Teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus

- skončí jedním z řady možných výsledků
- předem nevíme, jak skončí (náhoda)
- příklad: hod kostkou, zítřejší počasí, ...

Pravděpodobnost

- zkoumá náhodné jevy (mohou, ale nemusí nastat)
- S jakou pravděpodobností daný jev nastane?
- Jsou dané jevy na sobě nezávislé?
- ...

Náhodné jevy

Náhodný pokus

- množina všech možných výsledků Ω
- prvky Ω se nazývají *elementární náhodné jevy*, značí se ω
- *náhodný jev* je tvrzení o výsledku pokusu, tj. $A \subset \Omega$
- *jev nemožný* $\emptyset$ nenastává nikdy
- *jev jistý* je celá množina Ω a nastává vždy

Příklad (Hod kostkou)

Hodíme pravidelnou šestistěnnou kostkou:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = [\text{padne sudé číslo}] = \{2, 4, 6\}$

Náhodné jevy

Množina Ω nemusí být dána jednoznačně (elementární jevy pro daný problém volíme my)

Příklad (Pohlaví 2 sourozenců)

Uvažujme náhodně vybranou rodinu se dvěma dětmi a náhodný jev [alespoň jedno dítě je chlapec]

- uspořádané dvojice: $\Omega = \{KK, DK, KD, DD\}$
  [alespoň jeden kluk] $= \{KK, KD, DK\}$
- neuspořádané dvojice: $\Omega = \{KK, DK, DD\}$
  [alespoň jeden kluk] $= \{KK, KD\}$

Operace s náhodnými jevy

Uvažujme náhodné jevy $A, B \subset \Omega$.

- podjev $A \subset B$ znamená $A \Rightarrow B$
- *jev opačný* A^c nastane $\Leftrightarrow$ A nenastane
- *průnik* jevů $A \cap B$ nastane $\Leftrightarrow$ nastanou zároveň A i B
- *sjednocení* jevů $A \cup B$ nastane $\Leftrightarrow$ nastane alespoň jeden z jevů A a B
- *neslučitelné* (disjunktní) jevy: $A \cap B = \emptyset$

Připomenutí ze SŠ: *Vennovy diagramy*

Operace s náhodnými jevy

Podobně průnik a sjednocení více jevů $A_1, \dots, A_k$:

- $\bigcap_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ (všechny musí nastat);
- $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ (alespoň jeden musí nastat).

Operace s náhodnými jevy - příklady

Příklad (Hod kostkou)

Množina všech výsledků: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A =$ [padne sudé číslo] $= \{2, 4, 6\}$,
$B =$ [padne číslo větší než 3] $= \{4, 5, 6\}$

- jev opačný $A^c =$ [padne liché číslo] $= \{1, 3, 5\}$,
  $B^c =$ [padne číslo menší rovno třem] $= \{1, 2, 3\}$
- průnik $A \cap B =$ [padne sudé číslo větší než 3] $= \{4, 6\}$
- sjednocení
  $A \cup B =$ [padne číslo sudé nebo větší než 3] $= \{2, 4, 5, 6\}$

Pravděpodobnost

- číselné vyjádření „naděje“, že nastane jev A
- přiřazuje náhodnému jevu A reálné číslo z intervalu $[0, 1]$

Klasická pravděpodobnost:

- Ω je konečná, tj. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$
- všechny elementární jevy $\omega_i \in \Omega$ jsou stejně pravděpodobné

Pravděpodobnost jevu $A \subseteq \Omega$ je definována jako

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{N},$$

kde $|A|$ značí počet prvků množiny A.

(omezené využití)

Příklad

Příklad (Hod kostkou)

Hod symetrickou šestistěnnou kostkou: Jev $A =$ [padne sudé číslo], jev $B =$ [padne číslo větší než 3].

Pak

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\Omega| = 6$
- $A =$ [padne sudé číslo] $= \{2, 4, 6\}$,
- $B =$ [padne číslo větší než 3] $= \{4, 5, 6\}$
- $$\mathrm{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$
  $$\mathrm{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Příklad II

Příklad (Hod dvěma kostkami)

Házíme dvěma kostkami (modrá a zelená). Zajímá nás pravděpodobnost jevu $A =$ [součet je alespoň 10].

Ω je množina všech uspořádaných dvojic z čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Všech možností je: $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.
Příznivé možnosti: (4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6). Proto $|A| = 6$ a tedy

$$\mathrm{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Vlastnosti klasické pravděpodobnosti

Klasická pravděpodobnost splňuje:

- **V1** $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$
- **V2** $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$,
- **V3** je-li $A \cap B = \emptyset$, pak $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

Z těchto vlastností pak dále vyplývá

- **V4** $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$,
- **V5** pro $B \subset A$ je $\mathrm{P}(B) \leq \mathrm{P}(A)$ a $\mathrm{P}(A - B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$
- **V6** $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Nevýhody klasické pravděpodobnosti

Klasická pravděpodobnost má dva velmi omezující předpoklady:

1. konečný počet elementárních jevů
2. elementární jevy ω musí být stejně pravděpodobné

Kdy nám klasická pravděpodobnost nestačí?

- nestejně pravděpodobné elem. jevy ω (nesymetrická mince)
- Ω není konečná (házíme na koš, dokud se netrefíme)
- Ω je abstraktní, nelze jednoduše popsat ω (chceme mluvit o pravděpodobnosti bankrotu banky apod.)

Obou předpokladů se potřebujeme zbavit → obecnější a abstraktnější axiomatická definice pravděpodobnosti.

Axiomatická definice pravděpodobnosti

Nechť Ω je libovolná množina. *Pravděpodobností* nazveme libovolnou funkci P definovanou na podmnožinách Ω, která má následující vlastnosti:

- **A1** $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$ pro libovolné $A \subset \Omega$,
- **A2** $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,
- **A3** pro všechny $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ takové, že $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j$, platí

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

Poznámky

- z požadovaných vlastností A1–A3 pak dále vyplývají vlastnosti V4–V6, které měla klasická pravděpodobnost

Axiomatická definice pravděpodobnosti:

- připouští konečné, spočetné i nespočetné množiny Ω
- elementární jevy nemusí být stejně pravděpodobné
- pro danou Ω lze zavést mnoho různých pravděpodobností – mezi nimi si musíme sami zvolit (většinou to přirozeně vyplyne)

Dále budeme (teoreticky) pracovat s obecnou axiomatickou definicí pravděpodobnosti. V příkladech ale budeme většinou používat klasickou pravděpodobnost.

⋆ Poznámky

Poznámka pro náročné:
Ve skutečnosti se pravděpodobnost zavádí jen pro tzv. měřitelné množiny, ne nutně pro všechny podmnožiny Ω (neměřitelnou množinu nepovažujeme za náhodný jev). Při nespočetné Ω (třeba $\Omega = \mathbb{R}$) nelze totiž rozumně zavést pravděpodobnost, která funguje pro všechny podmnožiny Ω.

Příklad

Příklad

Předpokládejme, že náhodně vybraný člověk má vlastní stolní počítač s pravděpodobností 0.6, vlastní notebook s pravděpodobností 0.4 a oba typy počítačů s pravděpodobností 0.2. (Osoby s více než dvěma počítači neuvažujeme). Zajímá nás, s jakou pravděpodobností má náhodně vybraná osoba

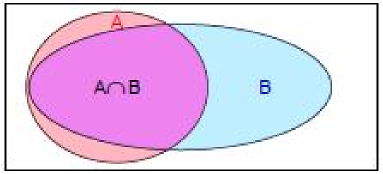
a) alespoň jeden počítač,
b) pouze notebook,
c) nemá žádný počítač?

Podmíněná pravděpodobnost

Definice

Nechť jev $B \subset \Omega$ má kladnou pravděpodobnost, $P(B) > 0$. *Podmíněnou pravděpodobnost* jevu A za podmínky, že nastal jev B, definujeme vztahem

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$



Podmíněná pravděpodobnost — poznámky

Nepodmíněná pravděpodobnost $P(A)$

$\hookrightarrow$ vypovídá o pravděpodobnosti výskytu jevu A v situaci, kdy nemáme žádné dodatečné informace o průběhu nebo výsledku experimentu.

Podmíněná pravděpodobnost $P(A \mid B)$

$\hookrightarrow$ vypovídá o pravděpodobnosti výskytu jevu A v situaci, kdy víme, že nějaký jiný jev B určitě nastal (tj. máme dodatečnou informaci)

- má stejné vlastnosti jako nepodmíněná pravděpodobnost

Pozor, jevy A a B nelze prohazovat, protože obecně

$$\mathrm{P}(A|B) \neq \mathrm{P}(B|A).$$

Příklad

Příklad (Dostihy)

Favority dostihu jsou koně Lívanec a Škobrťák. Kursy bookmakerů naznačují, že pravděpodobnost vítězství Lívance je 0.2 a Škobrťáka 0.25. Škobrťák však před startem spolkl hřebík a nepoběží. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje Lívanec?

Řešení: Jevy: $L =$ [vyhraje Lívanec], $\check{S} =$ [vyhraje Škobrťák].
Máme $\mathrm{P}(L) = 0.2$, $\mathrm{P}(\check{S}) = 0.25$, $L \cap \check{S} = \emptyset$.
Odtud

$$\mathrm{P}(L \mid \check{S}^c) = \frac{\mathrm{P}(L \cap \check{S}^c)}{\mathrm{P}(\check{S}^c)} = \frac{\mathrm{P}(L)}{\mathrm{P}(\check{S}^c)} = \frac{1/5}{3/4} = \frac{4}{15}.$$

Pravděpodobnost, že vyhraje Lívanec, je $4/15 = 0.2667$.

Příklad

Příklad

Házíme dvěma pravidelnými kostkami (modrou a zelenou). Jaká je pravděpodobnost, že na modré kostce padla 6, je-li celkový součet 8?

Nezávislost dvou jevů

Máme prostor elementárních jevů Ω a pravděpodobnost P.

Definice

Náhodné jevy $A, B \subseteq \Omega$ nazýváme *nezávislé*, jestliže platí

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

V opačném případě je nazýváme *závislé*.

Nechť jsou jevy A, B nezávislé a $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. Pak

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

a podobně $P(B \mid A) = P(B)$.
Jevy jsou tedy nezávislé, pokud pravděpodobnost jednoho jevu není nijak ovlivněna tím, zda druhý jev nastal nebo ne.

Příklad

Příklad (Dvě kostky)

Házíme dvěma kostkami (zelenou a modrou). Označme jevy
$A =$ [na modré kostce padlo sudé číslo],
$B =$ [součet čísel na obou kostkách je lichý].
Jsou jevy A a B nezávislé?

Máme $\Omega = \{(SS), (LL), (SL), (LS)\}$, kde S značí sudé číslo a L liché. Pak

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Tj. platí podmínka $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ a jevy jsou nezávislé.

Příklad

Příklad (Dvě kostky II)

Házíme dvěma kostkami (zelenou a modrou). Označme jevy
$A =$ [na modré kostce padlo sudé číslo],
$C =$ [součet čísel je větší než 10].
Jsou jevy A a C nezávislé?

Ω je množina všech uspořádaných dvojic z čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6$, $|\Omega| = 36$

$$P(A) = \frac{3 \cdot 6}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \quad P(A \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Tj. neplatí podmínka $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ a jevy jsou závislé.

Příklad

Příklad

Náhodně vybraný student má jedničku ze statistiky s pravděpodobností 0.3, jedničku z matematiky s pravděpodobností 0.2 a jedničku z obou předmětů s pravděpodobností 0.1.

- Jsou jedničky z uvedených dvou předmětů nezávislé?
- Jaká je pravděpodobnost jedničky ze statistiky, když už student má jedničku z matematiky?
- Jaká je pravděpodobnost jedničky z matematiky, když už má student jedničku ze statistiky?

Nezávislost— poznámky

Poznámka

Jsou-li A, B nezávislé, pak (A, B^c), (A^c, B), (A^c, B^c) jsou též dvojice nezávislých jevů.

Definice

Náhodné jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ nazýváme *nezávislé*, pokud pro každé $1 \leq k \leq n$ a pro každou podmnožinu $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ platí

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Tj. součinovou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, trojice, atd. až pro celou n-tici.

Příklad- na rozmyšlení

Na stole jsou 3 skořápky, pod jednou z nich je žeton. Uhodnete-li, kde je žeton, vyhráváte, jinak prohráváte.

Postup: Na začátku ukážete na jednu ze skořápek. Já pak odkryji jednu ze dvou zbývajících skořápek (která je prázdná). Vy můžete buď trvat na odkrytí původně vybrané skořápky, nebo své rozhodnutí změnit. Co je nejlepší strategie?