Alternativní rozdělení

Definice

Náhodná veličina X má *alternativní rozdělení* s parametrem p, jestliže nabývá hodnot 0 a 1 s pravděpodobnostmi

$$P[X = 1] = p \quad \text{a} \quad P[X = 0] = 1 - p$$

pro nějaké $p \in (0, 1)$. Značíme $X \sim \mathrm{Alt}(p)$.

- dva možné výsledky: 1 (úspěch) a 0 (neúspěch)
- alternativním rozdělením modelujeme indikátor náhodného jevu (úspěch/neúspěch) apod.
- parametr p často nazýváme pravděpodobnost úspěchu

Alternativní rozdělení

Platí:

- $$EX = p, \quad \operatorname{var} X = p(1 - p).$$
- distribuční funkce má skoky v bodech 0 a 1 o velikostech $1 - p$ a p, jinak je konstantní

Binomické rozdělení

Motivace:

- n nezávislých pokusů, v každém z nich nastane úspěch s pravděpodobností p
- zajímáme se o počet úspěchů (náhodná veličina)
- příklad: n hodů kostkou, zajímá nás počet šestek, které padly
- odvození rozdělení:
  počet úspěchů je celé číslo mezi 0 a n,
  pravděpodobnost, že zaznamenáme právě k úspěchů je rovna

$$\mathrm{P}[X = k] = p_k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Binomické rozdělení

Definice

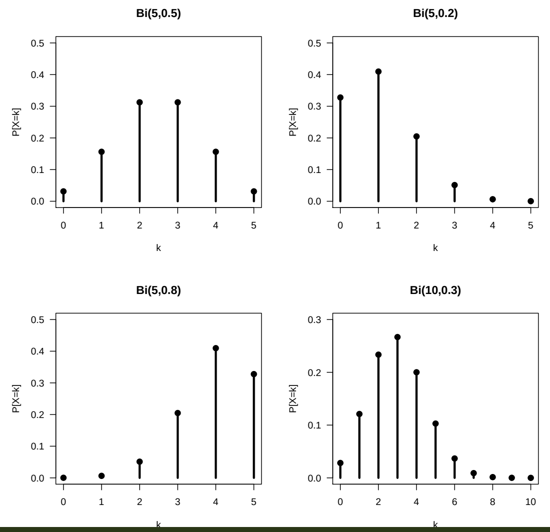
Náhodná veličina X má *binomické rozdělení* s parametry $n \geq 1$ a $p \in (0, 1)$, jestliže nabývá hodnot $0, \ldots, n$ s pravděpodobnostmi

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Značíme $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$.

Poznámka: Platí $\sum_{k=0}^{n} P[X = k] = 1$ (z binomické věty).

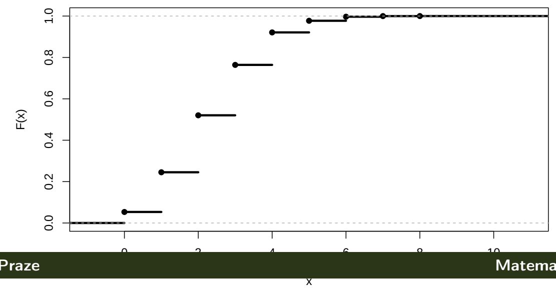
Pravděpodobnosti binomického rozdělení



Binomické rozdělení

Platí

- $$\mathrm{E}X = np \quad \mathrm{var}\, X = np(1-p)$$
- distribuční funkce je po částech konstatní a má skoky v bodech $0, 1, \ldots, n$,
  v bodě k je skok o velikosti $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$



Příklad

Příklad: Test obsahuje 10 otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možnosti: a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrtává odpovědi zcela náhodně. Označme X počet správně zodpovězených otázek.

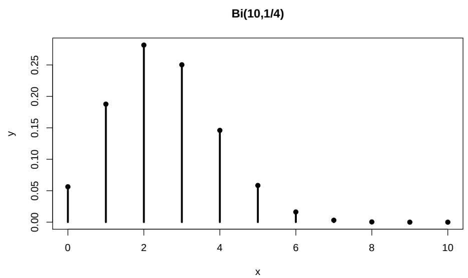
1. Jaké rozdělení veličiny X?
2. Jaký je očekávaný počet správně zodpovězených otázek?
3. Na úspěšné napsání testu je nutné správně zodpovědět alespoň 8 otázek. S jakou pravděpodobností se to studentovi povede?
4. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví alespoň jednu otázku správně?

Příklad — řešení

1. Pro $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ máme

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{n-k}.$$

Tj. X má binomické rozělení $\mathrm{Bi}(10, 1/4)$.



Příklad— pokrač.

2. $EX = \frac{10}{4} = 2.5$.
Očekáváme, že student zodpoví čtvrtinu všech otázek správně, tj. v průměru dvě a půl otázky.

3. $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$ (po dosazení) $= 0.0004$

4. $P(X \geq 1) = P(X = 1) + \cdots + P(X = 10) = \ldots$

Lepší postup:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0.9437$$

Poissonovo rozdělení

Definice

Náhodná veličina X má *Poissonovo rozdělení* s parametrem λ, jestliže nabývá hodnot $0, 1, 2, \ldots$ s pravděpodobnostmi

$$P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

pro nějaké $\lambda > 0$. Značíme $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.

Jelikož

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda},$$

musí platit $\sum_{k=0}^{\infty} P[X = k] = 1$.

Poissonovo rozdělení

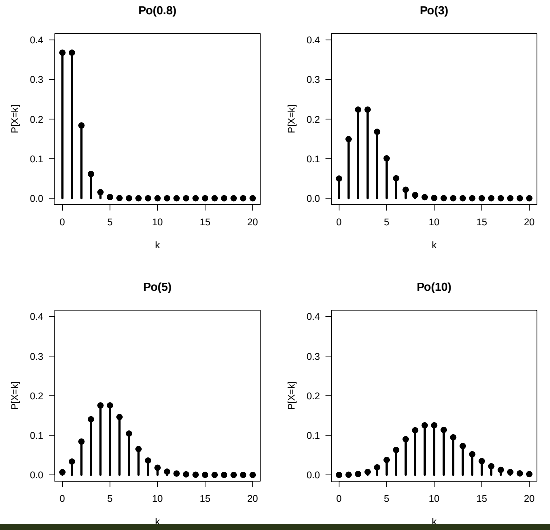
Platí

$$EX = \lambda, \quad \operatorname{var} X = \lambda.$$

Použití:

- Poissonovým rozdělením modelujeme počty událostí $\leftrightsquigarrow$ kolikrát nastal určitý jev během jednotkového časového intervalu, na jednotkové ploše apod.
- parametr λ představuje intenzitu výskytu událostí
- příklady: počet autonehod na dálnici D1 za jeden den, počet srážkových dnů v měsíci, počet vadných pixelů na obrazovce, apod.
  počet částic emitovaných radioaktivní látkou určité hmotnosti za jednotku času

Pravděpodobnosti Poissonova rozdělení

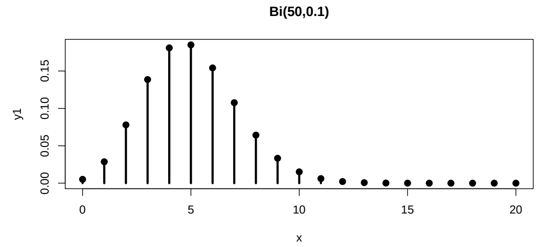


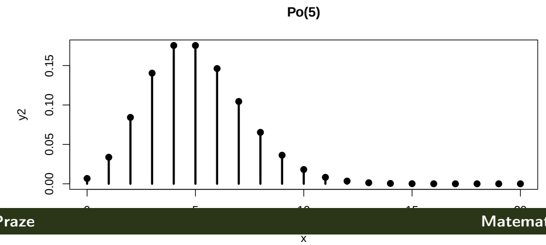
Souvislost s binomickým rozdělením

- pro n velké lze $\mathrm{Bi}(n, \frac{\lambda}{n})$ aproximovat pomocí $\mathrm{Po}(\lambda)$
  neboli
  pro velké n a malé p lze $\mathrm{Bi}(n, p)$ aproximovat $\mathrm{Po}(np)$
- příklad: počet nehod, ...
- výhoda: numerický výpočet je snazší pro Poissonovo rozdělení

Vztah $\mathrm{Bi}(n, \lambda/n)$ a $\mathrm{Po}(\lambda)$

Porovnání pravděpodobností pro $n = 50$ a $\lambda = 5$





Rovnoměrné rozdělení

Definice

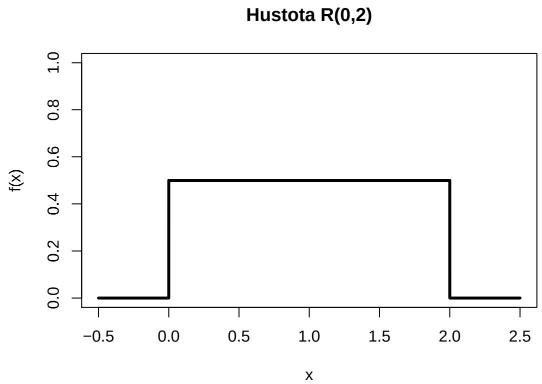
Náhodná veličina X má *rovnoměrné rozdělení* na intervalu (a, b), jestliže její hustota je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a, b), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Značíme $X \sim \mathrm{R}(a, b)$.

- hodnoty pouze z intervalu (a, b)
- hustota je na tomto intervalu konstantní $\rightsquigarrow$ X nabývá všech hodnot „rovnoměrně“, resp. „stejně pravděpodobně“

Hustota rovnoměrného rozdělení



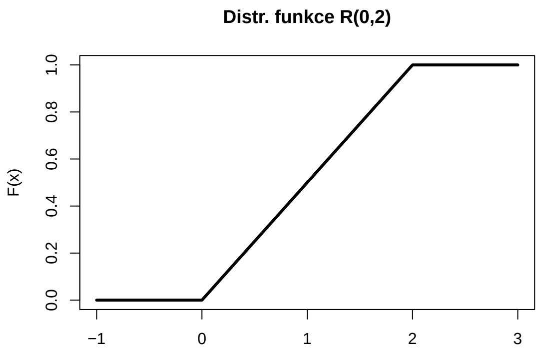
- platí $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
- pravděpodobnost $P[c < X < d]$ závisí pouze na délce intervalu (c, d)

Rovnoměrné rozdělení

Distribuční funkce rovnoměrného rozdělení je

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{pro } x \in (a,b),$$

$F(x) = 0$ pro $x \leq a$ a $F(x) = 1$ pro $x \geq b$.



Charakteristiky rovnoměrného rozdělení

- Střední hodnota
$$\mathrm{E}X = \frac{a+b}{2}$$
- Rozptyl
$$\operatorname{var} X = \frac{(b-a)^2}{12}$$
- Medián je stejný jako střední hodnota, tj. $\frac{a+b}{2}$ (plyne ze symetrie rozdělení)
- Kvantil na hladině α
$$F(q_\alpha) = \frac{q_\alpha - a}{b-a} = \alpha$$
$$q_\alpha = \alpha(b-a) + a$$

Příklady

Příkady využití

- modelování doby čekání na událost, která nastává v pravidelných intervalech délky d
- např. čekání na příjezd autobusu (přicházíme-li v náhodný okamžik)

Normální rozdělení

Definice

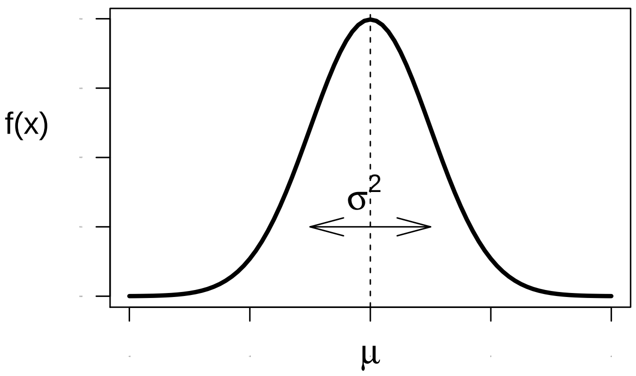
Náhodná veličina X má *normální rozdělení* s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$, jestliže má hustotu

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

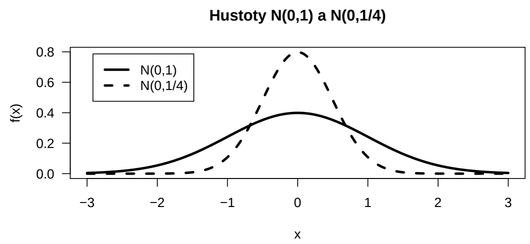
Značíme $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

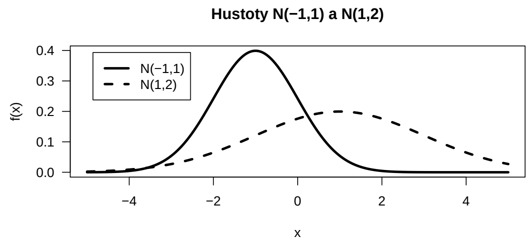
- nejdůležitější rozdělení ve statistice
- může nabývat jakýchkoliv reálných hodnot
- hustota je tzv. Gaussova křivka, je symetrická kolem μ a má v tomto bodě maximum
- parametr σ ovlivňuje „zploštělost“ hustoty

Hustota normálního rozdělení



Hustota normálního rozdělení





Charakteristiky

Střední hodnota

$$\mathsf{E}X = \mu$$

Rozptyl

$$\operatorname{var} X = \sigma^2$$

Distribuční funkci je nutné počítat numericky.

Medián je stejný jako střední hodnota, tj. μ (ze symetrie).

Využití

- výsledky experimentálního měření, chyby měření
- rozdělení kvantitativních znaků v populaci (výška, hmotnost, IQ) apod.
- má hezké teoretické vlastnosti
- má výsadní postavení ve statistice, neboť průměry většího počtu veličin mají rozdělení blízké normálnímu (přesněji viz Centrální limitní věta, která bude později).
- normální rozdělení je předpokladem řady statistických metod

Normované normální rozdělení

Normální rozdělení N$(0,1)$ (s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem) nazýváme normované. Jeho hustotu značíme φ, tj.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Distribuční funkce N$(0,1)$ se značí $\Phi(x)$ a počítá se jako

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Nelze ji vyjádřit explicitně, její hodnoty lze najít v tabulkách.

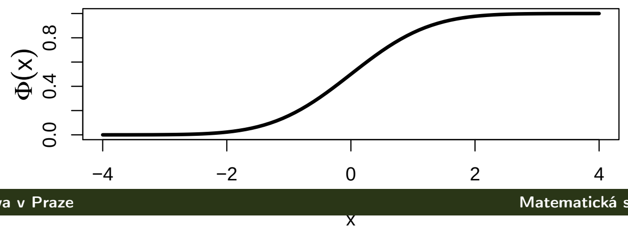
Distribuční funkce normálního rozdělení

Tabulka : Hodnoty distribuční funkce N$(0,1)$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\Phi(x)$	0.5	0.691	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

Přičemž platí

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$



Distribuční funkce normálního rozdělení

Důležité vztahy:

- Pokud $X \sim$ N$(0,1)$, pak $\sigma X + \mu \sim$ N(μ, σ^2).
- Pokud $X \sim$ N(μ, σ^2), pak $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim$ N$(0,1)$.

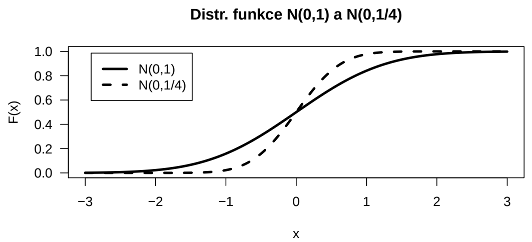
  Distribuční funkci N(μ, σ^2) lze proto vyjádřit jako

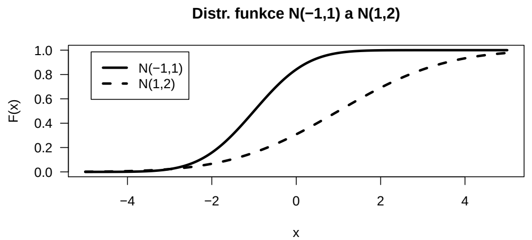
$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

a proto platí

$$\mathrm{P}(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Distribuční funkce normálního rozdělení

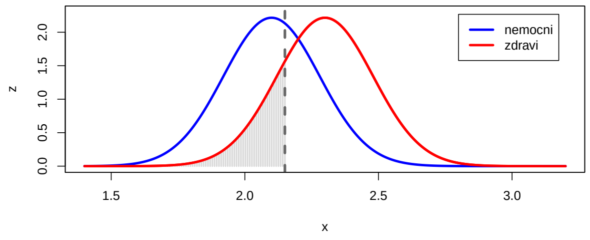


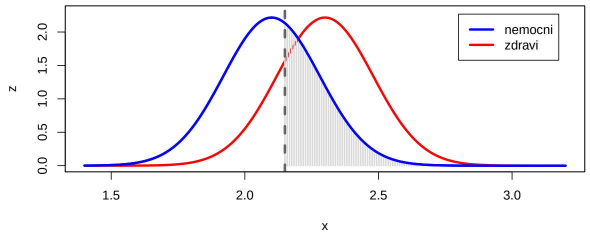


Příklad

Příklad: Obsah vápníku v krevním séru (v mmol/l) se řídí normálním rozdělením $N(2.30, 0.18^2)$ u zdravých lidí a rozdělením $N(2.10, 0.18^2)$ u nemocných lidí. Diagnostický test zjistí obsah krevního séra v krvi a na základě něj je člověk diagnostikován jako nemocný nebo jako zdravý (nízké hodnoty signalizují nemoc), přičemž za hraniční hodnotu je bráno 2.15 mmol/l. (Pacienti označení jako nemocní jsou následně podrobeni detailnějším diagnostickým testům.)

1. Kolik procent zdravých osob bude falešně označeno za nemocné?
2. Kolik procent nemocných nebude odhaleno?





Kolik procent zdravých osob bude falešně označeno za nemocné?

Vezmeme $X \sim N(2.30, 0.18^2)$. Zajímá nás

$$P(X < 2.15) = F(2.15) = \Phi\left(\frac{2.15 - 2.30}{0.18}\right) = \Phi(-0.833)$$
$$= 1 - \Phi(0.833) = (\text{tabulky}) = 0.202.$$

Tedy asi 20% zdravých bude zbytečně podrobněji testováno.

Kolik procent nemocných nebude odhaleno?

Vezmeme $Y \sim N(2.10, 0.18^2)$. Zajímá nás

$$P(Y > 2.10) = 1 - F(2.10) = 1 - \Phi\left(\frac{2.15 - 2.10}{0.18}\right) = 1 - \Phi(0.278)$$
$$= (\text{tabulky}) = 0.391.$$

Tedy téměř 40% nemocných nebude odhaleno.

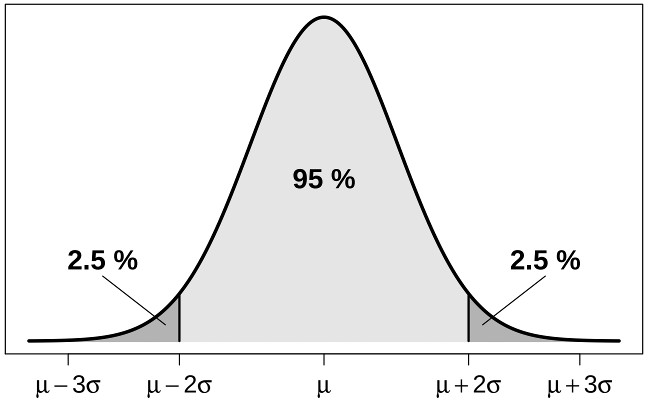
Pravidlo dvou (tří) sigma

Z tabelovaných hodnot $\Phi(x)$ plyne, že pro náhodnou veličinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$P[\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma] \approx 0.68$$
$$P[\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma] \approx 0.95$$
$$P[\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma] \approx 0.997$$

Náhodná veličina X tedy zřídka padá dále než 2σ–3σ od středu μ její hustoty.

Ilustrace



Příklad

Příklad krevní sérum:
Obsah vápníku v krvi zdravých lidí je s pravděpodobností přibližně 95 % v intervalu

$$(2.30 - 2 \cdot 0.18,\ 2.30 + 2 \cdot 0.18) = (1.94, 2.66)$$

(v mmol/l) a pouze 0.3% zdravých osob má obsah vápníku mimo interval

$$(2.30 - 3 \cdot 0.18,\ 2.30 + 3 \cdot 0.18) = (1.76, 2.84)$$

(v mmol/l).

Kvantily normovaného normálního rozdělení

- důležité ve statistice
- α-kvantily $\mathrm{N}(0,1)$ budeme značit jako u_α
- platí

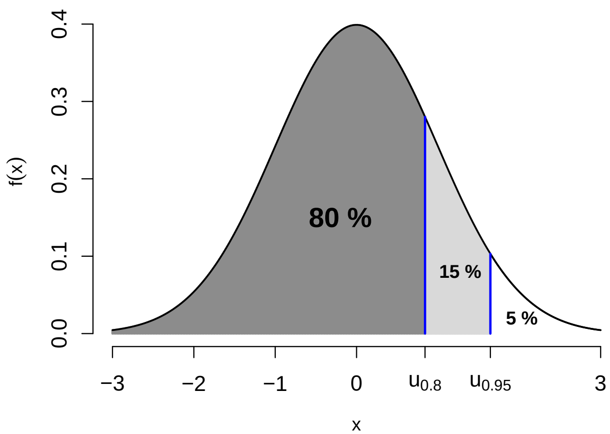
$$\mathrm{P}(X < u_\alpha) = \Phi(u_\alpha) = \alpha$$

  hodnoty jsou uvedeny v tabulkách a implementovány ve statistických (matematických) programech
- hodnoty $z_\alpha = u_{1-\alpha}$ splňují

$$\mathrm{P}(X > z_\alpha) = \alpha$$

  a nazývají se kritické hodnoty $\mathrm{N}(0,1)$

Kvantily normálního rozdělení



Tabulka : Vybrané kvantily rozdělení N(0, 1)

α	0.5	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
u_α	0	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Jelikož platí $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, máme

$$u_{1-\alpha} = -u_\alpha.$$

Příklad

Příklad: Obsah vápníku v krevním séru (v mmol/l) se řídí normálním rozdělením $N(2.30, 0.18^2)$ u zdravých lidí a rozdělením $N(2.10, 0.18^2)$ u nemocných lidí.

1. Jakou je třeba zvolit hranici, aby pouze 5% nemocných nebylo testem odhaleno?
2. Jakou je třeba zvolit hranici, aby se maximálně 10% zdravých lidí muselo zbytečně podrobovat dalším testům?

Jakou je třeba zvolit hranici, aby pouze 5 % nemocných nebylo testem odhaleno?

Hledáme kvantil rozdělení $N(2.10, 0.18^2)$ na hladině 95 %. Vezměme $X \sim N(2.10, 0.18^2)$, pak

$$0.95 = P(X < q) = P\left(\frac{X - 2.1}{0.18} < \frac{q - 2.1}{0.18}\right) = \Phi\left(\frac{q - 2.1}{0.18}\right)$$

a odtud

$$1.645 = u_{0.95} = \frac{q - 2.1}{0.18}$$

a tedy $q = 2.1 + 0.18 \cdot 1.645 = 2.396$. Je tedy potřeba vzít za hraniční hodnotu 2.396 mmol/l.

Jakou je třeba zvolit hranici, aby se maximálně 10% zdravých lidí muselo zbytečně podrobovat dalším testům?

Hledáme kvantil rozdělení $N(2.30, 0.18^2)$ na hladině 10 %. Vezměme $Y \sim N(2.30, 0.18^2)$, pak

$$0.10 = P(Y < q) = P\left(\frac{Y - 2.3}{0.18} < \frac{q - 2.3}{0.18}\right) = \Phi\left(\frac{q - 2.3}{0.18}\right)$$

a odtud

$$-1.282 = u_{0.10} = \frac{q - 2.3}{0.18}$$

a tedy $q = 2.3 - 0.18 \cdot 1.282 = 2.069$. Je tedy potřeba vzít za hraniční hodnotu 2.069 mmol/l.

Exponenciální rozdělení

Definice

Náhodná veličina X má *exponenciální rozdělení* s parametrem $\lambda > 0$, jestliže má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Značíme $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

- nabývá pouze kladných hodnot,
- její hustota exponenciálně klesá $\leftrightsquigarrow$ „nejpravděpodobnější“ jsou malé hodnoty

Charakteristiky

Střední hodnota

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda}$$

Čím vyšší je parametr λ, tím nižší je střední hodnota a naopak.

Distribuční funkce

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{pro } x > 0$$

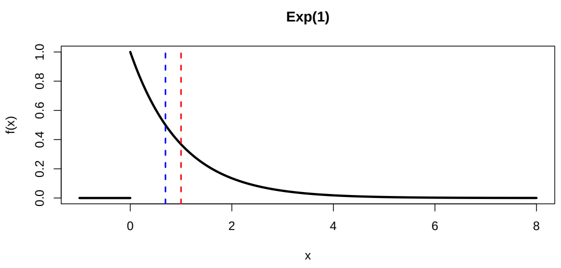
a $F_X(x) = 0$ pro $x \leq 0$.

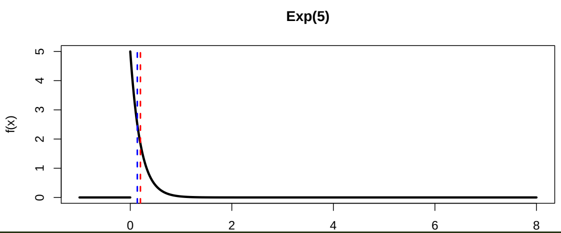
Odtud pak vypočteme medián

$$\mathrm{med}X = \frac{\log 2}{\lambda}$$

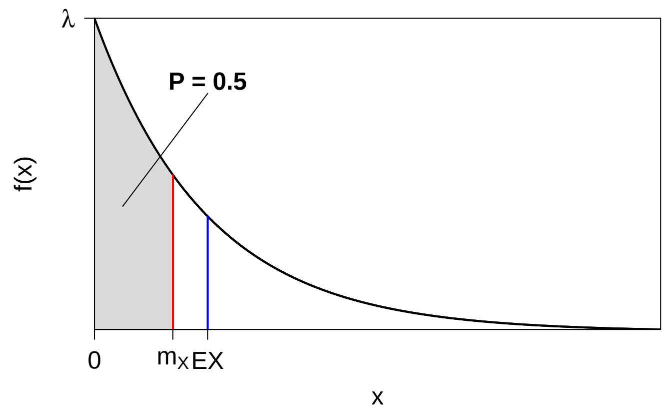
a platí $\mathrm{med}X < \mathrm{E}X$.

Hustota exponenciálního rozdělení





Medián a střední hodnota



Příklady

Příklady využití

- modelování doby čekání na událost
- délka telefonního hovoru, doba obsluhy u pokladny, apod.
- rozdělení kinetické energie molekuly ideálního plynu ve dvourozměrném prostoru je exponenciální

Maxwellovo rozdělení

Definice

Náhodná veličina X má *Maxwellovo rozdělení* s parametrem $a > 0$, jestliže má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^3\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Maxwellova veličina X nabývá pouze kladných hodnot
- její hustota je mírně asymetrická a nabývá maximální hodnoty v bodě $x = \sqrt{2}a$

Příklady

Využití

- Maxwellovo rozdělení se používá pro modelování rychlosti molekul ideálního plynu. V tom případě je jeho parametr roven

$$a = \sqrt{\frac{kT}{m}},$$

kde k je Boltzmannova konstanta, T je teplota [K] a m je hmotnost částice [kg].

Charakteristiky

Distribuční funkci nelze vyjádřit explicitně, je nutné ji počítat numericky jako

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2/a^2} \sqrt{z}\, e^{-z/2}\, dz \quad \text{pro } x > 0.$$

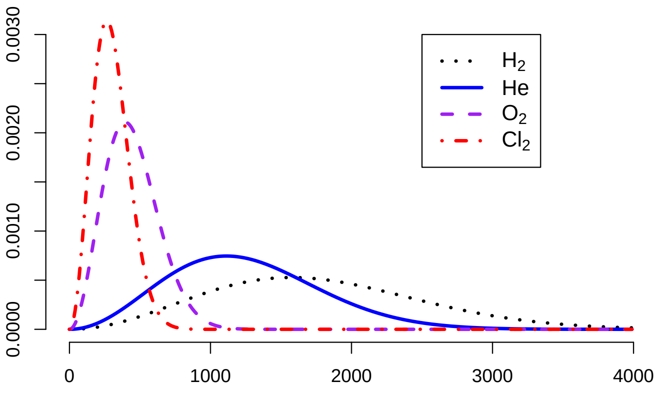
(Tj. i medián a kvantily lze spočíst jen numericky.)

Střední hodnota

$$EX = \sqrt{\frac{8}{\pi}} a = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}}$$

Hustota Maxwellova rozdělení

Hustota Maxwellova rozdělení pro různé plyny při 25°C



Hustota Maxwellova rozdělení pro různé teploty

Hustoty rychlostí molekul kyslíku při teplotách 100, 300 a 500 K.