2}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

- pro malá $n$ je bezpečnější použít Yatesovu korekci

$$Z = \frac{|Y - n/2| - 0{,}5}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

# znaménkový test

bez předpokladu normálního rozdělení, stačí libovolné spojité

- stačí znát znaménka rozdílů $X_i = U_i - V_i$
- pozorování s $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$) se vynechají, upraví se $n$
- $Y$ – počet **kladných** znamének $X_i = U_i - V_i$
- $H_0$ : rozdělení $U$ a $V$ jsou stejná, pak je nutně $P(U_i > V_i) = P(X_i > 0) = 1/2$, tedy $Y \sim \text{bi}(n, 1/2)$
- $H_0$ zamítáme pro velká nebo malá $Y$:

$$Z = \frac{Y - n/2}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

- pro malá $n$ je bezpečnější použít Yatesovu korekci

$$Z = \frac{|Y - n/2| - 0{,}5}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

# znaménkový test

bez předpokladu normálního rozdělení, stačí libovolné spojité

- stačí znát znaménka rozdílů $X_i = U_i - V_i$
- pozorování s $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$) se vynechají, upraví se $n$
- $Y$ – počet **kladných** znamének $X_i = U_i - V_i$
- $\mathrm{H}_0$ : rozdělení $U$ a $V$ jsou stejná, pak je nutně $\mathrm{P}(U_i > V_i) = \mathrm{P}(X_i > 0) = 1/2$, tedy $Y \sim \mathrm{bi}(n, 1/2)$
- $\mathrm{H}_0$ zamítáme pro velká nebo malá $Y$:

$$Z = \frac{Y - n/2}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

- pro malá $n$ je bezpečnější použít Yatesovu korekci

$$Z = \frac{|Y - n/2| - 0{,}5}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

# znaménkový test

## bez předpokladu normálního rozdělení, stačí libovolné spojité

- stačí znát znaménka rozdílů $X_i = U_i - V_i$
- pozorování s $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$) se vynechají, upraví se $n$
- $Y$ – počet **kladných** znamének $X_i = U_i - V_i$
- $\mathrm{H}_0$ : rozdělení $U$ a $V$ jsou stejná, pak je nutně $\mathrm{P}(U_i > V_i) = \mathrm{P}(X_i > 0) = 1/2$, tedy $Y \sim \mathrm{bi}(n, 1/2)$
- $\mathrm{H}_0$ zamítáme pro velká nebo malá $Y$:

$$Z = \frac{Y - n/2}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

- pro malá $n$ je bezpečnější použít Yatesovu korekci

$$Z = \frac{|Y - n/2| - 0{,}5}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(\alpha/2)$$

# příklad: věk rodičů (párová pozorování!)

normalitu věku rodičů sotva lze předpokládat

- celkem 99 dvojic (otec, matka), sledujeme jejich věk $(U, V)$
- $H_0$ : E $U$ = E $V + 2$ (populační míra polohy věku otců je o 2 roky větší, než matek), $H_1$ oboustranná
- v jedenácti případech je vek.o – vek.m = 2, tyto dvojice nepoužijeme, proto $n = 99 - 11 = 88$
- u 50 dvojic je vek.o – vek.m $> 2$, proto

$$z = \frac{50 - 88/2}{\sqrt{88/4}} = 1{,}279, \qquad p = 0{,}201 \ (20{,}1\ \%)$$

- s Yatesovou korekcí: $z = 1{,}172$, $p = 0{,}241$ (24,1 %)

[n = sum(vek.o-vek.m != 2)] počet nenulových $X_i$
[y = sum(vek.o-vek.m > 2)] počet kladných $X_i$
[prop.test(y,n,correct=FALSE)] bez Yatesovy korekce
[prop.test(y,n,correct=TRUE)] s Yatesovou korekcí

# příklad: věk rodičů (párová pozorování!)

normalitu věku rodičů sotva lze předpokládat

- celkem 99 dvojic (otec, matka), sledujeme jejich věk $(U, V)$
- $H_0 : \mathrm{E}\, U = \mathrm{E}\, V + 2$ (populační míra polohy věku otců je o 2 roky větší, než matek), $H_1$ oboustranná
- v jedenácti případech je vek.o – vek.m $= 2$, tyto dvojice nepoužijeme, proto $n = 99 - 11 = 88$
- u 50 dvojic je vek.o – vek.m $> 2$, proto

$$z = \frac{50 - 88/2}{\sqrt{88/4}} = 1{,}279, \qquad p = 0{,}201\ (20{,}1\ \%)$$

- s Yatesovou korekcí: $z = 1{,}172$, $p = 0{,}241$ $(24{,}1\ \%)$

[n = sum(vek.o-vek.m != 2)] počet nenulových $X_i$
[y = sum(vek.o-vek.m > 2)] počet kladných $X_i$
[prop.test(y,n,correct=FALSE)] bez Yatesovy korekce
[prop.test(y,n,correct=TRUE)] s Yatesovou korekcí

# příklad: věk rodičů (párová pozorování!)

normalitu věku rodičů sotva lze předpokládat

- celkem 99 dvojic (otec, matka), sledujeme jejich věk $(U, V)$
- $H_0 : \mathrm{E}\,U = \mathrm{E}\,V + 2$ (populační míra polohy věku otců je o 2 roky větší, než matek), $H_1$ oboustranná
- v jedenácti případech je vek.o – vek.m $= 2$, tyto dvojice nepoužijeme, proto $n = 99 - 11 = 88$
- u 50 dvojic je vek.o – vek.m $> 2$, proto

$$z = \frac{50 - 88/2}{\sqrt{88/4}} = 1{,}279, \qquad p = 0{,}201\ (20{,}1\ \%)$$

- s Yatesovou korekcí: $z = 1{,}172$, $p = 0{,}241$ (24,1 %)

| | |
|---|---|
| [n = sum(vek.o-vek.m != 2)] | počet nenulových $X_i$ |
| [y = sum(vek.o-vek.m > 2)] | počet kladných $X_i$ |
| [prop.test(y,n,correct=FALSE)] | bez Yatesovy korekce |
| [prop.test(y,n,correct=TRUE)] | s Yatesovou korekcí |

# příklad: věk rodičů (párová pozorování!)

normalitu věku rodičů sotva lze předpokládat

- celkem 99 dvojic (otec, matka), sledujeme jejich věk $(U, V)$
- $H_0 : \mathrm{E}\,U = \mathrm{E}\,V + 2$ (populační míra polohy věku otců je o 2 roky větší, než matek), $H_1$ oboustranná
- v jedenácti případech je vek.o – vek.m $= 2$, tyto dvojice nepoužijeme, proto $n = 99 - 11 = 88$
- u 50 dvojic je vek.o – vek.m $> 2$, proto

$$z = \frac{50 - 88/2}{\sqrt{88/4}} = 1{,}279, \qquad p = 0{,}201\ (20{,}1\ \%)$$

- s Yatesovou korekcí: $z = 1{,}172$, $p = 0{,}241$ $(24{,}1\ \%)$

| | |
|---|---|
| [n = sum(vek.o-vek.m != 2)] | počet nenulových $X_i$ |
| [y = sum(vek.o-vek.m > 2)] | počet kladných $X_i$ |
| [prop.test(y,n,correct=FALSE)] | bez Yatesovy korekce |
| [prop.test(y,n,correct=TRUE)] | s Yatesovou korekcí |

# příklad: věk rodičů (párová pozorování!)

normalitu věku rodičů sotva lze předpokládat

- celkem 99 dvojic (otec, matka), sledujeme jejich věk $(U, V)$
- $H_0 : E\,U = E\,V + 2$ (populační míra polohy věku otců je o 2 roky větší, než matek), $H_1$ oboustranná
- v jedenácti případech je vek.o – vek.m $= 2$, tyto dvojice nepoužijeme, proto $n = 99 - 11 = 88$
- u 50 dvojic je vek.o – vek.m $> 2$, proto

$$z = \frac{50 - 88/2}{\sqrt{88/4}} = 1{,}279, \qquad p = 0{,}201\ (20{,}1\ \%)$$

- s Yatesovou korekcí: $z = 1{,}172$, $p = 0{,}241$ (24,1 %)

[n = sum(vek.o-vek.m != 2)] počet nenulových $X_i$
[y = sum(vek.o-vek.m > 2)] počet kladných $X_i$
[prop.test(y,n,correct=FALSE)] bez Yatesovy korekce
[prop.test(y,n,correct=TRUE)] s Yatesovou korekcí

# párový Wilcoxonův test
(silnější předpoklad, než u znaménkového testu)

- nutné **spojité a symetrické** rozdělení $X_i = U_i - V_i$
- opět vyloučíme případy $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$)
- určíme pořadí $R_i^+$ hodnot $|X_i| = |U_i - V_i|$
- $W$ součet těch pořadí, kde bylo $U_i > V_i$ (tj. $X_i > 0$)

$$Z = \frac{W - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

- pod odmocninou bývá ještě oprava na výskyt shodných hodnot, která jmenovatele poněkud zmenší [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,mu=10,paired=TRUE)]
- pro malá $n$ se čitatel zpravidla přibližuje o $1/2$ k nule: (všimněte si zkrácených názvů parametrů – jednoznačnost!) [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,m=10,p=TRUE,cor=FALSE)]

# párový Wilcoxonův test
(silnější předpoklad, než u znaménkového testu)

- nutné **spojité a symetrické** rozdělení $X_i = U_i - V_i$
- opět vyloučíme případy $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$)
- určíme pořadí $R_i^+$ hodnot $|X_i| = |U_i - V_i|$
- $W$ součet těch pořadí, kde bylo $U_i > V_i$ (tj. $X_i > 0$)

$$Z = \frac{W - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

- pod odmocninou bývá ještě oprava na výskyt shodných hodnot, která jmenovatele poněkud zmenší
[wilcox.test(vyska.o,vyska.m,mu=10,paired=TRUE)]
- pro malá $n$ se čitatel zpravidla přibližuje o 1/2 k nule: (všimněte si zkrácených názvů parametrů – jednoznačnost!)
[wilcox.test(vyska.o,vyska.m,m=10,p=TRUE,cor=FALSE)]

# párový Wilcoxonův test
(silnější předpoklad, než u znaménkového testu)

- nutné **spojité a symetrické** rozdělení $X_i = U_i - V_i$
- opět vyloučíme případy $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$)
- určíme pořadí $R_i^+$ hodnot $|X_i| = |U_i - V_i|$
- $W$ součet těch pořadí, kde bylo $U_i > V_i$ (tj. $X_i > 0$)

$$Z = \frac{W - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

- pod odmocninou bývá ještě oprava na výskyt shodných hodnot, která jmenovatele poněkud zmenší [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,mu=10,paired=TRUE)]
- pro malá $n$ se čitatel zpravidla přibližuje o 1/2 k nule: (všimněte si zkrácených názvů parametrů – jednoznačnost!) [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,m=10,p=TRUE,cor=FALSE)]

# párový Wilcoxonův test
(silnější předpoklad, než u znaménkového testu)

- nutné **spojité a symetrické** rozdělení $X_i = U_i - V_i$
- opět vyloučíme případy $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$)
- určíme pořadí $R_i^+$ hodnot $|X_i| = |U_i - V_i|$
- $W$ součet těch pořadí, kde bylo $U_i > V_i$ (tj. $X_i > 0$)

$$Z = \frac{W - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

- pod odmocninou bývá ještě oprava na výskyt shodných hodnot, která jmenovatele poněkud zmenší [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,mu=10,paired=TRUE)]
- pro malá $n$ se čitatel zpravidla přibližuje o 1/2 k nule: (všimněte si zkrácených názvů parametrů – jednoznačnost!) [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,m=10,p=TRUE,cor=FALSE)]

# párový Wilcoxonův test
(silnější předpoklad, než u znaménkového testu)

- nutné **spojité a symetrické** rozdělení $X_i = U_i - V_i$
- opět vyloučíme případy $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$)
- určíme pořadí $R_i^+$ hodnot $|X_i| = |U_i - V_i|$
- $W$ součet těch pořadí, kde bylo $U_i > V_i$ (tj. $X_i > 0$)

$$Z = \frac{W - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

- pod odmocninou bývá ještě oprava na výskyt shodných hodnot, která jmenovatele poněkud zmenší [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,mu=10,paired=TRUE)]
- pro malá $n$ se čitatel zpravidla přibližuje o $1/2$ k nule: (všimněte si zkrácených názvů parametrů – jednoznačnost!) [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,m=10,p=TRUE,cor=FALSE)]

# párový Wilcoxonův test
(silnější předpoklad, než u znaménkového testu)

- nutné **spojité a symetrické** rozdělení $X_i = U_i - V_i$
- opět vyloučíme případy $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$)
- určíme pořadí $R_i^+$ hodnot $|X_i| = |U_i - V_i|$
- $W$ součet těch pořadí, kde bylo $U_i > V_i$ (tj. $X_i > 0$)

$$Z = \frac{W - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

- pod odmocninou bývá ještě oprava na výskyt shodných hodnot, která jmenovatele poněkud zmenší [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,mu=10,paired=TRUE)]
- pro malá $n$ se čitatel zpravidla přibližuje o $1/2$ k nule: (všimněte si zkrácených názvů parametrů – jednoznačnost!) [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,m=10,p=TRUE,cor=FALSE)]

# příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

- u devíti osob provedeno porovnávání dvou způsobů předávání informace (poslouchání, čtení)
- rozhodnout, zda je mezi oběma způsoby rozdíl
- $H_0$: rozdělení $U$ a $V$ stejná, tedy populační medián $X = U - V$ je roven 0
- znaménkový test s Yatesovou korekcí (málo pozorování):

$$y = 5 \qquad n = 8$$

$$z = \frac{|5 - 8/2| - 0{,}5}{\sqrt{8/4}} = 0{,}3536 \qquad p = 72{,}4\ \%$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_i$ | 90 | 86 | 72 | 65 | 44 | 52 | 46 | 38 | 43 |
| $v_i$ | 85 | 87 | 70 | 62 | 44 | 53 | 42 | 35 | 46 |
| $x_i$ | 5 | -1 | 2 | 3 | 0 | -1 | 4 | 3 | -3 |
| $r_i^+$ | 8 | 1,5 | 3 | 5 | – | 1,5 | 7 | 5 | 5 |

# příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

- u devíti osob provedeno porovnávání dvou způsobů předávání informace (poslouchání, čtení)
- rozhodnout, zda je mezi oběma způsoby rozdíl
- $H_0$: rozdělení $U$ a $V$ stejná, tedy populační medián $X = U - V$ je roven 0
- znaménkový test s Yatesovou korekcí (málo pozorování):

$$y = 5 \qquad n = 8$$

$$z = \frac{|5 - 8/2| - 0{,}5}{\sqrt{8/4}} = 0{,}3536 \qquad p = 72{,}4\ \%$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_i$ | 90 | 86 | 72 | 65 | 44 | 52 | 46 | 38 | 43 |
| $v_i$ | 85 | 87 | 70 | 62 | 44 | 53 | 42 | 35 | 46 |
| $x_i$ | 5 | -1 | 2 | 3 | 0 | -1 | 4 | 3 | -3 |
| $r_i^+$ | 8 | 1,5 | 3 | 5 | – | 1,5 | 7 | 5 | 5 |

# příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

- u devíti osob provedeno porovnávání dvou způsobů předávání informace (poslouchání, čtení)
- rozhodnout, zda je mezi oběma způsoby rozdíl
- $H_0$: rozdělení $U$ a $V$ stejná, tedy populační medián $X = U - V$ je roven 0
- znaménkový test s Yatesovou korekcí (málo pozorování):

$$y = 5 \qquad n = 8$$

$$z = \frac{|5 - 8/2| - 0{,}5}{\sqrt{8/4}} = 0{,}3536 \qquad p = 72{,}4\ \%$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_i$ | 90 | 86 | 72 | 65 | 44 | 52 | 46 | 38 | 43 |
| $v_i$ | 85 | 87 | 70 | 62 | 44 | 53 | 42 | 35 | 46 |
| $x_i$ | 5 | -1 | 2 | 3 | 0 | -1 | 4 | 3 | -3 |
| $r_i^+$ | 8 | 1,5 | 3 | 5 | – | 1,5 | 7 | 5 | 5 |

# příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

- u devíti osob provedeno porovnávání dvou způsobů předávání informace (poslouchání, čtení)
- rozhodnout, zda je mezi oběma způsoby rozdíl
- $H_0$: rozdělení $U$ a $V$ stejná, tedy populační medián $X = U - V$ je roven 0
- znaménkový test s Yatesovou korekcí (málo pozorování):

$$y = 5 \qquad n = 8$$

$$z = \frac{|5 - 8/2| - 0{,}5}{\sqrt{8/4}} = 0{,}3536 \qquad p = 72{,}4\ \%$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_i$ | 90 | 86 | 72 | 65 | 44 | 52 | 46 | 38 | 43 |
| $v_i$ | 85 | 87 | 70 | 62 | 44 | 53 | 42 | 35 | 46 |
| $x_i$ | 5 | -1 | 2 | 3 | 0 | -1 | 4 | 3 | -3 |
| $r_i^+$ | 8 | 1,5 | 3 | 5 | – | 1,5 | 7 | 5 | 5 |

# příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

- $H_0$ : populační medián rozdílů $= 0$
- nově předpokládáme symetrii
- Wilcoxonův test:

| $u_i - v_i$ | 5 | -1 | 2 | 3 | -1 | 4 | 3 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_i^+$ | 8 | 1,5 | 3 | 5 | 1,5 | 7 | 5 | 5 |

$$w = 8 + 3 + 5 + 7 + 5 = 28$$

$$z = \frac{28 - 8 \cdot 9/4 - 1/2}{\sqrt{8 \cdot 9 \cdot 17/24}} = \frac{9{,}5}{\sqrt{51}} = 1{,}33$$

$$p = 18{,}3\ \%$$

- R dá $p = 18{,}1\ \%$, protože kromě opravy na spojitost bere ohled na shody (přesný výpočet dá $p = 19{,}5\ \%$)

# příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

- $H_0$ : populační medián rozdílů $= 0$
- nově předpokládáme symetrii
- Wilcoxonův test:

| $u_i - v_i$ | 5 | -1 | 2 | 3 | -1 | 4 | 3 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_i^+$ | 8 | 1,5 | 3 | 5 | 1,5 | 7 | 5 | 5 |

$$w = 8 + 3 + 5 + 7 + 5 = 28$$

$$z = \frac{28 - 8 \cdot 9/4 - 1/2}{\sqrt{8 \cdot 9 \cdot 17/24}} = \frac{9{,}5}{\sqrt{51}} = 1{,}33$$

$$p = 18{,}3\ \%$$

- R dá $p = 18{,}1\ \%$, protože kromě opravy na spojitost bere ohled na shody (přesný výpočet dá $p = 19{,}5\ \%$)

# příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

- $H_0$ : populační medián rozdílů $= 0$
- nově předpokládáme symetrii
- Wilcoxonův test:

| $u_i - v_i$ | 5 | -1 | 2 | 3 | -1 | 4 | 3 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_i^+$ | 8 | 1,5 | 3 | 5 | 1,5 | 7 | 5 | 5 |

$$w = 8 + 3 + 5 + 7 + 5 = 28$$

$$z = \frac{28 - 8 \cdot 9/4 - 1/2}{\sqrt{8 \cdot 9 \cdot 17/24}} = \frac{9{,}5}{\sqrt{51}} = 1{,}33$$

$$p = 18{,}3\ \%$$

- R dá $p = 18{,}1\ \%$, protože kromě opravy na spojitost bere ohled na shody (přesný výpočet dá $p = 19{,}5\ \%$)

# příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

- $\mathrm{H}_0$ : populační medián rozdílů $= 0$
- nově předpokládáme symetrii
- Wilcoxonův test:

| $u_i - v_i$ | 5 | -1 | 2 | 3 | -1 | 4 | 3 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_i^+$ | 8 | 1,5 | 3 | 5 | 1,5 | 7 | 5 | 5 |

$$w = 8 + 3 + 5 + 7 + 5 = 28$$

$$z = \frac{28 - 8 \cdot 9/4 - 1/2}{\sqrt{8 \cdot 9 \cdot 17/24}} = \frac{9{,}5}{\sqrt{51}} = 1{,}33$$

$$p = 18{,}3\ \%$$

- R dá $p = 18{,}1\ \%$, protože kromě opravy na spojitost bere ohled na shody (přesný výpočet dá $p = 19{,}5\ \%$)

# dvouvýběrový $t$-test
(předpoklad **normálního rozdělení**)

- $n_X$ nezávislých pozorování $X$, $n_Y$ nezávislých pozorování $Y$
- tyto výběry musí být **nezávislé** (musí vyplynout ze způsobu pořízení dat)
- rozptyly $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ shodné (odhady $S_X^2, S_Y^2$ podobné, lze ověřit)
- normální rozdělení v obou výběrech (lze ověřit, pro velká $n_X, n_Y$ nenormalita tolik nevadí)
- společný odhad rozptylu (vážený průměr odhadů z jednotlivých výběrů)

$$S^2 = \frac{n_X - 1}{n_X + n_Y - 2} S_X^2 + \frac{n_Y - 1}{n_X + n_Y - 2} S_Y^2$$

- statistika (pro test hypotézy, že rozdělení $X$ a $Y$ jsou stejná)

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}}$$

# dvouvýběrový $t$-test
(předpoklad **normálního rozdělení**)

- $n_X$ nezávislých pozorování $X$, $n_Y$ nezávislých pozorování $Y$
- tyto výběry musí být **nezávislé**
(musí vyplynout ze způsobu pořízení dat)
- rozptyly $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ shodné (odhady $S_X^2, S_Y^2$ podobné, lze ověřit)
- normální rozdělení v obou výběrech (lze ověřit, pro velká $n_X, n_Y$ nenormalita tolik nevadí)
- společný odhad rozptylu (vážený průměr odhadů z jednotlivých výběrů)

$$S^2 = \frac{n_X - 1}{n_X + n_Y - 2} S_X^2 + \frac{n_Y - 1}{n_X + n_Y - 2} S_Y^2$$

- statistika (pro test hypotézy, že rozdělení $X$ a $Y$ jsou stejná)

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}}$$

# dvouvýběrový $t$-test
(předpoklad **normálního rozdělení**)

- $n_X$ nezávislých pozorování $X$, $n_Y$ nezávislých pozorování $Y$
- tyto výběry musí být **nezávislé**
  (musí vyplynout ze způsobu pořízení dat)
- rozptyly $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ shodné (odhady $S_X^2, S_Y^2$ podobné, lze ověřit)
- normální rozdělení v obou výběrech (lze ověřit, pro velká $n_X, n_Y$ nenormalita tolik nevadí)
- společný odhad rozptylu (vážený průměr odhadů z jednotlivých výběrů)

$$S^2 = \frac{n_X - 1}{n_X + n_Y - 2} S_X^2 + \frac{n_Y - 1}{n_X + n_Y - 2} S_Y^2$$

- statistika (pro test hypotézy, že rozdělení $X$ a $Y$ jsou stejná)

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}}$$

# dvouvýběrový $t$-test
(předpoklad **normálního rozdělení**)

- $n_X$ nezávislých pozorování $X$, $n_Y$ nezávislých pozorování $Y$
- tyto výběry musí být **nezávislé** (musí vyplynout ze způsobu pořízení dat)
- rozptyly $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ shodné (odhady $S_X^2, S_Y^2$ podobné, lze ověřit)
- normální rozdělení v obou výběrech (lze ověřit, pro velká $n_X, n_Y$ nenormalita tolik nevadí)
- společný odhad rozptylu (vážený průměr odhadů z jednotlivých výběrů)

$$S^2 = \frac{n_X - 1}{n_X + n_Y - 2} S_X^2 + \frac{n_Y - 1}{n_X + n_Y - 2} S_Y^2$$

- statistika (pro test hypotézy, že rozdělení $X$ a $Y$ jsou stejná)

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}}$$

# dvouvýběrový $t$-test
(předpoklad **normálního rozdělení**)

- $n_X$ nezávislých pozorování $X$, $n_Y$ nezávislých pozorování $Y$
- tyto výběry musí být **nezávislé**
  (musí vyplynout ze způsobu pořízení dat)
- rozptyly $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ shodné (odhady $S_X^2, S_Y^2$ podobné, lze ověřit)
- normální rozdělení v obou výběrech (lze ověřit, pro velká $n_X, n_Y$ nenormalita tolik nevadí)
- společný odhad rozptylu (vážený průměr odhadů z jednotlivých výběrů)

$$S^2 = \frac{n_X - 1}{n_X + n_Y - 2} S_X^2 + \frac{n_Y - 1}{n_X + n_Y - 2} S_Y^2$$

- statistika (pro test hypotézy, že rozdělení $X$ a $Y$ jsou stejná)

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}}$$

# dvouvýběrový $t$-test
(předpoklad **normálního rozdělení**)

- $n_X$ nezávislých pozorování $X$, $n_Y$ nezávislých pozorování $Y$
- tyto výběry musí být **nezávislé**
  (musí vyplynout ze způsobu pořízení dat)
- rozptyly $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ shodné (odhady $S_X^2, S_Y^2$ podobné, lze ověřit)
- normální rozdělení v obou výběrech (lze ověřit, pro velká $n_X, n_Y$ nenormalita tolik nevadí)
- společný odhad rozptylu (vážený průměr odhadů z jednotlivých výběrů)

$$S^2 = \frac{n_X - 1}{n_X + n_Y - 2} S_X^2 + \frac{n_Y - 1}{n_X + n_Y - 2} S_Y^2$$

- statistika (pro test hypotézy, že rozdělení $X$ a $Y$ jsou stejná)

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\text{S.E.}(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}}$$

# dvouvýběrový $t$-test

- $H_0 : \mu_X = \mu_Y$
  zamítnout ve prospěch alternativy
  - $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ když $|T| \geq t_{n_X+n_Y-2}(\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ když $T \geq t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ když $T \leq -t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$

  [t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] nebo
  [t.test(vyska∼Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]
- zamítáme-li $H_0$, říkáme, že rozdíl výběrových průměrů **je významný**
- pochyby o shodě rozptylů: Welchův test (modifikace $t$-testu)
  [t.test(hosi,divky,var.equal=FALSE)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
  [t.test(hosi,divky)] resp. [t.test(vyska∼Hoch)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
- shodu rozptylů lze ověřit např. $F$-testem ($H_0 : \sigma_X = \sigma_Y$)
  [var.test(hosi,divky)]
- ověření normality nutně pro každý výběr zvlášť!

# dvouvýběrový $t$-test

- $H_0 : \mu_X = \mu_Y$
  zamítnout ve prospěch alternativy
  - $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ když $|T| \geq t_{n_X+n_Y-2}(\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ když $T \geq t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ když $T \leq -t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$

  [t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] nebo
  [t.test(vyska∼Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]
- zamítáme-li $H_0$, říkáme, že rozdíl výběrových průměrů **je významný**
- pochyby o shodě rozptylů: Welchův test (modifikace $t$-testu)
  [t.test(hosi,divky,var.equal=FALSE)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
  [t.test(hosi,divky)] resp. [t.test(vyska∼Hoch)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
- shodu rozptylů lze ověřit např. $F$-testem ($H_0 : \sigma_X = \sigma_Y$)
  [var.test(hosi,divky)]
- ověření normality nutně pro každý výběr zvlášť!

# dvouvýběrový $t$-test

- $H_0 : \mu_X = \mu_Y$
  zamítnout ve prospěch alternativy
  - $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ když $|T| \geq t_{n_X+n_Y-2}(\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ když $T \geq t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ když $T \leq -t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$

  [t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] nebo
  [t.test(vyska∼Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]
- zamítáme-li $H_0$, říkáme, že rozdíl výběrových průměrů **je významný**
- pochyby o shodě rozptylů: Welchův test (modifikace $t$-testu)
  [t.test(hosi,divky,var.equal=FALSE)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
  [t.test(hosi,divky)] resp. [t.test(vyska∼Hoch)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
- shodu rozptylů lze ověřit např. $F$-testem ($H_0 : \sigma_X = \sigma_Y$)
  [var.test(hosi,divky)]
- ověření normality nutně pro každý výběr zvlášť!

# dvouvýběrový $t$-test

- $H_0 : \mu_X = \mu_Y$
  zamítnout ve prospěch alternativy
  - $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ když $|T| \geq t_{n_X+n_Y-2}(\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ když $T \geq t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ když $T \leq -t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$

  [t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] nebo
  [t.test(vyska~Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]
- zamítáme-li $H_0$, říkáme, že rozdíl výběrových průměrů **je významný**
- pochyby o shodě rozptylů: Welchův test (modifikace $t$-testu)
  [t.test(hosi,divky,var.equal=FALSE)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
  [t.test(hosi,divky)] resp. [t.test(vyska~Hoch)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
- shodu rozptylů lze ověřit např. $F$-testem ($H_0 : \sigma_X = \sigma_Y$)
  [var.test(hosi,divky)]
- ověření normality nutně pro každý výběr zvlášť!

# dvouvýběrový $t$-test

- $H_0 : \mu_X = \mu_Y$
  zamítnout ve prospěch alternativy
  - $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ když $|T| \geq t_{n_X+n_Y-2}(\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ když $T \geq t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ když $T \leq -t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$

  [t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] nebo
  [t.test(vyska~Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]
- zamítáme-li $H_0$, říkáme, že rozdíl výběrových průměrů **je významný**
- pochyby o shodě rozptylů: Welchův test (modifikace $t$-testu)
  [t.test(hosi,divky,var.equal=FALSE)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
  [t.test(hosi,divky)] resp. [t.test(vyska~Hoch)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
- shodu rozptylů lze ověřit např. $F$-testem ($H_0 : \sigma_X = \sigma_Y$)
  [var.test(hosi,divky)]
- ověření normality nutně pro každý výběr zvlášť!

# dvouvýběrový $t$-test

- $H_0 : \mu_X = \mu_Y$
  zamítnout ve prospěch alternativy
  - $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ když $|T| \geq t_{n_X+n_Y-2}(\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ když $T \geq t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ když $T \leq -t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$

  [t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] nebo
  [t.test(vyska~Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]
- zamítáme-li $H_0$, říkáme, že rozdíl výběrových průměrů **je významný**
- pochyby o shodě rozptylů: Welchův test (modifikace $t$-testu)
  [t.test(hosi,divky,var.equal=FALSE)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
  [t.test(hosi,divky)] resp. [t.test(vyska~Hoch)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
- shodu rozptylů lze ověřit např. $F$-testem ($H_0 : \sigma_X = \sigma_Y$)
  [var.test(hosi,divky)]
- ověření normality nutně pro každý výběr zvlášť!

# dvouvýběrový $t$-test

- $H_0 : \mu_X = \mu_Y$
  zamítnout ve prospěch alternativy
  - $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ když $|T| \geq t_{n_X+n_Y-2}(\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ když $T \geq t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ když $T \leq -t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$

  [t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] nebo
  [t.test(vyska∼Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]
- zamítáme-li $H_0$, říkáme, že rozdíl výběrových průměrů **je významný**
- pochyby o shodě rozptylů: Welchův test (modifikace $t$-testu)
  [t.test(hosi,divky,var.equal=FALSE)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
  [t.test(hosi,divky)] resp. [t.test(vyska∼Hoch)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
- shodu rozptylů lze ověřit např. $F$-testem ($H_0 : \sigma_X = \sigma_Y$)
  [var.test(hosi,divky)]
- ověření normality nutně pro každý výběr zvlášť!

# dvouvýběrový $t$-test

- $H_0 : \mu_X = \mu_Y$
  zamítnout ve prospěch alternativy
  - $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ když $|T| \geq t_{n_X+n_Y-2}(\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ když $T \geq t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ když $T \leq -t_{n_X+n_Y-2}(2\alpha)$

  [t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] nebo
  [t.test(vyska~Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]
- zamítáme-li $H_0$, říkáme, že rozdíl výběrových průměrů **je významný**
- pochyby o shodě rozptylů: Welchův test (modifikace $t$-testu)
  [t.test(hosi,divky,var.equal=FALSE)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
  [t.test(hosi,divky)] resp. [t.test(vyska~Hoch)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
- shodu rozptylů lze ověřit např. $F$-testem ($H_0 : \sigma_X = \sigma_Y$)
  [var.test(hosi,divky)]
- ověření normality nutně pro každý výběr zvlášť!

# příklad: výšky dětí

| | rozsah | průměr | výb. rozptyl |
|---|---|---|---|
| hoši | 15 | 139,13 | 42,98 |
| dívky | 12 | 140,83 | 33,79 |

$$s^2 = \frac{15-1}{15+12-2} 42{,}98 + \frac{12-1}{15+12-2} 33{,}79 = 38{,}936$$

$$|t| = \frac{|139{,}13 - 140{,}83|}{\sqrt{38{,}936}} \sqrt{\frac{15 \cdot 12}{15+12}} = |-0{,}703| < 2{,}06 = t_{25}(0{,}05)$$

[shapiro.test(hosi)] $p = 80\ \%$
[shapiro.test(divky)] $p = 38\ \%$
[tapply(vyska,Hoch,shapiro.test)] (spočítá test pro oba výběry)
[var.test(hosi,divky)] $p = 70\ \%$
[t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)]

# dvouvýběrový $t$-test a intervaly spolehlivosti
## (poznámka na okraj)

- zpravidla platí
  - disjunktní intervaly spolehlivosti $\Rightarrow$ významný rozdíl
  - nevýznamný rozdíl průměrů $\Rightarrow$ překryv intervalů
  - rozdíl průměrů může být významný a současně se intervaly mohou překrývat
  - pokud každý z intervalů spolehlivosti obsahuje výběrový průměr druhého výběru, rozdíl průměrů není významný (nemusí platit v případě, kdy oba rozsahy výběru jsou do čtyř)
- příklad: váha v 24. týdnu dětí matek maturantek
  - 95% interval spolehlivosti pro hochy [kg]: (7,51; 8,25)
  - 95% interval spolehlivosti pro dívky [kg]: (6,98; 7,59)
  - intervaly se poněkud překrývají, přestože $t$-test dal: $t = 2{,}52$, $p = 1{,}5$ %, tedy na odpovídající 5% hladině je rozdíl významný

# dvouvýběrový $t$-test a intervaly spolehlivosti
(poznámka na okraj)

- zpravidla platí
  - disjunktní intervaly spolehlivosti ⇒ významný rozdíl
  - nevýznamný rozdíl průměrů ⇒ překryv intervalů
  - rozdíl průměrů může být významný a současně se intervaly mohou překrývat
  - pokud každý z intervalů spolehlivosti obsahuje výběrový průměr druhého výběru, rozdíl průměrů není významný (nemusí platit v případě, kdy oba rozsahy výběru jsou do čtyř)
- příklad: váha v 24. týdnu dětí matek maturantek
  - 95% interval spolehlivosti pro hochy [kg]: (7,51; 8,25)
  - 95% interval spolehlivosti pro dívky [kg]: (6,98; 7,59)
  - intervaly se poněkud překrývají, přestože $t$-test dal: $t = 2{,}52$, $p = 1{,}5$ %, tedy na odpovídající 5% hladině je rozdíl významný

# dvouvýběrový $t$-test a intervaly spolehlivosti
## (poznámka na okraj)

- zpravidla platí
  - disjunktní intervaly spolehlivosti $\Rightarrow$ významný rozdíl
  - nevýznamný rozdíl průměrů $\Rightarrow$ překryv intervalů
  - rozdíl průměrů může být významný a současně se intervaly mohou překrývat
  - pokud každý z intervalů spolehlivosti obsahuje výběrový průměr druhého výběru, rozdíl průměrů není významný (nemusí platit v případě, kdy oba rozsahy výběru jsou do čtyř)
- příklad: váha v 24. týdnu dětí matek maturantek
  - 95% interval spolehlivosti pro hochy [kg]: (7,51; 8,25)
  - 95% interval spolehlivosti pro dívky [kg]: (6,98; 7,59)
  - intervaly se poněkud překrývají, přestože $t$-test dal: $t = 2{,}52$, $p = 1{,}5$ %, tedy na odpovídající 5% hladině je rozdíl významný

# dvouvýběrový $t$-test a intervaly spolehlivosti
(poznámka na okraj)

- zpravidla platí
  - disjunktní intervaly spolehlivosti $\Rightarrow$ významný rozdíl
  - nevýznamný rozdíl průměrů $\Rightarrow$ překryv intervalů
  - rozdíl průměrů může být významný a současně se intervaly mohou překrývat
  - pokud každý z intervalů spolehlivosti obsahuje výběrový průměr druhého výběru, rozdíl průměrů není významný (nemusí platit v případě, kdy oba rozsahy výběru jsou do čtyř)
- příklad: váha v 24. týdnu dětí matek maturantek
  - 95% interval spolehlivosti pro hochy [kg]: (7,51; 8,25)
  - 95% interval spolehlivosti pro dívky [kg]: (6,98; 7,59)
  - intervaly se poněkud překrývají, přestože $t$-test dal: $t = 2{,}52$, $p = 1{,}5$ %, tedy na odpovídající 5% hladině je rozdíl významný

# dvouvýběrový $t$-test a intervaly spolehlivosti
(poznámka na okraj)

- zpravidla platí
  - disjunktní intervaly spolehlivosti $\Rightarrow$ významný rozdíl
  - nevýznamný rozdíl průměrů $\Rightarrow$ překryv intervalů
  - rozdíl průměrů může být významný a současně se intervaly mohou překrývat
  - pokud každý z intervalů spolehlivosti obsahuje výběrový průměr druhého výběru, rozdíl průměrů není významný (nemusí platit v případě, kdy oba rozsahy výběru jsou do čtyř)
- příklad: váha v 24. týdnu dětí matek maturantek
  - 95% interval spolehlivosti pro hochy [kg]: (7,51; 8,25)
  - 95% interval spolehlivosti pro dívky [kg]: (6,98; 7,59)
  - intervaly se poněkud překrývají, přestože $t$-test dal: $t = 2{,}52$, $p = 1{,}5$ %, tedy na odpovídající 5% hladině je rozdíl významný

# dvouvýběrový $t$-test a intervaly spolehlivosti
(poznámka na okraj)

- zpravidla platí
  - disjunktní intervaly spolehlivosti ⇒ významný rozdíl
  - nevýznamný rozdíl průměrů ⇒ překryv intervalů
  - rozdíl průměrů může být významný a současně se intervaly mohou překrývat
  - pokud každý z intervalů spolehlivosti obsahuje výběrový průměr druhého výběru, rozdíl průměrů není významný (nemusí platit v případě, kdy oba rozsahy výběru jsou do čtyř)
- příklad: váha v 24. týdnu dětí matek maturantek
  - 95% interval spolehlivosti pro hochy [kg]: (7,51; 8,25)
  - 95% interval spolehlivosti pro dívky [kg]: (6,98; 7,59)
  - intervaly se poněkud překrývají, přestože $t$-test dal: $t = 2{,}52$, $p = 1{,}5\ \%$, tedy na odpovídající 5% hladině je rozdíl významný

# dvouvýběrový $t$-test a intervaly spolehlivosti
(poznámka na okraj)

- zpravidla platí
  - disjunktní intervaly spolehlivosti ⇒ významný rozdíl
  - nevýznamný rozdíl průměrů ⇒ překryv intervalů
  - rozdíl průměrů může být významný a současně se intervaly mohou překrývat
  - pokud každý z intervalů spolehlivosti obsahuje výběrový průměr druhého výběru, rozdíl průměrů není významný (nemusí platit v případě, kdy oba rozsahy výběru jsou do čtyř)
- příklad: váha v 24. týdnu dětí matek maturantek
  - 95% interval spolehlivosti pro hochy [kg]: (7,51; 8,25)
  - 95% interval spolehlivosti pro dívky [kg]: (6,98; 7,59)
  - intervaly se poněkud překrývají, přestože $t$-test dal: $t = 2{,}52$, $p = 1{,}5\ \%$, tedy na odpovídající 5% hladině je rozdíl významný

# dvouvýběrový $t$-test a intervaly spolehlivosti
(poznámka na okraj)

- zpravidla platí
  - disjunktní intervaly spolehlivosti ⇒ významný rozdíl
  - nevýznamný rozdíl průměrů ⇒ překryv intervalů
  - rozdíl průměrů může být významný a současně se intervaly mohou překrývat
  - pokud každý z intervalů spolehlivosti obsahuje výběrový průměr druhého výběru, rozdíl průměrů není významný (nemusí platit v případě, kdy oba rozsahy výběru jsou do čtyř)
- příklad: váha v 24. týdnu dětí matek maturantek
  - 95% interval spolehlivosti pro hochy [kg]: (7,51; 8,25)
  - 95% interval spolehlivosti pro dívky [kg]: (6,98; 7,59)
  - intervaly se poněkud překrývají, přestože $t$-test dal: $t = 2{,}52$, $p = 1{,}5$ %, tedy na odpovídající 5% hladině je rozdíl významný

# dvouvýběrový $t$-test a intervaly spolehlivosti
(poznámka na okraj)

- zpravidla platí
  - disjunktní intervaly spolehlivosti $\Rightarrow$ významný rozdíl
  - nevýznamný rozdíl průměrů $\Rightarrow$ překryv intervalů
  - rozdíl průměrů může být významný a současně se intervaly mohou překrývat
  - pokud každý z intervalů spolehlivosti obsahuje výběrový průměr druhého výběru, rozdíl průměrů není významný (nemusí platit v případě, kdy oba rozsahy výběru jsou do čtyř)
- příklad: váha v 24. týdnu dětí matek maturantek
  - 95% interval spolehlivosti pro hochy [kg]: (7,51; 8,25)
  - 95% interval spolehlivosti pro dívky [kg]: (6,98; 7,59)
  - intervaly se poněkud překrývají, přestože $t$-test dal: $t = 2{,}52$, $p = 1{,}5$ %, tedy na odpovídající 5% hladině je rozdíl významný

# dvouvýběrový Wilcoxonův test (Mannův-Whitneyův)
(stačí **spojité rozdělení**)

- dva nezávislé výběry rozsahu $n_X, n_Y$
- spojitá rozdělení
- $\mathrm{H}_0$: rozdělení jsou stejná, tedy i **mediány** jsou stejné
- za $\mathrm{H}_0$ jsou výběry „dobře promíchané“
- určíme pořadí v rámci spojených výběrů
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- $W_X$ součet pořadí hodnot $X$

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud $|Z| \geq z(\alpha/2)$ (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejné variabilitě

# dvouvýběrový Wilcoxonův test (Mannův-Whitneyův)
(stačí **spojité rozdělení**)

- dva nezávislé výběry rozsahu $n_X, n_Y$
- spojitá rozdělení
- $\mathrm{H}_0$: rozdělení jsou stejná, tedy i **mediány** jsou stejné
- za $\mathrm{H}_0$ jsou výběry „dobře promíchané"
- určíme pořadí v rámci spojených výběrů
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- $W_X$ součet pořadí hodnot $X$

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud $|Z| \geq z(\alpha/2)$ (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejné variabilitě

# dvouvýběrový Wilcoxonův test (Mannův-Whitneyův)

(stačí **spojité rozdělení**)

- dva nezávislé výběry rozsahu $n_X, n_Y$
- spojitá rozdělení
- $\mathrm{H}_0$: rozdělení jsou stejná, tedy i **mediány** jsou stejné
- za $\mathrm{H}_0$ jsou výběry „dobře promíchané“
- určíme pořadí v rámci spojených výběrů
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- $W_X$ součet pořadí hodnot $X$

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud $|Z| \geq z(\alpha/2)$ (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejné variabilitě

# dvouvýběrový Wilcoxonův test (Mannův-Whitneyův)

(stačí **spojité rozdělení**)

- dva nezávislé výběry rozsahu $n_X, n_Y$
- spojitá rozdělení
- $\mathrm{H}_0$: rozdělení jsou stejná, tedy i **mediány** jsou stejné
- za $\mathrm{H}_0$ jsou výběry „dobře promíchané“
- určíme pořadí v rámci spojených výběrů
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- $W_X$ součet pořadí hodnot $X$

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud $|Z| \geq z(\alpha/2)$ (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejné variabilitě

# dvouvýběrový Wilcoxonův test (Mannův-Whitneyův)
(stačí **spojité rozdělení**)

- dva nezávislé výběry rozsahu $n_X, n_Y$
- spojitá rozdělení
- $\mathrm{H}_0$: rozdělení jsou stejná, tedy i **mediány** jsou stejné
- za $\mathrm{H}_0$ jsou výběry „dobře promíchané“
- určíme pořadí v rámci spojených výběrů
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- $W_X$ součet pořadí hodnot $X$

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud $|Z| \geq z(\alpha/2)$ (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejné variabilitě

# dvouvýběrový Wilcoxonův test (Mannův-Whitneyův)
(stačí **spojité rozdělení**)

- dva nezávislé výběry rozsahu $n_X, n_Y$
- spojitá rozdělení
- $\mathrm{H}_0$: rozdělení jsou stejná, tedy i **mediány** jsou stejné
- za $\mathrm{H}_0$ jsou výběry „dobře promíchané"
- určíme pořadí v rámci spojených výběrů
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- $W_X$ součet pořadí hodnot $X$

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud $|Z| \geq z(\alpha/2)$ (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejné variabilitě

# dvouvýběrový Wilcoxonův test (Mannův-Whitneyův)

(stačí **spojité rozdělení**)

- dva nezávislé výběry rozsahu $n_X, n_Y$
- spojitá rozdělení
- $\mathrm{H}_0$: rozdělení jsou stejná, tedy i **mediány** jsou stejné
- za $\mathrm{H}_0$ jsou výběry „dobře promíchané“
- určíme pořadí v rámci spojených výběrů
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- $W_X$ součet pořadí hodnot $X$

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud $|Z| \geq z(\alpha/2)$ (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejné variabilitě

# dvouvýběrový Wilcoxonův test (Mannův-Whitneyův)
(stačí **spojité rozdělení**)

- dva nezávislé výběry rozsahu $n_X, n_Y$
- spojitá rozdělení
- $\mathrm{H}_0$: rozdělení jsou stejná, tedy i **mediány** jsou stejné
- za $\mathrm{H}_0$ jsou výběry „dobře promíchané“
- určíme pořadí v rámci spojených výběrů
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- $W_X$ součet pořadí hodnot $X$

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud $|Z| \geq z(\alpha/2)$ (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejné variabilitě

# dvouvýběrový Wilcoxonův test (Mannův-Whitneyův)

(stačí **spojité rozdělení**)

- dva nezávislé výběry rozsahu $n_X, n_Y$
- spojitá rozdělení
- $H_0$: rozdělení jsou stejná, tedy i **mediány** jsou stejné
- za $H_0$ jsou výběry „dobře promíchané“
- určíme pořadí v rámci spojených výběrů
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- $W_X$ součet pořadí hodnot $X$

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud $|Z| \geq z(\alpha/2)$ (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejné variabilitě

| hoši | | | dívky | | | | poř. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 127 | | | | | | | 1 |
| 130 | | | | | | | 2 |
| | | | 131 | | | | 3 |
| | | | 132 | | | | 4 |
| 133 | | | | | | | 5 |
| | | | 135 | | | | 6 |
| 136 | 136 | | | | | | 7,5 |
| 138 | | | | | | | 9 |
| 139 | 139 | 139 | | | | | 11 |
| 140 | | | | | | | 13 |
| 141 | | | 141 | 141 | 141 | 141 | 16 |
| 142 | | | 142 | | | | 19,5 |
| | | | 143 | | | | 21 |
| | | | 146 | 146 | | | 22,5 |
| 147 | | | | | | | 24 |
| 149 | | | | | | | 25 |
| 151 | | | 151 | | | | 26,5 |

[wilcox.test(hosi,divky)]

$$\begin{aligned} w_X &= 1+2+5+2\cdot 7{,}5+9 \\ &\quad +3\cdot 11+13+16+19{,}5 \\ &\quad +24+25+26{,}5 = 189 \\ w_Y &= 3+4+6+4\cdot 16+19{,}5 \\ &\quad +21+2\cdot 22{,}5+26{,}5 = 189 \end{aligned}$$

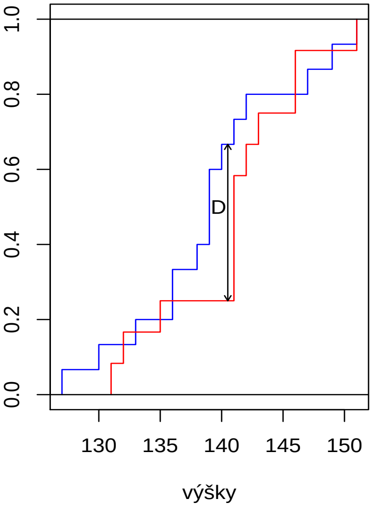
$$z = \frac{189 - 15\cdot(15+12+1)/2}{\sqrt{15\cdot 12(15+12+1)/12}} = -1{,}025$$

$$p = 0{,}3055$$

přesně: $p = 0{,}3149$

# Kolmogorovův-Smirnovův test

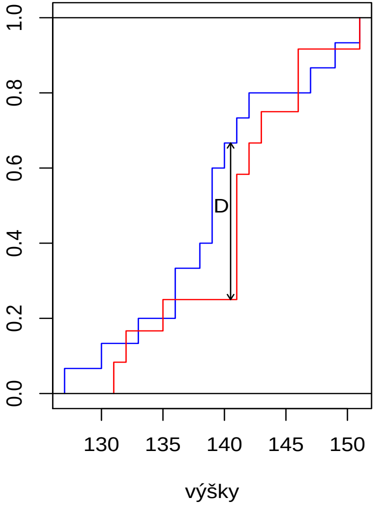
- porovná empirické distribuční funkce
- citlivý vůči všem neshodám (nejen co do populačního průměru či populačního mediánu)
- porovnání výšek hochů a dívek
- $D = \frac{10}{15} - \frac{3}{12} = 0{,}4167$
  $p = 19{,}7\ \%$




[ks.test(hosi,divky)]

# Kolmogorovův-Smirnovův test

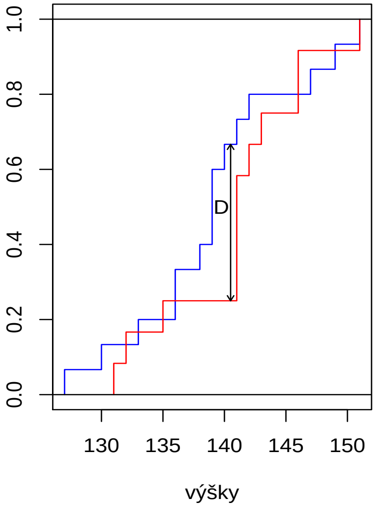
- porovná empirické distribuční funkce
- citlivý vůči všem neshodám (nejen co do populačního průměru či populačního mediánu)
- porovnání výšek hochů a dívek
- $D = \frac{10}{15} - \frac{3}{12} = 0{,}4167$
  $p = 19{,}7\ \%$




[ks.test(hosi,divky)]

# Kolmogorovův-Smirnovův test

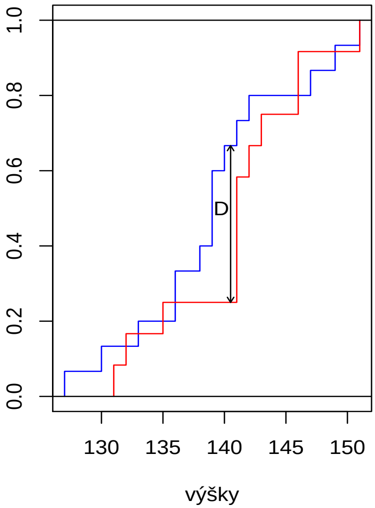
- porovná empirické distribuční funkce
- citlivý vůči všem neshodám (nejen co do populačního průměru či populačního mediánu)
- porovnání výšek hochů a dívek
- $D = \frac{10}{15} - \frac{3}{12} = 0{,}4167$
  $p = 19{,}7\ \%$




[ks.test(hosi,divky)]

# Kolmogorovův-Smirnovův test

- porovná empirické distribuční funkce
- citlivý vůči všem neshodám (nejen co do populačního průměru či populačního mediánu)
- porovnání výšek hochů a dívek
- $D = \frac{10}{15} - \frac{3}{12} = 0{,}4167$
  $p = 19{,}7\ \%$




[ks.test(hosi,divky)]