Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Klára Jelenová

# Sbírka úloh z finanční matematiky

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika, finanční matematika

2009

Dovoluji si na tomto místě poděkovat RNDr. Jitce Zichové, Dr., vedoucí bakalářské práce, za její podporu i cenné rady při vzniku této bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 12. 7. 2009 Klára Jelenová

# Obsah

**Název práce**: Sbírka úloh z finanční matematiky
**Autor**: Klára Jelenová
**Katedra**: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
**Vedoucí bakalářské práce**: RNDr. Jitka Zichová, Dr.
**e-mail vedoucího**: zichova@karlin.mff.cuni.cz
**Abstrakt**: Předložená práce představuje sbírku úloh k základním přednáškám z finanční matematiky - k Úvodu do financí a k Matematickým metodám ve financích. Okrajově se dotýká i přednášky Finančního managementu. Motivem k jejímu napsání byla myšlenka pomoci studentům Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy lépe pochopit probíranou teorii v oblasti financí. Během bakalářského studia musí studenti absolvovat mnoho předmětů a není bohužel dostatek prostoru mít k přednáškám týkajícím se financí i cvičení. Práce by měla přispět k samostatnému procvičování látky, k prohloubení znalostí v oblasti finanční matematiky a v aplikaci naučených matematických vzorců. Pro lepší pochopení a kontrolu jsou příklady řešeny podrobně, některé jsou doplněny o vzorová řešení v MS Excelu (verze 2007) či programu Mathematica (verze 7.0.0).
**Klíčová slova**: úrok, finanční tok, výnos, dluhopis, opce.

**Title**: An exercise book on financial mathematics
**Author**: Klára Jelenová
**Department**: Department of Probability and Mathematical Statistics
**Supervisor**: RNDr. Jitka Zichová, Dr.
**Supervisor's e-mail address**: zichova@karlin.mff.cuni.cz
**Abstract**: This Bachelor Thesis represents an Exercise Book to the essential lectures of Financial Mathematics (Introduction to Finance and Mathematical Methods in Finance). It also covers some topics of Financial Management, but marginally. The aim of this workbook is to help the students of the Faculty of Mathematics and Physics at Charles University to understand the theory of Finance better. The reason is that during their studies, students have to attend a lot of lectures and other courses - so there is not enough time to organise workshops and practise the theory. This workbook was considered for self-studying, to deepen the knowledge of Financial Mathematics and practise the learnt formulas. All exercises are accompanied by detailed solution - for better understanding and verification of results, some of them have also the exemplary solutions in MS Excel 2007 and Mathematica software (version 7.0.0).
**Keywords**: interest, cashflow, yield, bond, option.

# Úvod

Tato práce je sbírkou úloh z finanční matematiky doplněná o příslušnou teorii a potřebné matematické vzorce. Některé vzorce jsou odvozeny přímo v řešených příkladech. Veškeré věty jsou kvůli stručnosti uvedeny bez důkazů. Lze je však dohledat v literatuře, na kterou se autor odkazuje.

Kapitola 1 se věnuje úrokování. Seznamuje s pojmy současná a budoucí hodnota. Je zaměřena zejména na rozdíly mezi jednoduchým a složeným úrokováním. V příkladech se klade důraz na různé frekvence úrokování. S úrokováním jsou velmi úzce spjaty půjčky. I o nich se v této kapitole dočteme. Více informací k pojmům z této kapitoly se dá najít v knihách [1], [3] a [5].

Kapitola 2 zavádí pojem finanční tok a důchod. Zaobírá se problematikou výše splátek půjčky, rozdílem mezi polhůtným a předlhůtným důchodem a zavádí pojmy durace a konvexita. K této kapitole se vztahují stejné knihy jako ke kapitole 1.

V kapitole 3 se zmíníme o vnitřní míře výnosnosti a jejích modifikacích. Rozebereme její hlavní roli při rozhodování o výhodnosti investičních projektů. Uvedeme i další metody, které se věnují porovnání investičních projektů. Najdeme zde i zmínku o vlivu inflace na výnosovou rovnici. Více například viz kniha [3].

Kapitola 4 pojednává o dluhopisech. V příkladech se objevují převážně kupónové obligace. Kupónové platby představují speciální případ finančních toků. Jsou zde tedy využity vzorce z kapitoly 2. Opět je zde zmíněna durace. Tentokrát se na ni zaměříme i v příkladech. Navíc je sem zahrnuta imunizace dluhopisů. O základních charakteristikách dluhopisů se můžeme dočíst v knihách [2] a [3], imunizace je vyložena v knihách [4] a [5].

Poslední stručná kapitola je věnována základům teorie opcí. Hovoří o zisku (resp. ztrátě) z prodeje nebo koupě CALL nebo PUT opce. K této kapitole se hlavně vztahuje kniha [2].

První čtyři kapitoly spolu souvisejí a jsou značně propojeny. Často se setkáme s odkazem na jinou kapitolu. Aby čtenář získal určitý přehled o finanční matematice, je vhodné prostudovat si všechny kapitoly. Pro větší přehlednost je ve všech kapitolách použito jednotné značení. Zde je na místě upozornit, že ne vždy se shoduje se značením, které se vyskytuje v literatuře v odkazech. Symbol $\diamondsuit$ značí konec příkladu.

# Kapitola 1

# Úrokování

***Úrok*** (interest) je odměna poskytovateli půjčky za odloženou spotřebu vyjádřená v peněžních jednotkách. Z pohledu osoby, která si půjčuje, se jedná o cenu, kterou musí zaplatit, pokud si peníze vypůjčí. Vypůjčenou částku označujeme jako ***jistinu*** (principal). Poskytovatele půjčky nazýváme ***věřitel*** (creditor). Na druhé straně stojí ***dlužník*** (debtor) - osoba, která si půjčuje od věřitele.

Výši úroku určuje ***úroková míra*** (interest rate). Důležitá je i doba splácení dluhu, resp. počet období úročení půjčky. Hodnoty úrokové míry musí být konzistentní s obdobími úročení. Proto si vždy musíme dát pozor na to, se kterou úrokovou mírou počítáme (zda se jedná o roční, půlroční, měsíční apod.).

## 1.1 Jednoduché úrokování

Základním typem úrokování je ***jednoduché úrokování*** (simple interest). V tomto případě se po celou dobu splácení dluhu počítá úrok (ve vzorcích označován jako $I$) pouze z jistiny.

Základní vzorec má tvar

$$FV = PV * (1 + i * n) \tag{1.1}$$

Značení:
$PV$...jistina, současná hodnota (principal, present value)
$FV$...budoucí hodnota vypůjčené částky (future value)
$i$ .....roční úroková míra (p.a.)
$n$ ....počet období úročení (v letech)

Úrok $I$ za dané období je dán vzorcem

$$I = PV * i * n \tag{1.2}$$

Vidíme tedy, že budoucí hodnota jistiny je rovna součtu současné hodnoty vypůjčené částky a připsaného úroku, neboli

$$FV = PV + I \tag{1.3}$$

**Diskontování**

Diskontování můžeme označit jako „opačný proces“ k úročení. Důležitým pojmem je zde ***diskontní míra*** (discount rate). Roční diskontní míru značíme symbolem $d$. Pokud ponecháme označení z rovnice (1.1), je diskontní míra dána vzorcem

$$d = \frac{i}{1 + i * n}$$

Z rovnice (1.1) odvodíme vztah pro současnou hodnotu:

$$PV = FV * \frac{1}{1 + i * n} = FV * (1 - d * n) \tag{1.4}$$

**Poznámka:** Rozlišujeme dva typy půjček:

- *půjčka s úrokem:*
  - vypůjčíme si částku $PV$ na $n$ let s roční úrokovou mírou $i$ a vrátíme:

  $$FV = PV * (1 + i * n)$$

  - splatná částka je odvozena od výše půjčky, polhůtný úrok
  - míra zisku pro věřitele:

  $$\mu_u = \frac{FV - PV}{PV} = \frac{PV * i * n}{PV} = i * n \tag{1.5}$$

- *půjčka s diskontem:*
  - vypůjčíme si částku $PV$ na $n$ let s roční diskontní mírou $d$ a vrátíme částku $FV$:

  $$PV = FV - FV * d * n$$

  - výše půjčky je odvozena od splatné částky, předlhůtný úrok
  - míra zisku pro věřitele:

  $$\mu_d = \frac{FV - PV}{PV} = \frac{d * n}{1 - d * n} \tag{1.6}$$

Pokud $i = d$:

$$\mu_u = i * n \ \wedge \ \mu_d = \frac{i * n}{1 - i * n}$$

$\Rightarrow$

$$\mu_u < \mu_d,$$

jinak řečeno: pro věřitele je výhodnější půjčka s diskontem.

## 1.2 Složené úrokování

V případě, že se v každém období připíše úrok k jistině a v dalších obdobích se znovu úročí, nazýváme toto úrokování ***složené úrokování*** (compound interest).

Vzorec pro výpočet budoucí hodnoty :

$$FV = PV * (1 + i)^n, \tag{1.7}$$

používaná označení jsou totožná se symboly z rovnice (1.1).

**Diskontování**
Formuli pro diskontování při spojitém úrokování lze odvodit z rovnice (1.7):

$$PV = \frac{FV}{(1 + i)^n} \tag{1.8}$$

Pro diskontování se používá ***diskontní faktor*** označovaný $v$:

$$v = \frac{1}{1 + i} \tag{1.9}$$

Rovnici (1.8) lze tedy vyjádřit pomocí diskontního faktoru následovně:

$$PV = FV * v^n \tag{1.10}$$

## 1.3 Polhůtné a předlhůtné úrokování

Úročení nemusí být pouze roční. Jistina se může úročit $p$-krát ročně. Musíme tedy počítat také s příslušnou úrokovou mírou. Označme roční úrokovou míru $i = i_{(p)}$, je to tzv. ***nominální úroková míra***.

Nominální úroková míra pro $p$-tinu roku je rovna :

$$\frac{i_{(p)}}{p} \tag{1.11}$$

Jak napovídá název kapitoly, rozlišujeme dva typy úrokování.

### 1.3.1 Polhůtné úrokování

Předpokládejme, že jsme uložili částku 1 na 1 rok. Úrok $\frac{i_{(p)}}{p}$, který se dále úročí složeně s roční mírou $i_{ef}$, se připisuje *na konci* každé $p$-tiny roku.

Celkový příjem z úroků na konci roku (v čase 1) má hodnotu

$$\sum_{t=0}^{p-1} \frac{i_{(p)}}{p} * (1+i_{ef})^{\frac{t}{p}} = \frac{i_{(p)}}{p} * \frac{i_{ef}}{(1+i_{ef})^{\frac{1}{p}} - 1} \tag{1.12}$$

Chceme, aby se součet (1.12) rovnal ***efektivní úrokové míře*** (effective interest rate) $i_{ef}$, která reprezentuje úrokový výnos z částky 1 připsaný jednorázově na konci roku. Po úpravě dostáváme

$$\frac{i_{(p)}}{p} * \frac{i_{ef}}{(1+i_{ef})^{\frac{1}{p}} - 1} = i_{ef} \qquad \Rightarrow \qquad 1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{i_{(p)}}{p}\right)^p \tag{1.13}$$

### 1.3.2 Předlhůtné úrokování

Předpokládejme, že jsme uložili částku 1 na 1 rok. Úrok $\frac{d_{(p)}}{p}$, který se dále úročí složeně s roční mírou $i_{ef}$, se připisuje *na začátku* každé $p$-tiny roku. Označme $v = \frac{1}{1+i_{ef}}$.

Celkový příjem z úroků, kdyby byl vyplacen na začátku roku (v čase 0) je

$$\sum_{t=0}^{p-1} \frac{d_{(p)}}{p} * v^{\frac{t}{p}} = \frac{d_{(p)}}{p} * \frac{v-1}{v^{\frac{1}{p}} - 1} \tag{1.14}$$

Požadujeme, aby se součet (1.14) rovnal ***efektivní diskontní míře*** $d_{ef}$.

$$\frac{d_{(p)}}{p} * \frac{v-1}{v^{\frac{1}{p}} - 1} = d_{ef} \qquad \wedge \qquad v = \frac{1}{1+i_{ef}} = 1 - d_{ef} \quad \Rightarrow \quad 1 - d_{ef} = \left(1 - \frac{d_{(p)}}{p}\right)^p \tag{1.15}$$

Platí:

$$d_{ef} = \frac{i_{ef}}{1 + i_{ef}}$$

$$\frac{d_{(p)}}{p} = \frac{\frac{i_{(p)}}{p}}{1 + \frac{i_{(p)}}{p}}$$

**Poznámka:** Nadále budeme psát $i_{ef} = i$, $d_{ef} = d$.

## 1.4 Spojité úrokování

Pokud frekvence úročení roste nade všechny meze, pak platí

$$\lim_{p\to\infty} i_{(p)} = \lim_{p\to\infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}{\frac{1}{p}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{(1+i)^x - 1}{x} =$$

$$\frac{d}{dy}(1+i)^y\Big|_{y=0} = \frac{d}{dy}\exp\left[y * \log(1+i)\right]\Big|_{y=0} =$$

$$(1+i)^y * \log(1+i)\Big|_{y=0} = \log(1+i) = \delta \tag{1.16}$$

Symbolem $\delta$ označujeme ***intenzitu úroku***. Z rovnice (1.16) jsou zřejmé vztahy:

$$1 + i = e^{\delta}$$

$$v = e^{-\delta} \tag{1.17}$$

Nyní již máme vše připraveno pro zavedení vzorce pro ***spojité úrokování*** (continuos compounding):

$$FV = PV * e^{\delta * t} \tag{1.18}$$

## 1.5 Úrokové míry závislé na čase

Obecnější přístup představuje modelování úrokových měr jako funkcí času. Mějme časový interval $(t, t+h), h > 0$. V čase $t$ investujeme 1, v čase $t+h$ máme $1 + h * i_h(t)$, kde $i_h(t)$ je nominální úroková míra.

Speciální případy:

1) $h = 1,\ i_h(t) = i_1(t) = i \ \Rightarrow\ h * i_h(t) = i \ldots$ efektivní úroková míra

2) $h = \frac{1}{p},\ i_h(t) \overset{ozn.}{=} i_{(p)}(t) = i_{(p)} \ \Rightarrow\ h * i_h(t) = \frac{i_p}{p} \ldots$ nominální úroková míra pro $p$-tinu roku

$\lim_{h\to 0_+} i_{(h)}(t) = \delta(t) \ldots$ intenzita úroku

## Akumulační faktor

Označíme

$$1 + h * i_h(t) = A(t, t+h). \tag{1.19}$$

Tento ***akumulační faktor*** představuje zhodnocení částky 1 za časový interval délky $h$.
Pokud v čase $t_1$ investujeme $C$, potom v čase $t_2 > t_1$ máme $C * A(t_1, t_2)$.
Speciální případ:

$A(t_1, t_2) = (1+i)^{t_2 - t_1} \ldots$ složené úrokování

Akumulačním faktorem je funkce dvou proměnných s vlastnostmi:

1) $A(t, t) = 1$

2) *princip konzistence*

pokud $t_0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_n; n \ge 2$, pak platí:

$$A(t_0, t_n) = A(t_0, t_1) * A(t_1, t_2) * ... * A(t_{n-1}, t_n)$$

Zřejmě platí

$i_{(h)}(t) = \frac{A(t,t+h)-1}{h}$

$\delta(t) = \lim_{h\to 0_+} \frac{A(t,t+h)-1}{h}$

***Věta 1.1***

Nechť $\delta(t)$ a $A(t_0, t)$ jsou spojité funkce proměnné $t$ pro $t > t_0$ a nechť platí princip konzistence. Pak

$$A(t_1, t_2) = \exp\left[\int_{t_1}^{t_2} \delta(s)\, ds\right]. \tag{1.20}$$

Důkaz lze najít v knize [5].
Speciální případ:
$\delta(s) = \delta : A(t_1, t_2) = e^{\delta*(t_2 - t_1)} = (1+i)^{t_2 - t_1} \ldots$ složené úrokování

**Diskontování**
Nechť v čase 0 investujeme $C$ a v čase $t > 0$ máme 1.
Z rovnice $1 = C * A(0,t)$ je odvozen předpis pro diskontní faktor

$$v(t) = \frac{1}{A(0,t)}, \tag{1.21}$$

dle věty 1.1 lze také diskontní faktor vyjádřit vzorcem

$$v(t) = \exp\left[-\int_0^t \delta(s)\, ds\right]. \tag{1.22}$$

Speciální případ:
$\delta(s) = \delta : \qquad v(t) = e^{-\delta * t} = v^t$

Obecněji: v čase $t_1$ investujeme $C_1$,
v čase $t_2 > t_1 > 0$ máme $C_2$,
$C_2 = C_1 * A(t_1,t_2) = C_1 * \frac{A(0,t_2)}{A(0,t_1)} = C_1 * \frac{v(t_1)}{v(t_2)}$
Vychází nám

$$C_1 = C_2 * \frac{v(t_2)}{v(t_1)} = C_2 * \exp\left[-\int_{t_1}^{t_2} \delta(s)\, ds\right] \tag{1.23}$$

## 1.6 Příklady

**Příklad 1.1**

Paní Vosecká uvažuje o půjčce na novou koupelnu ve výši 175 000 Kč s dobou splatnosti 9 měsíců. Na výběr má půjčku s diskontem s roční diskontní mírou 7 % nebo půjčku s úrokem, kde roční úroková míra činí 7,5 %, úvěr se úročí jednoduše. Kterou půjčku by si měla paní Vosecká zvolit?

**Řešení:**
Paní Vosecká by si měla zvolit tu půjčku, při které zaplatí menší úrok.
O dvou typech půjčky jsme zmínili v poznámce u jednoduchého úrokování v kapitole 1.1. Pro půjčku s diskontem máme
$FV = 175\ 000$ Kč
$n = 0,75$ let
$d = 7\ \% = 0,07$

Klientce bude půjčeno

$$PV_d = FV - FV * d * n$$

pro naše hodnoty:

$$PV_d = 175\ 000 - 175\ 000 * 0,07 * 0,75 \doteq 165\ 813 \text{ Kč}$$

Předlhůtný úrok, který paní Vosecká uhradí bance, je 175 000 - 165 813 = 9 187 Kč.

Pro půjčku s úrokem máme
$PV = 175\ 000$ Kč
$n = 0,75$ let
$i = 7,5\ \% = 0,075$
Paní Vosecká by si v tomto v tomto případě půjčila 175 000 Kč a bance by vracela

$$FV = 175\ 000 * (1 + 0,075 * 0,75) \doteq 184\ 844 \text{ Kč}$$

Polhůtný úrok, který by paní Vosecká zaplatila bance, je 184 844 - 175 000 = 9 844 Kč.

Výhodnější je tedy pro paní Voseckou půjčka s diskontem.

Pro banku by naopak bylo výhodnější půjčit klientce s úrokem, neboť míra zisku pro věřitele při půjčce s úrokem spočítaná podle (1.5) je vyšší než míra zisku pro půjčku s diskontem podle rovnice (1.6).

- $\mu_u = i * n = 0,075 * 0,75 = 0,05625$
- $\mu_d = \frac{d*n}{1-d*n} = \frac{0,07*0,75}{1-0,07*0,075} \doteq 0,0554$

$\diamondsuit$

**Příklad 1.2**

Paní Mladá se v roce 1987 rozhodla uložit do banky 10 000 Kč. V roce 2009 se však bojí, že banka zkrachuje, a tak si chce své uložené peníze vybrat (pro jednoduchost se výběr uskuteční ve stejný den jako se uskutečnil před 22 lety vklad). Vklad se úročil složeně s roční nominální úrokovou mírou 4 % jednou za rok.

a) Kolik by měla banka paní Mladé dnes vyplatit?

b) O kolik by dnes měla paní Mladá méně, pokud by se vklad úročil jednoduše?

**Řešení:**

Zajímá nás budoucí hodnota $FV$ vkladu v hodnotě 10 000 Kč.

Víme:

$PV = 10\ 000$ Kč

$n = 22$ let

$i = 4\ \% = 0,04$

a) K výpočtu použijeme rovnici (1.7):

$$FV = PV * (1 + i)^n.$$

Tedy

$$FV = 10\ 000 * (1 + 0,04)^{22} \doteq 23\ 699 \text{ Kč}.$$

Pokud bychom chtěli tuto úlohu vyřešit v Excelu, použili bychom funkci BUDHODNOTA a do argumentů bychom zadali:

Sazba: 0,04

Pper: 22

Splátka: 0 (lze ponechat nevyplněné)

Souč_hod: -10000

Typ: nevyplňujeme

Výsledný příkaz tedy vypadá následovně:

$$=\text{BUDHODNOTA}(0,04; 22; 0; -10000).$$

Řešení je samozřejmě totožné s předchozím výsledkem.

b) Pro jednoduché úrokování použijeme vzorec (1.1):

$$FV = PV * (1 + i * n).$$

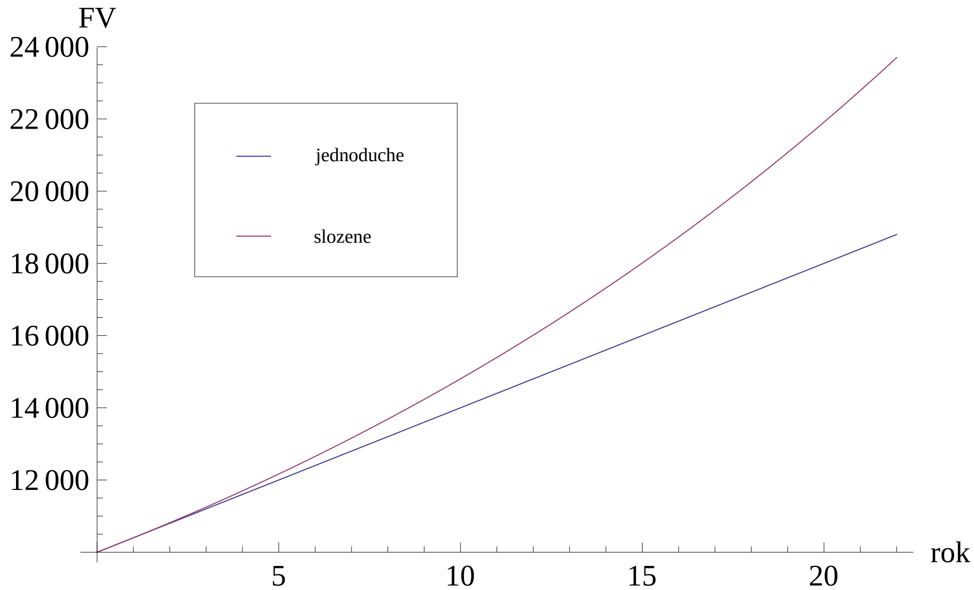
Po dosazení

$$FV = 10\ 000 * (1 + 0,04 * 22).$$

Budoucí hodnota při jednoduchém úročení se rovná 18 800 Kč. Zde by byl úrok roven pouhým 8 800 Kč neboli každý rok se k původnímu vkladu připočetlo 400 Kč (po dobu 22 let).

Rozdíl budoucích hodnot při složeném a jednoduchém úročení je

$$23\ 699 - 18\ 800 = 4\ 899 \text{ Kč}.$$




Obrázek 1.1: Složené a jednoduché úročení

Na obrázku 1.1 vidíme grafické porovnání stavu účtu v průběhu 22 let. Vidíme, že při složeném úročení hodnota účtu roste exponenciálně, zatímco při jednoduchém úročení roste účet lineárně.

$\diamondsuit$

**Příklad 1.3**

Uvažujme podobnou situaci jako v Příkladu 1.2, nyní ale předpokládejme měsíční úročení. Ostatní údaje jsou totožné. Kolik by si paní Mladá vybrala dnes z banky v tomto případě?

**Řešení:**

Zajímá nás tedy opět budoucí hodnota $FV$ vkladu v hodnotě 10 000 Kč. Nyní ale víme:

$PV = 10\ 000$ Kč
$n = 22$ let
$p = 12$
$i_{(p)} = i_{(12)} = 4\ \% = 0,04$

Měsíční nominální úroková míra je tedy dle (1.11) rovna $\frac{0,04}{12}$.

Dle vzorce (1.13) víme, že: $1 + i = \left(1 + \frac{i_{(p)}}{p}\right)^p$. Teď již můžeme použít rovnici (1.7), tím mám vznikne vzorec pro složené úročení p-krát ročně:

$$FV = PV * \left(1 + \frac{i_{(p)}}{p}\right)^{p*n} \tag{1.24}$$

Budoucí hodnota při měsíčním úročení se rovná:

$$FV = 10\,000 * \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{12*22} \doteq 24\,074 \text{ Kč}.$$

Při složeném měsíčním úročení získáme o 375 Kč více než při složeném ročním.

Použití funkce BUDHODNOTA v Excelu je obdoba minulého případu. Nesmíme však zapomenout na zadání správné úrokové sazby - v tomto případě MĚSÍČNÍ - a na příslušný počet úrokovacích období:

Sazba: $\frac{0,04}{12}$
Pper: $12 * 22$ $(= 264)$
Splátka: 0 (lze ponechat nevyplněné)
Souč_hod: -10000
Typ: nevyplňujeme

$\Rightarrow$

$$=\text{BUDHODNOTA}(0,04/12; 12 * 22; 0; -10000).$$

$\diamondsuit$

**Poznámky k příkladu 1.3:**

1) V případě, že by se jednalo o měsíční jednoduché úročení, myšlenka zůstává stejná jako u ročního. Každé období se na účet připíše příslušný úrok z uložené částky, tedy:

$$FV = PV * \left(1 + p * n * \frac{i_{(p)}}{p}\right) \tag{1.25}$$

Upravením tohoto vzorce však zjistíme, že je totožný se vzorcem pro jednoduché roční úročení. Vidíme tedy, že na rozdíl od složeného úročení se výsledná částka při měsíčním úročení (oproti ročnímu) nezmění. To platí samozřejmě i pro jiná úročení $p$-krát do roka. Je to tím, že připsané úroky se neúročí.

2) Pokud by se frekvence úročení blížila $\infty$, pak bychom použili vzorec (1.18) pro spojité úrokování, kde:
$i_{(p)} \;\rightarrow\; \delta = 0,04$
$t = 22$ let
a výsledek by vypadal následovně:

$$FV = 10\ 000 * e^{0,04*22} \doteq 24\ 109 \text{ Kč}$$

Pro srovnání ukažme, jaké výše by dosahovala budoucí hodnota při složeném denním úročení ($p = 365$).

$$FV = 10\ 000 * \left(1 + \frac{0,04}{365}\right)^{365*22} \doteq 24\ 108 \text{ Kč}$$

Rozdíl mezi spojitým a složeným denním úrokováním je nepatrný.

**Příklad 1.4**

Pan Zlatý přemýšlí, jak nejvýhodněji uložit 1 000 000 Kč. Doufá, že peníze nebude potřebovat příští 4 roky. Rozhoduje se mezi třemi bankami. Každá nabízí jinou úrokovou sazbu a jinou frekvenci úročení (viz tabulka 1.1). Jakou banku by měl pan Zlatý vyhodnotit jako pro něj nejvýhodnější? Předpokládáme, že banky úročí vklad složeně.

| **Banka** | **Úrok (p.a.)** | **Frekvence úročení ($p$)** |
|---|---|---|
| *banka A* | 3,95 % | 12 |
| *banka B* | 4,00 % | 3 |
| *banka C* | 4,05 % | 1 |

Tabulka 1.1

**Řešení:**

Mohli bychom samozřejmě opět počítat budoucí hodnotu pro každou banku zvlášť dle vzorce (1.24):
banka A:

$$FV = 1\ 000\ 000 * \left(1 + \frac{0,0395}{12}\right)^{12*4} \doteq 1\ 170\ 862$$

banka B:

$$FV = 1\ 000\ 000 * \left(1 + \frac{0,04}{3}\right)^{3*4} \doteq 1\ 172\ 271$$

banka C:

$$FV = 1\,000\,000 * (1 + 0,0405)^4 \doteq 1\,172\,110$$

Existuje však i jednodušší způsob, jak tuto úlohu vyřešit. Slouží nám k tomu efektivní úroková míra $i_{ef}$. Dle vzorce (1.13) se efektivní úroková míra rovná:

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{i_{(p)}}{p}\right)^p - 1$$

Stačí spočítat efektivní úrokové míry pro všechny banky a jejich porovnáním zjistíme, která je nejvýhodnější:
banka A:

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{0,0395}{12}\right)^{12} - 1 \doteq 0,040223 = 4,0223\%$$

banka B:

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{0,04}{3}\right)^3 - 1 \doteq 0,040536 = 4,0536\%$$

banka C:

$$i_{ef} = (1 + 0,0405) - 1 = 0,0405 = 4,05\%$$

Nejvyšší efektivní úroková míra vyšla pro banku B, tedy nejvýhodnější by bylo vložit peníze do banky B.

I Excel umí spočítat efektivní úrokovou míru. Použijeme funkci EFFECT, do argumentů zadáme např. pro banku A následující:

Úrok: 0,0395
Období: 12

Výsledný vzorec:

$$\text{=EFFECT}(0,0395; 12)$$

$\diamondsuit$

**Poznámky:**

*1. Kalendářní konvence*

Pro výpočty úroku je důležité vědět, podle jaké konvence máme počítat dobu, po kterou úročíme (např. při počítání tzv. ***alikvótního úroku*** - viz kapitola 4: Dluhopisy). Rozlišujeme různé typy kalendářních konvencí:

1) ACT/360 … skutečný počet kalendářních dní vztahovaný k bazickému roku o 360 dnech

2) ACT/365 … skutečný počet kalendářních dní vztahovaný k bazickému roku o 365 dnech (přestupný rok se bere jako rok, který má 365 dní)

3) ACT/ACT … skutečný počet kalendářních dní vztahovaný ke skutečnému počtu dní v roce

4) 30/360 … měsíc má 30 dní, vztahováno k bazickému roku o 360 dnech (zde se ještě rozlišuje EUR 30/360 a US 30/360 - nepatrně se liší výpočet dní mezi dvěma daty, viz např. kniha [3] )

*2. Smíšené úrokování*

Pokud doba splatnosti není celočíselným násobkem délky úrokovacího období, používá se často tzv. ***smíšené úrokování***. Smíšené úrokování úročí složeně přes celočíselný počet období a pro necelé období používá úrokování jednoduché. Neboli pokud

$$T = \lfloor T \rfloor + \{T\}\,, \quad \lfloor T \rfloor \text{ celá část } T,\ 0 < \{T\} < 1$$

kde $T$ je počet úrokovacích období, pak budoucí hodnota v čase $T$ je

$$FV = PV * (1+i)^{\lfloor T \rfloor} * (1 + i * \{T\}) \tag{1.26}$$

Na následujícím příkladu si ukážeme, jak počítáme úroky v případě, kdy je čas udán počtem dní a úroková míra je roční.

**Příklad 1.5**

Pan Veselý se na začátku roku 2005 rozhodl, že si postaví dům. Spočítal si, že dům ho bude stát 3 miliony Kč, na účtu měl však jen 1 800 000 Kč. Uložil tedy 2. února 2005 všechny své peníze do banky s roční nominální úrokovou mírou 3 %. Jeho vklad se úročí měsíčně složeně. Dne 11. sprna 2006 účet zrušil a následující den si chybějící peníze vypůjčil od banky s roční úrokovou mírou 3,6 %, která jeho půjčku úročí jednoduše. Půjčka bude splacena jednorázově. Dne 28. června 2007 pan Veselý vyhrál v loterii 1 160 000 Kč (po zdanění) a rozhodl se, že se pokusí splatit svůj dluh. Bude tato částka panu Veselému stačit na splacení celého dluhu? Předpokládejme kalendářní konvenci ACT/360.

**Řešení:**

Začneme tím, že si spočítáme, kolik měl pan Veselý na účtu dne 11. srpna 2006. Hodnota vkladu 11. srpna 2006 je dle (1.24):

$$FV = PV * \left(1 + \frac{i_{(12)}}{12}\right)^{12*n}, \tag{1.27}$$

kde $i_{(12)} = 0,03$ a $n$ je počet let. Od 2. února 2005 do 2. srpna 2006 uplyne 18 měsíců o 30 dnech a zbývá 9 dnů, neboli v letech $n = 1,5 + \frac{9}{360} = 1,525$. Vidíme tedy, že počet období úročení není celé číslo. Nyní si ukážeme, o kolik by se lišil stav účtu při úrokování složeném oproti smíšenému.

- Složené úrokování:

$$FV = 1\ 800\ 000 * \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{12*1,525} \doteq 1\ 884\ 155 \text{ Kč}$$

  V Excelu funguje vše analogicky jako v Příkladu 1.2, jen musíme zadat:

  Pper : 12*1,525 (=18,3)
  Celkově tedy:

$$=\text{BUDHODNOTA}(0,03/12; 18,3; 0; -1800000).$$

- Smíšené úrokování (dle (1.26)):

$$FV = 1\ 800\ 000 * \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{18} * \left(1 + \frac{0,03}{12} * 0,3\right) \doteq 1\ 884\ 156 \text{ Kč}$$

Výsledek dvou různých způsobů úročení se v našem případě téměř neliší. Uvažujme tedy, že dne 11. srpna 2006 bude mít tedy pan Veselý na účtu 1 884 155 Kč.
Nyní se vraťme k našemu příkladu. Potřebujeme znát výši půjčky, která je zřejmě 3 000 000 − 1 884 155 = 1 115 845 Kč. Budoucí hodnota při jednoduchém úročení se spočítá následovně:

$$FV = PV * \left(1 + \frac{t}{360} * i\right), \tag{1.28}$$

kde $t$ je počet dní úročení.
Od 12. srpna 2006 (den poskytnutí půjčky) do 28. června 2007 uplyne 320 dní.

$$FV = 1\ 115\ 845 * \left(1 + \frac{320}{360} * 0,036\right) \doteq 1\ 151\ 552 \text{ Kč}$$

Panu Veselému tedy bude jeho 1 160 000 Kč stačit na splacení úvěru i s veškerými úroky.

$\diamondsuit$

Nyní si ještě ukážeme příklad na diskontování.

**Příklad 1.6**

Paní Dobrá bude za 5 let potřebovat 150 000 Kč na převod družstevního bytu do osobního vlastnictví. Nyní má možnost vložit své úspory na vklad úročený čtvrtletně složeně s roční nominální úrokovou mírou 4,4 %. Kolik musí do banky vložit, aby měla za 5 let dostatek peněz?

**Řešení:**

Ze zadání:

$FV = 150\,000$ Kč

$n = 5$ let

$p = 4$

$i_{(p)} = 4,4~\% = 0,044$

Čtvrtletní nominální úroková míra je tedy dle (1.11) rovna: $\frac{0,044}{4} = 0,011$.

Známe vzorec pro současnou hodnotu:

$$PV = FV * \frac{1}{\left(1 + \frac{i_{(p)}}{p}\right)^{p*n}}$$

Konkrétně:

$$PV = 150\,000 * \frac{1}{(1 + 0,011)^{4*5}} \doteq 120\,523 \text{ Kč.}$$

Při použití Excelu:

$$=\text{SOUČHODNOTA}(0,011; 20; ; -150000).$$

Paní Dobrá by si dnes musela do banky vložit 120 523 Kč, aby měla za 5 let na účtu potřebných 150 000 Kč.

$\diamondsuit$

Na závěr kapitoly zařaďme příklad na úrokové sazby závislé na čase.

**Příklad 1.7**

Důležitým vzorcem pro výpočet intenzity úroku $\delta(t)$ je Stoodleyův vztah:

$$\delta(t) = p + \frac{s}{1 + r * e^{s*t}}, \qquad t > 0 \tag{1.29}$$

kde $p, r$ a $s$ jsou parametry.
Najděte vztah pro výpočet diskontního faktoru $v(t)$ za platnosti Stoodleyova vztahu.

**Řešení:**

Vyjdeme ze vzorce (1.22).

$$\begin{aligned}
v(t) &= \exp\left[-\int_0^t \delta(y)\,dy\right] \\
&= \exp\left[-\int_0^t \left(p + \frac{s}{1 + r * e^{s*y}}\right) dy\right] \\
&= \exp\left[-\int_0^t \left(p + s - \frac{r * s * e^{s*y}}{1 + r * e^{s*y}}\right) dy\right] \\
&= \exp\left\{-(p + s) * t + [\log(1 + r * e^{s*y})]_0^t\right\} \\
&= \exp\left[-(p + s) * t\right] * \frac{1 + r * e^{s*t}}{1 + r} \\
&= \frac{1}{1 + r} * e^{-(p+s)*t} + \frac{r}{1 + r} * e^{-p*t}
\end{aligned}$$

**Poznámka:**

Pokud definujeme $v_1 = e^{-(p+s)}$ a $v_2 = e^{-p}$, můžeme psát

$$v(t) = \frac{1}{1 + r} * v_1^t + \frac{r}{1 + r} * v_2^t$$

Tento vztah vyjadřuje vážený průměr 2 diskontních faktorů s konstantními intenzitami.

$\diamondsuit$

# Kapitola 2

# Finanční toky a důchody

## 2.1 Diskrétní finanční tok

Jedná se o platby $CF_{t_1}, ..., CF_{t_n}$ v časech $0 < t_1 < ... < t_n$; často $t_j = j$. Současná hodnota (v čase 0) je

$$PV = \sum_{j=1}^{n} CF_{t_j} * v(t_j) \tag{2.1}$$

Speciálně : $v(t_j) = v^{t_j} = e^{-\delta * t_j},\ v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$

Budoucí hodnota (v čase $T \geq\ t_n$, zpravidla $T = t_n$):

$$FV = \sum_{j=1}^{n} CF_{t_j} * A(t_j, T), \tag{2.2}$$

kde $A(t_j, T)$ je ***akumulační faktor*** daný vzorcem (1.20).

Speciálně : $A(t_j, T) = (1+i)^{T-t_j} = e^{\delta * (T-t_j)}$.

## 2.2 Spojitý finanční tok

Je definován intenzitou plateb $\rho(t); t \in (0, T)$.

Souhrnné množství plateb v časovém intervalu $[t_1, t_2], 0 < t_1 < t_2 < T$ je $\int_{t_1}^{t_2} \rho(t)\ dt$.

Současná hodnota (v čase 0):

$$PV = \int_0^T \rho(t) * v(t)\ dt \tag{2.3}$$

Budoucí hodnota (v čase $T$):

$$FV = \int_0^T \rho(t) * A(t,T)\ dt \tag{2.4}$$

## 2.3 Durace, konvexita

Nechť $CF = (CF_{t_1}, CF_{t_2}, ..., CF_{t_n})$.

***Durace*** $D(CF, v)$ (duration) označuje střední (průměrnou) dobu splatnosti. Je to vážený průměr dob splatnosti jednotlivých plateb, vzorcem vyjádřeno:

- pro diskrétní finanční tok:

$$D(CF, v) = \frac{\sum_{j=1}^n t_j * CF_{t_j} * v^{t_j}}{\sum_{j=1}^n CF_{t_j} * v^{t_j}} = \frac{\sum_{j=1}^n t_j * CF_{t_j} * v^{t_j}}{PV(CF, v)} \tag{2.5}$$

  Váhy: $w_j = \frac{CF_{t_j} * v^{t_j}}{PV(CF,v)}$

- pro spojitý finanční tok:

$$D(CF, v) = \frac{\int_0^T t * \rho(t) * v^t\ dt}{\int_0^T \rho(t) * v^t\ dt} \tag{2.6}$$

Duraci interpretujeme v časových jednotkách.
Této duraci se říká ***Macaulayho durace***.
Nyní odvodíme další interpretaci durace. Budeme pracovat s diskrétním finančním tokem. Derivováním dostáváme

$$\frac{\partial PV(CF, v)}{\partial v} = \sum_{j=1}^n t_j * v^{t_j - 1} * CF_{t_j} = \frac{1}{v} * \sum_{j=1}^n t_j * v^{t_j} * CF_{t_j} = \frac{1}{v} * D(CF, v) * PV(CF, v) \tag{2.7}$$

Z rovnice (2.7) vychází

$$D(CF, v) = \frac{\partial PV(CF, v)/\partial v}{PV(CF, v)/v} \tag{2.8}$$

Duraci lze tedy považovat za míru elasticity současné hodnoty vzhledem k diskontnímu faktoru, obecněji vzhledem ke změnám v úrokových sazbách.

Podobným způsobem (pokud spočítáme $\frac{\partial PV(CF,i)}{\partial i}$) dojdeme ke vztahu:

$$D(CF,i) = -\frac{\partial PV(CF,i)/\partial i}{PV(CF,i)/(1+i)} \tag{2.9}$$

Nechť $\Delta i > 0$, pak relativní přírůstek současné hodnoty vyjádříme (za pomoci Taylorova rozvoje):

$$\frac{PV(CF,i+\Delta i) - PV(CF,i)}{PV(CF,i)} \doteq \frac{PV'(CF,i)}{PV(CF,i)} * \Delta i + \frac{1}{2} * \frac{PV''(CF,i)}{PV(CF,i)} * (\Delta i)^2 \tag{2.10}$$

$$\frac{PV(CF,i+\Delta i) - PV(CF,i)}{PV(CF,i)} \doteq -\frac{1}{1+i} * D(CF,i) * \Delta i \tag{2.11}$$

Odvodíme ještě tvar durace v závislosti na intenzitě úroku $\delta = \log(1+i)$. Zderivováním $PV(CF,\delta) = \sum_{j=1}^{n} CF_{t_j} * e^{-\delta * t_j}$ docházíme ke vztahu

$$\frac{\partial PV(CF,\delta)}{\partial \delta} = \sum_{j=1}^{n} CF_{t_j} * e^{-\delta * t_j} * (-t_j),$$

duraci lze tedy vyjádřit:

$$D(CF,\delta) = -\frac{\partial PV(CF,\delta)/\partial \delta}{PV(CF,\delta)} = -\frac{\partial \log PV(CF,\delta)}{\partial \delta}$$

**Poznámka:** durace není lineární funkcí $CF$.

Existují další typy durace:

- ***dolarová durace*** (dollar duration):

$$D_{\$}(CF,v) = \sum_{j=1}^{n} t_j * CF_{t_j} * v^{t_j}$$

  Oproti Macaulayho duraci je lineární funkcí $CF$.

- ***modifikovaná durace*** (modified duration):

$$D_{mod}(CF,v) = v * D(CF,v) = \frac{D(CF,i)}{1+i} \tag{2.12}$$

  S použitím rovnice (2.9) dostáváme:

$$D_{mod}(CF,i) = -\frac{1}{PV(CF,i)} * \frac{\partial PV(CF,i)}{\partial i}$$

***Věta 2.1***
Pro finanční tok s platbami $CF_{t_j} \geq 0$ v časech $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ má durace následující vlastnosti:

1) $0 \leq D \leq t_n$
2) $D = t_n \Leftrightarrow CF_{t_j} = 0, j = 1, ..., n-1 \wedge CF_{t_n} \neq 0$
3) $D(CF, \delta)$ je klesající funkcí intenzity úroku $\delta$

Důkaz lze najít v knize [5].

**Konvexita** $C(CF, v)$
Pro konvexitu existuje také více interpretací. ***Konvexita*** (convexity) měří zakřivení křivky vztahu mezi současnou hodnotou a úrokovou mírou. Umožní nám tak zpřesnit citlivost změny současné hodnoty na změnu úrokové míry. Jelikož se konvexita počítá především u obligací, příklady si uvedeme v kapitole Dluhopisy. Podívejme se však zde na matematické vzorce:

$$C(CF, v) = \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j * (t_j + 1) * CF_{t_j} * v^{t_j}}{PV(CF, v)} \tag{2.13}$$

Jednotkou konvexity je druhá mocnina časové jednotky.

Vzhledem k tomu, že platí

$$PV''(CF, i) = \frac{1}{(1+i)^2} * C(CF, i) * PV(CF, i),$$

vyjádříme poslední sčítanec v rozvoji (2.10) ve tvaru

$$\frac{1}{2} * \frac{PV''(CF, i)}{PV(CF, i)} * (\Delta i)^2 = \frac{1}{2} * \frac{1}{(1+i)^2} * C(CF, i) * (\Delta i)^2.$$

Podobně jako existuje modifikovaná durace, zavedeme pojem ***modifikovaná konvexita*** (modified convexity).

$$C_{mod}(CF, i) = \frac{PV''(CF, i)}{PV(CF, i)} = \frac{C(CF, i)}{(1+i)^2} \tag{2.14}$$

Celkově tedy dostáváme jiný tvar rovnice (2.10):

$$\frac{PV(CF, i + \Delta i) - PV(CF, i)}{PV(CF, i)} = -D_{mod}(CF, i) * \Delta i + \frac{1}{2} * C_{mod}(CF, i) * (\Delta i)^2 \tag{2.15}$$

## 2.4 Důchod

Důchod, také někdy označován jako ***anuita*** (annuity), je diskrétní finanční tok. Všechny platby jsou stejné výše, stejného znaménka a uskutečňují se v pravidelných časových intervalech.
Rozlišujeme 2 typy:

a) *polhůtný* (annuity-immediate): platby důchodu na konci časových intervalů

b) *předlhůtný* (annuity-due): platby důchodu na začátku časových intervalů

**1) Polhůtný důchod s ročními platbami**

Platby $R$ po dobu $n$ let, roční úroková míra[1] $i$.
*Současná hodnota:*

$$PV = R * \sum_{t=1}^{n} v^t = R * v * \frac{1 - v^n}{1 - v} = R * \frac{1 - v^n}{i} \overset{ozn.}{=} R * a_{\overline{n}|} \tag{2.16}$$

*Budoucí hodnota* (v čase $n$):

$$FV = R * \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i)^t = R * \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \overset{ozn.}{=} R * s_{\overline{n}|} \tag{2.17}$$

**2) Předlhůtný důchod s ročními platbami**

Platby $R$ po dobu $n$ let, roční úroková míra $i$.

Připomeňme, že $d = 1 - v = \frac{i}{1+i}$ (viz (1.15)).
*Současná hodnota:*

$$PV = R * \sum_{t=0}^{n-1} v^t = R * \frac{1 - v^n}{1 - v} = R * \frac{1 - v^n}{d} \overset{ozn.}{=} R * \ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{2.18}$$

*Budoucí hodnota* (v čase $n$):

$$\begin{aligned} FV &= R * \sum_{t=1}^{n} (1 + i)^t = R * (1 + i) * \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \\ &= R * \frac{(1 + i)^n - 1}{d} \overset{ozn.}{=} R * \ddot{s}_{\overline{n}|} \end{aligned} \tag{2.19}$$

[1] v literatuře se často symbolem $i$ označuje nominální úroková míra pro jedno úrokovací období (pro roční úročení se rovná efektivní úrokové míře)

**3) Důchod s platbami a úročením $\boldsymbol{p}$-krát do roka**

Platby $R$ $p$-krát ročně po dobu $n$ let, roční efektivní úroková míra $i_{ef}$. Roční nominální úroková míra $i_{(p)}$.
Platí

$$1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{i_{(p)}}{p}\right)^p,$$

viz (1.13), $v = \frac{1}{1+i_{ef}}$.
*Současná hodnota* (polhůtný důchod):

$$PV = R * \sum_{t=1}^{n*p} v^{\frac{t}{p}} = R * v^{\frac{1}{p}} * \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{p}}} = R * \frac{1 - v^n}{\frac{i_{(p)}}{p}}$$

$$= R * \sum_{t=1}^{n*p} \left(\frac{1}{1 + \frac{i_{(p)}}{p}}\right)^t = R * \frac{1 - v_{(i)}^{p*n}}{\frac{i_{(p)}}{p}} = R * a_{\overline{p*n}|} \qquad (2.20)$$

kde $v_{(i)} = \frac{1}{1+\frac{i_{(p)}}{p}}$.

*Budoucí hodnota* bude odvozena v příkladu 2.4 (viz rovnice (2.31))

**4) Důchod s víceletou periodou plateb**

Platby $R$ 1-krát za $k$ let po dobu $n$ let, roční úroková míra $i$. Předpokládejme $\frac{n}{k}$ celé.
*Současná hodnota* (polhůtný důchod):

$$PV = R * \sum_{t=1}^{\frac{n}{k}} v^{t*k} = R * v^k * \frac{1 - v^n}{1 - v^k} = R * \frac{1 - v^n}{(1+i)^k - 1}$$

$$= R * \frac{1 - v^n}{i} * \frac{i}{(1+i)^k - 1} = R * \frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}} \qquad (2.21)$$

**5) Důchod s necelým počtem platebních období**

Platby $R$ $p$-krát ročně po dobu $n^*$ let, $n^*$ je necelé.
Nechť $n^* = k * \frac{1}{p} + z,\ 0 < z < \frac{1}{p}$

Zde se nabízejí 2 možnosti výpočtu :

i) Definujeme *současnou hodnotu* předpisem

$$PV = R * \frac{1 - v^{n^*}}{\frac{i_{(p)}}{p}} \qquad (2.22)$$

Jedná se o analogii vzorce (2.20).

ii) V čase $n^*$ budeme vyplácet $R * p * z,\ p * z \in (0, 1)$ :

*Současná hodnota*:

$$PV = R * \sum_{t=1}^{\lfloor n^* * p \rfloor = k} v^{\frac{t}{p}} + R * p * z * v^{n^*} \tag{2.23}$$

V následujících 2 případech se bude jednat o roční polhůtný důchod s platbami $R$ po dobu $n$ let.

**6) Odložený důchod**

Realizace plateb je odložena o $m$ let.

*Současná hodnota*:

$$PV = R * \sum_{t=m+1}^{m+n} v^t = R * v^m * \frac{1 - v^n}{i} = R * v^m * a_{\overline{n}|} \tag{2.24}$$

*Budoucí hodnota*[2] (v čase $m + n$):

$$FV = R * \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i)^t = R * \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = R * s_{\overline{n}|} \tag{2.25}$$

**7) Přerušený důchod**

Po ukončení plateb se ještě úročí po dobu $m$ let.

*Současná hodnota*[3]:

$$PV = R * \sum_{t=1}^{n} v^t = R * \frac{1 - v^n}{i} = R * a_{\overline{n}|} \tag{2.26}$$

*Budoucí hodnota* (v čase $m + n$):

$$FV = R * \sum_{t=m}^{m+n-1} (1+i)^t = R * (1+i)^m * \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = R * (1+i)^m * s_{\overline{n}|} \tag{2.27}$$

**8) Věčný důchod = perpetuita**

Posloupnost polhůtných ročních plateb $R$ není ukončena.

*Současná hodnota*:

$$PV = R * \sum_{t=1}^{\infty} v^t = R * \frac{v}{1 - v} = \frac{R}{i} \qquad \left(v = \frac{1}{1 + i}\right) \tag{2.28}$$

[2] stejná jako u neodloženého důchodu

[3] stejná jako u nepřerušeného důchodu

Pro platbu $R$ platí:

$$R = PV * i \tag{2.29}$$

*Budoucí hodnota*: není definována

Na závěr uveďme zobecněný případ důchodu.

**9) „Důchod" s proměnnou platbou, dobou plateb a úrokovou mírou**:

Platby $R_1, .., R_n$ v časech $0 < t_1 < .. < t_n$. Úroková míra pro období $(t_{j-1}, t_j]$ je $i_j$. Definujme $t_0 = 0$.

*Současná hodnota*:

$$PV = \sum_{k=1}^{n} R_k \prod_{j=1}^{k} \left( \frac{1}{1 + i_j} \right)^{t_j - t_{j-1}} \tag{2.30}$$

## 2.5 Příklady

Příklady věnující se duraci a konvexitě jsou uvedeny v kapitole Dluhopisy (resp. v kapitole 4.3. Příklady). Zde se zaměříme na důchody.

**Příklad 2.1**

Paní Hořejší si plánuje vzít úvěr na 2 roky v hodnotě 150 000 Kč. Splátky žádá pololetní. Banka jí poskytne roční nominální úrokovou míru 6,9 %. Paní Hořejší má nyní na účtu 145 000 Kč. Tato částka se jí úročí složeně měsíčně s roční nominální úrokovou mírou 2,5 %. Každý půlrok si navíc uloží na účet 3 300 Kč, které ušetří ze mzdy. Bude mít na účtu vždy dostatek peněz na splácení úvěru?

**Řešení:**

Nejprve určíme výši splátek úvěru. Vyjdeme ze vztahu (2.20):

$$PV = R * \sum_{t=1}^{n*p} \left( \frac{1}{1 + \frac{i_{(p)}}{p}} \right)^t = \frac{1 - \left( \frac{1}{1+\frac{i_{(p)}}{p}} \right)^{n*p}}{\frac{i_{(p)}}{p}}$$

a odtud vyjádříme $R$

$$R = \frac{\frac{PV*i_{(p)}}{p}}{1 - \left( \frac{1}{1+\frac{i_{(p)}}{p}} \right)^{n*p}} = \frac{\frac{150\,000*0{,}069}{2}}{1 - \left( \frac{1}{1+\frac{0{,}069}{2}} \right)^{2*2}} \doteq 40\,789 \text{ Kč}$$

Popřípadě využijeme Excelu a jeho funkce PLATBA:

Sazba: $0,069/2$ (neboť splátky jsou pololetní)

Pper: $2 * 2$

Souč_hod: -150000

$$=\text{PLATBA}(0,069/2; 4; -150000)$$

Již tedy známe výši splátek úvěru. Otázkou zůstává, kolik bude mít paní Hořejší na účtu v okamžicích platby. Zůstatek na účtu se bude vždy úročit měsíčně půl roku a po půl roce na účet vloží ještě 3 300 Kč. Můžeme tedy počítat s půlročními splátkami ve výši $40\ 789 - 3\ 300 = 37\ 489$ Kč, neboť uložené peníze ihned připadnou na splácení úvěru.
V době první splátky bude stav konta

$$FV = 145\ 000 * \left(1 + \frac{0,025}{12}\right)^{12*0,5} \doteq 146\ 822 \text{ Kč}.$$

Po první splátce bude mít tedy na kontě

$$146\ 822 - 37\ 489 = 109\ 333 \text{ Kč}.$$

Do druhé splátky se tato částka zúročí na hodnotu

$$FV = 109\ 333 * \left(1 + \frac{0,025}{12}\right)^{12*0,5} \doteq 110\ 707 \text{ Kč},$$

po odečtení splátky na účtu zbývá

$$110\ 707 - 37\ 489 = 73\ 218 \text{ Kč}.$$

Na konci třetího pololetí bude na kontě

$$FV = 73\ 218 * \left(1 + \frac{0,025}{12}\right)^{12*0,5} \doteq 74\ 138 \text{ Kč}.$$

Po zaplacení splátky zbude $74\ 138 - 37\ 489 = 36\ 649$ Kč. Ty se zúročí analogicky jako v předchozích obdobích na 37 110 Kč. Na poslední splátku však potřebuje 37 489 Kč. Paní Hořejší tak nebude mít dostatek peněz na poslední splátku.
Naše výpočty by se daly zahrnout i do jednoho vzorce jednoduchou úvahou. Pokud si vše nejdříve rozepíšeme, tak před 3. splátku máme na účtu:

$$\left[\left(145000 * \left(1 + \frac{0,025}{12}\right)^{6} - 37489\right) * \left(1 + \frac{0,025}{12}\right)^{6} - 37489\right] * \left(1 + \frac{0,025}{12}\right)^{6}$$

Nyní již odvodíme vzorec pro zůstatek na účtu před poslední splátkou:

$$145\ 000 * \left[\left(1+\frac{0,025}{12}\right)^6\right]^4 - 37\ 489 * \sum_{t=1}^{3}\left[\left(1+\frac{0,025}{12}\right)^6\right]^t$$

$$\doteq 145\ 000 * 1,051 - 37\ 489 * 3,076 \doteq 37\ 079 \text{ Kč}.$$

Kvůli zaokrouhlování se nám výsledky mírně liší, nic to však nemění na tom, že paní Hořejší na poslední splátku nebude mít.

V Mathematice bychom mohli tento způsob počítání zahrnout do vzorce

$$NestList\left[\#\left(1+\frac{0.025}{12}\right)^6 - 37489\&, 145000, 4\right]$$

Výstup: $\{145000, 109333., 73217.8, 36648.8, -379.729\}$
Výstupem je list obsahující počáteční vklad (145 000 Kč) a dále postupné konečné stavy po odečtení jednotlivých splátek. Poslední hodnota je záporná, odpovídá částce peněz, která klientce chybí na zaplacení poslední splátky.

**Poznámka:**
Povšimněme si, že vlastní prostředky klientky byly o pouhých 5 000 Kč nižší než přidělený úvěr. Přestože ještě každý půlrok uložila 3 300 Kč, na úvěr by neměla.

$\diamondsuit$

**Příklad 2.2**

Píše se rok 2005. Pan Daněk se narodil roku 1983 a jeho dcera přišla na svět v roce 2004. Pan Daněk uvažuje o hypotéce, chtěl by ji však splatit dříve, než bude dvakrát starší než jeho dcera. Podle jeho výpočtů ušetří z výplaty 15 000 Kč měsíčně, kterými by splácel úvěr (resp. 45 000 Kč čtvrtletně). Banka nabízí 2 typy úvěrů: při měsíčním splácení se jedná o úvěr s roční nominální úrokovou mírou 6,5 %, při čtvrtletním splácení s roční nominální úrokovou mírou 6,6 %. Ke koupi bytu nyní potřebuje 2 mil. Kč. Poskytne mu banka dostatek peněz alespoň při jednom typu úvěru?

**Řešení:**

Nejprve si ujasníme, dokdy vlastně chce pan Daněk hypotéku splatit. Panu Daňkovi je nyní 22 let, jeho dceři je 1 rok. Dvakrát starší než ona bude ve 42 letech (dceři bude 21 let), tedy hypotéku by chtěl splatit do 20 let.

$n = 20$ let
$R_{(12)} = 15\ 000$ Kč (měsíční splátky)
$R_{(4)} = 45\ 000$ Kč (čtvrtletní splátky)
$i_{(12)} = 6,5\%$
$i_{(4)} = 6,6\%$
Spočítáme si nejprve diskontní faktory:

$$v_{12} = \frac{1}{(1 + \frac{i_{(12)}}{12})^{12}} = \frac{1}{(1 + \frac{0,065}{12})^{12}} \doteq 0,9372$$

$$v_4 = \frac{1}{(1 + \frac{i_{(4)}}{4})^{4}} = \frac{1}{(1 + \frac{0,066}{4})^{4}} \doteq 0,9366$$

Dle rovnice (2.20) spočítáme současné hodnoty:

$$PV_{(12)} = R_{(12)} * \frac{1 - v_{12}^n}{\frac{i_{(12)}}{12}} = 15\ 000 * \frac{1 - (0,9372)^{20}}{\frac{0,065}{12}} \doteq 2\ 012\ 390 \text{ Kč}$$

$$PV_{(4)} = R_{(4)} * \frac{1 - v_{4}^n}{\frac{i_{(4)}}{4}} = 45\ 000 * \frac{1 - (0,9366)^{20}}{\frac{0,066}{4}} \doteq 1\ 991\ 385 \text{ Kč}$$

Využít bychom mohli i Excel, který nám vše spočítá přesněji:
Pro měsíční úročení:
Sazba: 0,065/12
Pper: 20*12
Splátka: -15000

$$\text{=SOUČHODNOTA}(0,065/12; 20 * 12; -15000) \doteq 2\ 011\ 875 \text{ Kč}$$

Pro čtvrtletní úročení:
Sazba: 0,066/4
Pper: 20*4
Splátka: -45000

$$\text{=SOUČHODNOTA}(0,066/4; 20 * 4; -45000) \doteq 1\ 990\ 832 \text{ Kč}$$

Vidíme tedy, že panu Daňkovi banka půjčí při měsíčních splátkách více než 2 mil. Kč.

$\diamondsuit$

**Příklad 2.3**

Pan Švec koupil dům v hodnotě 3 600 000 Kč a vzal si na něj hypotéku v hodnotě 2,5 mil. Kč. Měsíčně splácí (polhůtně) 16 000 Kč po dobu 25 let. Jakou roční nominální úrokovou míru poskytla banka panu Švecovi?

**Řešení:**

Ze zadání víme:

$PV = 2\,500\,000$ Kč
$n = 25$ let
$R = 16\,000$ Kč
$p = 12$
$i_{(p)} = ?$

K vyřešení této úlohy použijeme vzorec (2.20):

$$PV = R * \sum_{t=1}^{n*p} \left( \frac{1}{1 + \frac{i_{(p)}}{p}} \right)^t = \frac{1 - \left( \frac{1}{1+\frac{i_{(p)}}{p}} \right)^{n*p}}{\frac{i_{(p)}}{p}}$$

Zde docházíme ke zjištění, že úrokovou míru nelze jednoduše vyjádřit. Avšak s použitím Excelu výsledek najdeme, použijeme-li funkci ÚROKOVÁ.MÍRA (řeší výše uvedenou rovnici iteračně).

Pper: $25 * 12$
Splátka: -16000
Souč_hod: 2500000
$\Rightarrow$

$$=\text{ÚROKOVÁ.MÍRA}(25 * 12; 16000; -2500000) \doteq 0,494127\ \%$$

Tato funkce nám však vrátí úrokovou míru $\frac{i_{(p)}}{p}$ pro příslušné úrokovací období, v našem případě měsíční. Roční nominální úroková míra

$$i_{(p)} = 12 * 0,494127\ \% \doteq 5,93\ \%$$

Můžeme si udělat zkoušku a spočítat si pomocí výsledné nominální úrokové míry současnou hodnotu (podmínky zůstávají nezměněny).

$$PV = 16\,000 * \frac{1 - \left( \frac{1}{1+\frac{0,0593}{12}} \right)^{25*12}}{\frac{0,0593}{12}}$$

I zde se dá využít Excel:

$$=\text{SOUČHODNOTA}(0,0593/12;300;-16000)$$

Při výpočtech v Excelu jsme došli k uspokojivému výsledku, neboť současná hodnota je rovna 2 499 886 Kč.

**Poznámka:**

Neznámou hodnotu nominální úrokové míry $i$ $(=\frac{i_{(p)}}{p})$ lze aproximovat pomocí lineární interpolace. Z rovnice (2.20):

$$a_{\overline{p*n}|i}=\frac{PV}{R}$$

$$a_{\overline{300}|i}=\frac{2\ 500\ 000}{16\ 000}=156,25$$

Spočtěme $a_{\overline{300}|i}$ pro různá $i$. Hypotéky mívají často roční úrokovou sazbu kolem 6 %, měsíční nominální úroková míra $i=\frac{0,06}{12}=0,005=0,5\ \%$. Zkusme tedy spočítat, jak by vypadal $a_{\overline{300}|0,5\%}$:

$$a_{\overline{300}|0,5\%}=\frac{1-\left(\frac{1}{1+0,005}\right)^{300}}{0,005}\doteq 155,21$$

To je nižší hodnota než potřebujeme. Musíme tedy snížit měsíční úrokovou míru, např. na 0,45 %.

$$a_{\overline{300}|0,45\%}=\frac{1-\left(\frac{1}{1+0,0045}\right)^{300}}{0,0045}\doteq 164,44$$

Nyní spočítáme $i$:

$$i=0,0045+\frac{0,005-0,0045}{155,21-164,44}*(156,25-164,44)=0,004943662,$$

hledaná roční nominální úroková míra:

$$i_{(p)}=12*i=12*0,004943662\doteq 0,0593=5,93\%$$

Vidíme, že výsledek se shoduje s řešením z Excelu.

$\diamondsuit$

**Příklad 2.4**

Tonda si každý měsíc ušetří z brigády 1 800 Kč, které si pravidelně ukládá na účet. Jeho peníze se mu úročí čtvrtletně s roční nominální úrokovou mírou 1,8 %. Po 3 letech přestal na brigádu chodit a rozhodl se, že si své peníze vybere.
a) Kolik si Tonda za 3 roky vybral, jestliže se jednalo o polhůtný důchod. Jaký by byl rozdíl, pokud by šlo o důchod předlhůtný?
b) Jak by se počítala budoucí hodnota v případě, že by ukládal 5 400 Kč čtvrtletně a jeho vklad by se úročil měsíčně?

**Řešení:**

Chceme vypočítat budoucí hodnotu důchodu. Musíme si tedy odvodit vzorec pro výpočet budoucí hodnoty při úročení $p$-krát za rok (a vklady $p$-krát ročně) po dobu $n$ let. Začněme polhůtným důchodem. Vyjdeme ze vzorce (2.17).

$$FV = R * \sum_{t=0}^{n*p-1} \left[ \left( 1 + \frac{i_{(p)}}{p} \right)^{p} \right]^{\frac{t}{p}} = R * \frac{\left(1 + \frac{i_{(p)}}{p}\right)^{n*p} - 1}{\frac{i_{(p)}}{p}} = R * s_{\overline{n*p}|} \quad (2.31)$$

a) Abychom mohli počítat budoucí hodnotu vkladů, musíme si sjednotit časová období pro vklady a úročení. Jednalo se o polhůtný důchod. Za čtvrt roku provedl 3 měsíční vklady, které můžeme nahradit jedním vkladem ve výši

$$R = 1\ 800 * \sum_{t=0}^{2} \left( 1 + \frac{0,018}{4} \right)^{\frac{t}{3}} = 5\ 408,09 \text{ Kč}$$

Sjednotili jsme období a můžeme jednoduše spočítat hodnotu celkových vkladů za 3 roky. Zadání jsme převedli na systém 12 splátek (čtvrtletně po dobu 3 let) ve výši 5 408,09 Kč, úročeno čtvrtletně. Čtvrtletní úroková míra je rovna $\frac{0,018}{4} = 0,0045$. Tedy dle (2.31):

$$FV = R * s_{\overline{12}|0,45\%} = 5\ 408,09 * \frac{(1 + 0,0045)^{12} - 1}{0,0045} \doteq 66\ 527,62 \text{ Kč}$$

Do Excelu bychom zadali:

$$= \text{BUDHODNOTA}(0,0045; 12; -5408,09)$$

Druhý způsob, jak spočítat, kolik si Tonda za 3 roky vybere, je přechodem k efektivní úrokové míře. Jak jsme již uvedli v kapitole o úrokování, pro efektivní úrokovou míru $i_{ef}$ $(= i)$ platí vzorec (1.13)

$$1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{i_{(p)}}{p}\right)^p$$

V naší úloze je $i_{(p)} = 0,018$ a $p = 4$. Efektivní úroková míra $i$ je tedy rovna přibližně 1,812 %. Měsíční splátka $R_m = 1\ 800$ Kč.
Vklady jsou polhůtné měsíční po dobu 3 let, tedy 36 vkladů zúročíme pomocí efektivní úrokové sazby. Budoucí hodnota $FV$je rovna

$$FV = R_m * \sum_{t=0}^{3*12-1} (1 + 0,01812)^{\frac{t}{12}}$$

Po dosazení číselných hodnot se budoucí hodnota rovná 66 528 Kč.

Pokud by se jednalo o předlhůtné vklady, příklad by vypadal následovně:

$$R = 1\ 800 * \sum_{t=1}^{3} \left(1 + \frac{0,018}{4}\right)^{\frac{t}{3}} \doteq 5\ 416,19 \text{ Kč}$$

Výše čtvrtletního vkladu by se rovnala 5 416,19 Kč. V tuto chvíli jsou však měsíční vklady zúročeny přes 3 měsíce a náš čtvrtletní vklad se stává vkladem polhůtným (neboť spočítanou hodnotu má na konci čtvrtletí). Budoucí hodnotu 12 polhůtných čtvrtletních vkladů při čtvrtletním úročení spočteme dle (2.31).

$$FV = 5\ 416,19 * s_{\overline{12}|0,45\%} = 5\ 416,19 * \frac{(1 + 0,0045)^{12} - 1}{0,0045} \doteq 66\ 627,27 \text{ Kč}$$

Předlhůtné vklady se dají rovněž spočítat pomocí efektivní úrokové míry. Budoucí hodnota $FV$

$$FV = R_m * \sum_{t=1}^{3*12} (1 + 0,01812)^{\frac{t}{12}} \doteq 66\ 627,12 \text{ Kč}$$

b) Podívejme se na případ, kdy by naopak vklady byly polhůtné čtvrtletní a úročení by bylo měsíční. Jde nám spíše o způsob sjednocení času než o konkrétní výpočet.
Za čtvrt roku uplynou 3 úrokovací období. Proto musíme nahradit jednu čtvrtletní platbu 3 platbami měsíčními. Bereme tedy čtvrtletní vklad 5 400 Kč

jako budoucí hodnotu 3 měsíčních vkladů ve výši $R$, kdy tyto vklady jsou úročeny měsíční úrokovou sazbou $\frac{0{,}018}{12} = 0,0015 = 0,15\ \%$:

$$R = \frac{FV}{s_{\overline{3}|0{,}15\%}} = \frac{5\ 400}{\frac{(1+0{,}0015)^3-1}{0{,}0015}} \doteq 1\ 797,30\ \text{Kč}$$

Zde by se dal také využít Excel:

$$= \text{PLATBA}(0,0015; 3; ; -5400)$$

Chybí nám už jen spočítat budoucí hodnotu měsíčního polhůtného důchodu ve výši 1 797,30 Kč úročeného měsíčně s měsíční úrokovou mírou 0,15 %.

$$FV = R * s_{\overline{3*12}|0{,}15\%} = 1\ 797,30 * \frac{(1+0,0015)^{36}-1}{0,0015} \doteq 66\ 430,48\ \text{Kč}$$

Co se týče Excelu:

$$= \text{BUDHODNOTA}(0,0015; 36; -1797,3)$$

Jednodušší způsob počítání je však opět přes efektivní úrokovou míru. Zde je počet období úročení $p = 12$.

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{0,018}{12}\right)^{12} - 1 \doteq 0,01815$$

Budoucí hodnota polhůtných čtvrtletních vkladů (po 3 letech) je potom

$$FV = 5\ 400 * \sum_{t=0}^{3*4-1} (1+0,01815)^{\frac{t}{4}} \doteq 66\ 430,65\ \text{Kč}$$

$\diamondsuit$

**Příklad 2.5**

Pan Rychlý prodal své auto za 500 000 Kč. Tyto peníze si prozatím uložil na účet s roční úrokovou mírou 2,8 %. Peníze se mu úročí měsíčně. Za 9 měsíců se rozhodl, že si pořídí nové auto. Hned po koupi musel zaplatit tzv. ***akontaci*** ve výši 45 000 Kč, pak již následovaly pravidelné polhůtné měsíční splátky ve výši 9 000 Kč. Na kolik splátek mu vystačí peníze z prodeje starého auta?

**Řešení:**

Tato úloha se dá považovat za odložený důchod. Ze vzorce (2.24) plyne, že v čase $m$ je hodnota $FV$ tohoto důchodu rovna současné hodnotě neodloženého důchodu:

$$PV = R * v^m * a_{\overline{n}|}$$

$$\frac{PV}{v^m} = PV * (1+i)^m = FV = \underbrace{R * a_{\overline{n}|}}_{\textit{současná hodnota neodloženého důchodu}}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{FV}{R}$$

A zároveň

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}$$

Takto by to platilo pro úročení a při splátkách jednou ročně.

Pokud se jedná o úročení $p$-krát ročně a splátky se provádí se stejnou frekvencí (viz rovnice 2.20):

$$a_{\overline{p*n}|} = \frac{FV}{R}$$

a zároveň

$$a_{\overline{p*n}|} = \frac{1-v_{(i)}^{p*n}}{\frac{i_{(p)}}{p}},$$

kde $v_{(i)} = \frac{1}{1+\frac{i_{(p)}}{p}}$.

Podle našeho zadání máme

$PV = 500\ 000$ Kč

$A = 45\ 000$ Kč (akontace; mimořádná splátka v čase $m$)

$i_{(p)} = 0,028$

$p = 12$

$m = 9$ měsíců $= 0{,}75$ let

$R = 9\ 000$ Kč

$n = ?$

Hodnota $FV = PV * \left(1+\frac{i_{(p)}}{p}\right)^{p*m} = 500\ 000 * \left(1+\frac{0{,}028}{12}\right)^9 \doteq 510\ 598,54$ Kč.

V čase $m$ je na účtu $FV - A$, tedy:

$$a_{\overline{p*n}|} = \frac{FV - A}{R}$$

Dle předchozích úvah:

$$1 - v_{(i)}^{p*n} = \frac{i_{(p)}}{p} * \frac{FV - A}{R} \qquad / \log$$

$$\log\left(1 - \frac{i_{(p)}}{p} * \frac{FV - A}{R}\right) = \log v_{(i)}^{p*n}$$

$$n * p = \frac{\log(1 - \frac{i_{(p)}}{p} * \frac{FV-A}{R})}{\log v_{(i)}}$$

Hodnotu $v_{(i)}$ spočítáme podle vzorce

$$v_{(i)} = \frac{1}{1 + \frac{i_{(p)}}{p}} \doteq 0,9977$$

a

$$\log\left(1 - \frac{i_{(p)}}{p} * \frac{FV - A}{R}\right) = \log\left(1 - \frac{0,028}{12} * \frac{465\,598,54}{9\,000}\right) \doteq \log 0,879$$

Potom tedy:

$$n * p \doteq \frac{\log 0,879}{\log 0,9977} \doteq 55,2 \text{ let}$$

Odpověď by tedy byla, že jeho počátečních 500 000 Kč mu vystačí na 55 splátek nového auta.

Využijeme-li funkcí Excelu, je výpočet ještě snadnější. Nejprve zjistíme stav účtu před první pravidelnou splátkou:

$$= \text{BUDHODNOTA}(0,028/12; 9; 0; -500000) - 45\,000 = 465\,598,54 \text{ Kč}$$

Nyní nás zajímá počet splátek:

$$= \text{POČET.OBDOBÍ}(0,028/12; -9000; 465598,54) \doteq 55,2$$

$\diamondsuit$

**Příklad 2.6**

Na účet nám budou chodit po dobu 5 let a 2 měsíců každý čtvrtrok výplaty ve výši 50 000 Kč, které se úročí čtvrtletně s roční úrokovou sazbou 2%. Spočtěte současnou hodnotu tohoto důchodu.

**Řešení:**

Jedná se o příklad na důchod s necelým počtem období, kde:

$p = 4$

$n^* = 5 + \frac{2}{12} = 20 * \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

$\Rightarrow k = 20$ a $z = \frac{1}{6}$

Tedy můžeme počítat dle (2.22):

$$PV = R * \frac{1 - v^{n^*}}{\frac{i_{(p)}}{p}}$$

$$PV = 50\,000 * \frac{1 - \left(\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}02}{4}\right)^4}\right)^{5\frac{1}{6}}}{\frac{0{,}02}{4}} \doteq 979\,414,57 \text{ Kč}$$

Do Excelu zadáme:

Sazba: $\frac{0{,}02}{4}$

Pper: $4 * 5\frac{1}{6} \doteq 20,66666667$

Splátka: -50000

Dohromady:

$$= \text{SOUČHODNOTA}(0,02/4; 20,66666667; -50000) \doteq 979\,414,57 \text{ Kč}$$

Nebo můžeme počítat druhým způsobem, tzn. dle (2.23):

$$PV = R * \sum_{t=1}^{\lfloor n^* * p \rfloor = k} v^{\frac{t}{p}} + R * p * z * v^{n^*}$$

$$PV = 50\,000 * \sum_{t=1}^{20} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}02}{4}\right)^4}\right)^{\frac{t}{4}} + 50\,000 * 4 * \frac{1}{6} * \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}02}{4}\right)^4}\right)^{5\frac{1}{6}}$$

$$\doteq 949\,370,96 + 30\,068,62 = 979\,439,58 \text{ Kč}$$

♢

**Příklad 2.7**

Bratři Lukáš a Tomáš zdědili dohromady 1 250 000 Kč, které si rozdělili rovným dílem. Každý však s těmito penězi naložil jinak.

Lukáš uložil 7/8 své částky na účet s měsíčním úročením v bance, která nabízela roční nominální míru 3 %. Zbytek částky si prozatím nechal doma. Po půl roce zjistil, že banka právě zvýšila roční úrokovou míru na 3,2 %, a tak polovinu z částky, co měl doma, přidal na účet. Uplynuly 2 měsíce a Lukáš se rozhodl doplnit na účet zbytek peněz. Banka ve stejnou chvíli v důsledku krize snížila roční úrokovou míru na 2,7 %, která trvá dodnes.

Tomáš postupoval jinak. Pro uložení svých peněz si vybral jinou banku. Ta sice nabízela úročení jen čtvrtletní, avšak s roční úrokovou mírou 3,1 %. Jelikož plánoval rekonstruovat byt, uložil jen 1/4 peněz. Po 9 měsících úroková míra na jeho účtu náhle klesla na pouhých 2,7 %, proto všechny své úspory vybral a uložil je na nový účet společně s penězi, které si schovával na rekonstrukci bytu. Nová banka nabízela úročení měsíční s roční úrokovou míru 2,9 % (tato sazba stále trvá), navíc se mu na účet na konci každého čtvrtroku připsala prémie 300 Kč.

Od doby, kdy Tomáš s Lukášem dědili, uplynuly 2 roky. Který z nich je majitelem většího obnosu peněz?

**Řešení:**

Je třeba určit budoucí hodnoty zobecněných důchodů.
Celková budoucí hodnota (pokud ponecháme označení stejné jako v rovnici (2.30) a $R_0$ je platba v čase $t_0 = 0$):

$$FV = \sum_{k=0}^{n-1} R_k \prod_{j=k+1}^{n} (1 + i_j)^{t_j - t_{j-1}} + R_n \tag{2.32}$$

Lukáš i Tomáš dostali polovinu dědictví, tedy každý 625 000 Kč.

Začneme Lukášem. Ukážeme si nejdříve postupný vývoj na účtu, pak vše zapíšeme do vzorce. Lukáš uložil $625\ 000 * \frac{7}{8} = 546\ 875$ Kč. Ty se mu úročily měsíčně půl roku s roční nominální úrokovou míru 3 %. Po půl roce má tedy na kontě:

$$FV_1 = 546\ 875 * \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^6 \doteq 555\ 129,57 \text{ Kč}$$

V tuto dobu doplní na účet $\frac{1}{2} * (625\ 000 - 546\ 875) = 39\ 062,5$ Kč, úroková míra se změní na 3,2 % a tato částka se mu úročí 2 měsíce.

$$FV_2 = (555\ 129,57 + 39\ 062,5) * \left(1 + \frac{0,032}{12}\right)^2 \doteq 597\ 365,32 \text{ Kč}$$

Celková částka, která se úročila dodnes, to jest po dobu 16 měsíců, s roční úrokovou mírou 2,7 %, byla $597\,365,32 + 39\,062,5 = 636\,427,82$ Kč.

$$FV = 636\,427,82 * \left(1 + \frac{0,027}{12}\right)^{16} \doteq 659\,729,94 \text{ Kč}.$$

Teď použijeme vzorec (2.32):

$$FV = 546\,875 * \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{6} * \left(1 + \frac{0,032}{12}\right)^{2} * \left(1 + \frac{0,027}{12}\right)^{16} +$$
$$+ 39\,062,5 * \left(1 + \frac{0,032}{12}\right)^{2} * \left(1 + \frac{0,027}{12}\right)^{16} + 39\,062,5 * \left(1 + \frac{0,027}{12}\right)^{16}$$
$$\doteq 659\,729,94 \text{ Kč}.$$

Přejděme k Tomášovi. Ten si nejdřív uložil jen 156 250 Kč a až po 9 měsících i zbylých 468 750 Kč. Nesmíme zapomenout na jeho bonusy v hodnotě 300 Kč, které obdrží každý čtvrtrok. Od posledního vkladu uplynulo do současnosti 15 měsíců, což znamená že započítáme 5 bonusů, které se úročí měsíčně. Bez bonusů vypadá budoucí hodnota následovně:

$$FV_a = 156\,250 * \left(1 + \frac{0,031}{4}\right)^{3} * \left(1 + \frac{0,029}{12}\right)^{15} + 468\,750 * \left(1 + \frac{0,029}{12}\right)^{15}$$
$$FV_a \doteq 651\,839,58 \text{ Kč}.$$

Bonusy však musíme „přepočítat“ na měsíční vklady.

$$R = \frac{300}{\sum_{t=0}^{2} \left(1 + \frac{0,029}{12}\right)^{t}}$$
$$R = 99,76 \text{ Kč}$$

Nyní můžeme spočítat budoucí hodnotu bonusů:

$$FV_b = \sum_{t=0}^{14} 99,76 * \left(1 + \frac{0,029}{12}\right)^{t} \doteq 1\,521,98 \text{ Kč}.$$

Tomáš má celkem na svém kontě:

$$FV = FV_a + FV_b = 651\,839,58 + 1\,521,98 = 653\,361,56 \text{ Kč}.$$

Lukáš tedy zúročil své peníze lépe.

V Excelu můžeme využívat (ať už při výpočtu budoucí hodnoty Lukáše nebo Tomáše) pro každý vklad opakovaně funkci BUDHODNOTA, výpočet by probíhal pomocí postupného připisování úroků a dalších vkladů, jak bylo popsáno na začátku řešení této úlohy.
Pro přepočítání čtvrtletního bonusu můžeme využít funkce PLATBA:

$$= \text{PLATBA}(0,029/12; 3; ; -300)$$

a k výpočtu budoucí hodnoty těchto bonusů:

$$= \text{BUDHODNOTA}(0,029/12; 15; -99,76)$$

$\diamondsuit$

# Kapitola 3

# Výnosové rovnice, vnitřní míry výnosnosti a hodnocení investičních projektů

## 3.1 Vnitřní míra výnosnosti

Mějme investiční projekt představovaný očekávanou posloupností plateb $CF_{t_1}, .., CF_{t_n}$ v časech $0 \leq t_1 < .. < t_n$, resp. intenzitou plateb $\rho(t)$, t$\in (0, T)$. Uvažujme konstantní úrokové sazby po celou dobu trvání projektu.
*Současná hodnota - čistá* (net present value):

Diskrétní finanční tok:

$$NPV(i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_{t_j}}{(1+i)^{t_j}} \tag{3.1}$$

Spojitý finanční tok:

$$NPV(i) = \int_0^T \frac{\rho(t)}{(1+i)^t}\, dt \tag{3.2}$$

***Vnitřní míra výnosnosti*** (internal rate of return, $IRR$), někdy se také můžeme setkat s pojmem ***vnitřní výnosové procento***, je řešením výnosové rovnice:

$$NPV(i) = 0 \tag{3.3}$$

Jinak řečeno vnitřní míra výnosnosti je taková úroková míra, při které se současná hodnota příjmů rovná současné hodnotě výdajů.

V případě diskrétního finančního toku (a za podmínky $CF_{t_n} \neq 0$ ) má rovnice (3.3) $n$ kořenů, ekonomický význam mají však pouze některé kladné.

***Věta 3.1***
Pro finanční tok, v němž všechny výdaje předcházejí příjmům nebo všechny příjmy předcházejí výdajům, existuje právě 1 kořen $IRR > -1$.
Důkaz lze najít v knize [5].

***Věta 3.2***
Uvažujme posloupnost plateb $CF_{t_1}, .., CF_{t_n}$ v časech $0 \leq t_1 < .. < t_n$. Označme $S_k = \sum_{j=1}^{k} CF_{t_j}$ a nechť $S_1 \neq 0, S_n \neq 0$ a nechť posloupnost $S_1, .., S_n$ obsahuje po vynechání případných nul právě jednu změnu ve znaménku. Pak existuje právě 1 kořen $IRR > 0$ výnosové rovnice.
Důkaz lze najít v knize [3].

**Poznámky:**

1. Rozlišujeme 2 typy investic:

   a) investice z vlastního kapitálu : typ I - - - + + +

      - nejdříve výdaje, pak příjmy

   b) investice z půjčky: typ II + + + - - -

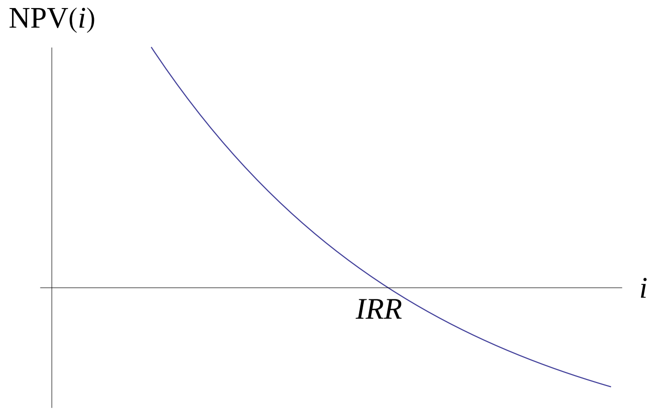
      - nejdříve příjmy, pak výdaje

2. Pro investici typu I je velmi časté, že $NPV(i)$ je klesající funkcí proměnné $i$. Naopak je tomu u investic typu II; $NPV(i)$ je většinou rostoucí funkcí $i$. Není to však pravidlo. Více viz kniha [3].

## 3.2 Hodnocení investičních projektů

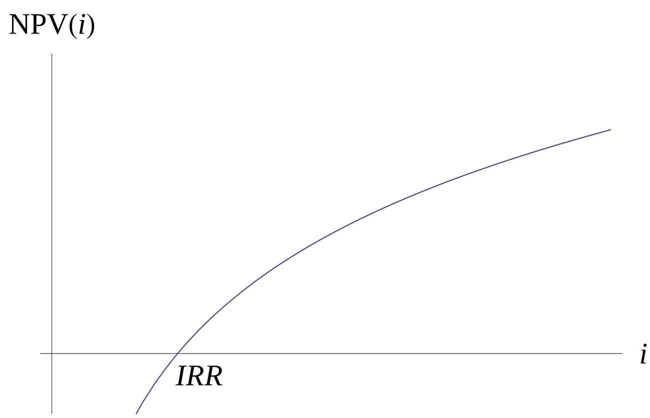
Investiční projekt pokládáme za výhodný při úrokové míře $i_*$, pokud $NPV(i_*) > 0$. Za hodnotící úrokovou míru $i_*$ se bere běžná míra zhodnocení kapitálu.

- $NPV(i) > 0$ pro $i < IRR$, je-li $NPV(i)$ klesající, tzn. většina investic typu I




Obrázek 3.1: Klesající $NPV(i)$

- $NPV(i) > 0$ pro $i > IRR$, je-li $NPV(i)$ rostoucí, tzn. většina investic typu II




Obrázek 3.2: Rostoucí $NPV(i)$

SHRNUTÍ:
Projekt považujeme za výhodný při úrokové míře $i_*$, když:
1) $NPV(i_*) > 0$
2) $i_* < IRR$ při $NPV(i)$ klesající
$i_* > IRR$ při $NPV(i)$ rostoucí

## Porovnávání investičních projektů

Postupy srovnání jsou založeny na očekávaných finančních tocích v následujících letech.
$CF = \{CF_0, CF_1, ..., CF_T\}$, $CF_0$ je jisté, $CF_1, .., CF_T$ jsou nejisté.
Mějme množinu investičních projektů. Říkáme, že projekty:

1) se vzájemně vylučují $\Rightarrow$ lze vybrat nejvýše 1 projekt
2) jsou nezávislé $\Rightarrow$ lze vybrat libovolný počet projektů

Poznámka: Nemusíme si vybrat žádný projekt.

Investiční projekty lze porovnávat podle různých metod. Uvedeme si některé z nich pro projekty typu I. Podrobnosti a některé další metody lze najít v knize [3].
**Index ziskovosti** (profitability index, $PI$)

$$PI(CF, i) = -\frac{1}{CF_0} * PV(\{CF_1, ..., CF_T\}, i), \tag{3.4}$$

kde $PV(\{CF_1, ..., CF_T\}, i)$ je současná hodnota očekávaných finančních toků.

- kritérium rozhodování: z projektů, mezi kterými se rozhodujeme, přijímáme ty s nejvyššími indexy ziskovosti, které jsou větší než 1. Pokud jsou všechny indexy ziskovosti menší než 1, nepřijímáme žádný projekt.

**Metoda návratnosti** (payback method, $PB$)

$$A_j = \sum_{t=0}^{j} CF_t \tag{3.5}$$

Předpokládejme pro typ I $A_0 < 0$. Nechť $k$ je první index takový, že $A_k > 0$.

*Perioda návratnosti*:

$$PB(CF) = k - 1 - \frac{A_{k-1}}{CF_k}, \tag{3.6}$$

$k - 1$ je perioda právě předcházející úplné návratnosti.

- pokud $A_k < 0 \ \forall k \ \Rightarrow \ PB(CF) = \infty$
- kritérium rozhodování: vybíráme projekty s nejkratší periodou návratnosti (tzn. s nejmenší $PB$). Pokud jsou pro všechny projekty periody návratnosti $PB(CF) = \infty$, nepřijímáme žádný projekt.

**Diskontovaná metoda návratnosti** (discounted payback method)

$$A_j^{(i)} = \sum_{t=0}^{j} \frac{CF_t}{(1+i)^t} \tag{3.7}$$

Předpokládejme pro typ I $A_0^{(i)} < 0$. Nechť $k$ je první index takový, že $A_k^{(i)} > 0$.

*Diskontovaná perioda návratnosti*:

$$PB(CF, i) = k - 1 - \frac{A_{k-1}^{(i)}}{\frac{CF_k}{(1+i)^k}} \tag{3.8}$$

- pokud $A_k < 0 \ \ \forall k \ \Rightarrow \ PB(CF, i) = \infty$
- kritérium rozhodování: stejné jako u metody návratnosti

**Metody založené na profilu současné hodnoty**
Tento přístup se nejčastěji používá pro projekty typu I. Jak jsme uvedli v poznámce, jejich $NPV(i)$ je zpravidla klesající funkcí $i$.
Abychom zdůraznili závislost současné hodnoty na finančních tocích, budeme používat označení $NPV(i) = PV(CF, i)$.
Základní kritérium rozhodnutí jsme již zmínili: $PV(CF, i) > 0$.
Pokud jsou projekty:

- nezávislé $\rightarrow$ přijmeme všechny projekty s $PV(CF, i) > 0$
- vzájemně se vylučující $\rightarrow$ přijmeme ten, který má nejvyšší $PV(CF, i) > 0$, bereme tzv. „horní obálku“.

Při rozhodování mezi více vzájemně se vylučujícími projekty nejsou důležité jen jejich individuální vnitřní míry výnosnosti, ale také jejich míry, ve kterých se protínají (*crossover rates*). Protínající se míra pro dva projekty je taková míra, pro kterou platí, že současné hodnoty těchto 2 projektů jsou si rovny. Pro lepší pochopení viz Příklad 3.3.

## 3.3 Jiné typy vnitřní míry výnosnosti

### Modifikovaná vnitřní míra výnosnosti $MIRR$

Mějme: výdaje $-CF_{t_1},..,-CF_{t_l}$ v časech $t_1,..,t_l$
příjmy $CF_{t_{l+1}},..,CF_{t_n}$ v časech $t_{l+1},..,t_n$
$T$ … čas poslední platby
$k$ … úroková míra (běžné zhodnocení kapitálu)
V tomto případě jsou příjmy reinvestovány při úrokové míře $k$.
Požadujeme, aby se výdaje v čase 0 rovnaly příjmům v čase 0, tedy:

$$PV(\textit{výdaje}, k) = -PV(FV(\textit{příjmy}, k), MIRR), \tag{3.9}$$

Výnosová rovnice vypadá následovně:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{l} CF_{t_j} * \left(\frac{1}{1+k}\right)^{t_j}}_{\textit{výdaje v čase 0}} = \underbrace{\left(\frac{1}{1+MIRR}\right)^{T} * \overbrace{\sum_{j=l+1}^{n} CF_{t_j} * (1+k)^{T-t_j}}^{\textit{příjmy v čase T}}}_{\textit{příjmy v čase 0}} \tag{3.10}$$

Kořen $MIRR > -1$ existuje vždy.
Kořenu se říká ***modifikovaná vnitřní míra výnosnosti***.
**Poznámka:** $k = IRR \Rightarrow MIRR = IRR$.

Posouzení výhodnosti investičního projektu pomocí modifikované vnitřní míry výnosnosti (při sazbě $k$ ):
Chceme:

$$NPV(k) = \sum_{j=1}^{l} \frac{-CF_{t_j}}{(1+k)^{t_j}} + \sum_{j=l+1}^{n} \frac{CF_{t_j}}{(1+k)^{T}} * (1+k)^{T-t_j} > 0$$

Máme:

$$NPV^*(k) = \sum_{j=1}^{l} \frac{-CF_{t_j}}{(1+k)^{t_j}} + \sum_{j=l+1}^{n} \frac{CF_{t_j}}{(1+MIRR)^{T}} * (1+k)^{T-t_j} = 0$$

$\Rightarrow$ projekt je výhodný při sazbě $k$, pokud:

$$\frac{1}{(1+k)^T} > \frac{1}{(1+MIRR)^T}$$

$$k < MIRR \tag{3.11}$$

Při obecnějším přístupu lze rozlišit:

$k_o$ … investiční úroková míra (výdaje, outflows)

$k_I$ … reinvestiční úroková míra (příjmy, inflows).

Pak $MIRR$ vyjádříme z rovnice:

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{CF_{t_j}}{(1+k_o)^{t_j}} = \frac{1}{(1+MIRR)^T} * \sum_{j=l+1}^{n} CF_{t_j} * (1+k_I)^{T-t_j} \tag{3.12}$$

**Časově vážená vnitřní míra výnosnosti $i_0^{'}$**

Používá se, pokud se úroková míra mění v čase.

Nechť $i_j$ označuje úrokovou míru, které je platná v časovém intervalu $(t_{j-1}, t_j\rangle$ , kde $j = 1, ..., n;\ t_0 < t_1 < ... < t_n$.

Výnosovou rovnici:

$$(1+i)^{t_n - t_0} = (1+i_1)^{t_1-t_0} * (1+i_2)^{t_2-t_1} * ... * (1+i_n)^{t_n-t_{n-1}} \tag{3.13}$$

řešíme vzhledem k $i$; kořen $i_0^{'} > -1$ existuje vždy.

Speciálně: $t_j = j, j = 0, 1, ..., n$, pak

$$1 + i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}(1+i_j)} \tag{3.14}$$

## 3.4 Vliv inflace na výnosovou rovnici

Označme: $CI(t)$ … index spotřebitelských cen pro období $t$ (více na webových stránkách [7])

Míru inflace $e(t)$ pro časový interval $(t, t+1\rangle$ lze vyjádřit ve tvaru

$$e(t) = \frac{CI(t+1) - CI(t)}{CI(t)}$$

$\Rightarrow$

$$CI(t+1) = CI(t) * [1 + e(t)]$$

Při konstantní roční míře inflace $e$ přechází poslední rovnost na analogii složeného úročení

$$CI(t_2) = CI(t_1) * (1+e)^{t_2-t_1}.$$

Mějme v čase $t$ platbu $CF_t$. Platba zvýšená inflací je pak rovna $CF_t*(1+e)^t$, intenzita plateb navýšená inflací je analogicky $\rho(t) * (1+e)^t$.

*Současná hodnota*

1) diskrétního finančního toku $(CF_{t_1}, ..., CF_{t_n})$:

$$NPV_e(i) = \sum_{j=1}^{n} CF_{t_j} * \left(\frac{1+e}{1+i}\right)^{t_j} = \sum_{j=1}^{n} CF_{t_j} * \left(\frac{1}{1+r_{real}}\right)^{t_j} \tag{3.15}$$

Zřejmě:

$$r_{real} = \frac{i-e}{1+e}, \tag{3.16}$$

kde $r_{real}$ je reálná úroková míra[1]. Pokud $e \approx 0$, pak $r_{real} \doteq i - e$.

2) spojitého finančního toku ( $\rho(t), t \in (0, T)$ ):

$$NPV_e(i) = \int_0^T \rho(t) * \left(\frac{1+e}{1+i}\right)^t dt \tag{3.17}$$

## 3.5 Úrokové míry

### Faktory určující úrokovou míru

***Míra výnosnosti (výnos)*** $R_t$ (rate of return (return)):

$$R_t = \frac{\textit{konečná cena - počáteční cena}}{\textit{počáteční cena}}$$

Mějme časové období $\langle t, t+1\rangle$ , pak:

$$R_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \tag{3.18}$$

### Dekompozice úrokové míry

Nechť $r$ je nominální úroková míra, tj. např. úroková míra deklarovaná bankou. Úrokovací faktor $1 + r$ lze multiplikativně rozložit ve tvaru

$$1 + r = (1 + r_0) * (1 + r_{infl}) * (1 + r_{default}) * (1 + r_{liquid}) * (1 + r_{mat}), \tag{3.19}$$

kde: $r_0$ … bezriziková úroková míra (risk-free, riskless)
$r_{infl}$ … očekávaná inflace (inflační prémie)
$r_{default}$ … prémie pramenící z rizika nesplacení (= default)
… kreditní riziko

[1] více se o ní zmíníme v kapitole Úrokové míry

$r_{liquid}$ ... prémie za likviditu
... riziko, že aktivum není možné rychle směnit za hotové peníze (a bez podstatných ztrát)
$r_{mat}$ ... prémie za riziko vyplývající z možné změny úrokových měr v okamžiku splatnosti (maturity)
Aditivní tvar (platí jen pro malé částky):

$$r = r_0 + r_{infl} + r_{default} + r_{liquid} + r_{mat} \tag{3.20}$$

Pro bezrizikové státní dluhopisy platí: $r = (1 + r_0) * (1 + r_{infl}) - 1$.

## Reálný výnos

$r$ ... nominální úroková míra
$r_{infl}$ ... očekávaná inflace
$r_{real}$ ... reálná úroková míra (real interest rate)
Reálnou úrokovou míru vyjádříme ze vztahu:

$$1 + r = (1 + r_{infl}) * (1 + r_{real})$$

$\Rightarrow$

$$r_{real} = \frac{r - r_{infl}}{1 + r_{infl}} \doteq r - r_{infl} \tag{3.21}$$

Vztah (3.21) jsme již zmínili při modelování vlivu inflace na výnosovou rovnici (viz (3.16)).

Na reálný výnos má vliv i zdanění: $r_{tax}$ ... daňová sazba
Pak skutečná nominální úroková míra má tvar $r * (1 - r_{tax})$:

$$1 + r * (1 - r_{tax}) = (1 + r_{infl}) * (1 + r_{real})$$

$\Rightarrow$

$$r_{real} = \frac{1 + r * (1 - r_{tax})}{1 + r_{infl}} - 1 = \frac{r - r * r_{tax} - r_{infl}}{1 + r_{infl}} \tag{3.22}$$

Požadujeme-li u 2 investic (označme je A a B) s hrubými výnosy $r_A$ a $r_B$ a s daňovými sazbami $i_A$ a $i_B$ rovnost čistých výnosů, pak musí platit:

$$r_A * (1 - i_A) = r_B * (1 - i_B) \tag{3.23}$$

## 3.6 Příklady

**Příklad 3.1**

Pan Králík přemýšlí o výhodnosti investičního projektu, do kterého by nyní investoval 35 000 Kč. Tato investice by mu vynášela na konci každého roku 6 000 Kč po dobu 9 let. Je tento projekt výhodný při roční hodnotící úrokové míře 7 %?

**Řešení:**

Výhodnost projektu můžeme posuzovat např. z hlediska vnitřní míry výnosnosti nebo z hlediska čisté současné hodnoty. Pokud začneme **současnou hodnotou**, máme podle vzorce (3.1):

$$NPV = -35\,000 + \sum_{t=1}^{9} \frac{6\,000}{(1+0,07)^t} \doteq 4\,091,39 \text{ Kč}$$

Současná hodnota je tedy větší než 0, projekt bychom vyhodnotili jako výhodný.

Pro usnadnění výpočtu lze požít funkci ČISTÁ.SOUČHODNOTA, jež je zabudována v Excelu. Zde se zadá pouze příslušná úroková míra a výše finanční toků. Musíme si však dát pozor na čas prvního finančního toku. Tato funkce počítá s tím, že veškeré transakce probíhají na konci roku. První zadaná hodnota se tedy bere jako finanční tok uskutečněný na konci prvního období. To však není v našem případě pravda. Je tedy nutné spočítat si čistou současnou hodnotu pro příjmy (neboť první příjem je uskutečněn na konci prvního období) a od této hodnoty teprve odečíst počáteční výdaj.

Do buňky A1 až A9 vepíšeme 6000. Poté jen zadáme: Sazba: 0,07; Hodnota1: A1:A9.

= ČISTÁ.SOUČHODNOTA(0,07;A1:A9) – 35000

V Mathematice můžeme zadefinovat funkci

$$npv[i\_] := Total\left[Rest\left[NestList\left[\frac{\#}{1+i}\&, 6000, 9\right]\right]\right] - 35000$$

a vypočítat hodnotu pro $i = 0,07$

$$npv[0.07]$$

Výsledek je 4091.39 Kč.

Z hlediska **vnitřní míry výnosnosti** vidíme, že se jedná o případ, kdy máme nejdříve výdaje, pak příjmy (typ I). $NPV(i)$ je klesající funkcí $i$ a projekt bychom vyhodnotili jako výhodný, pokud by $7\% < IRR$.

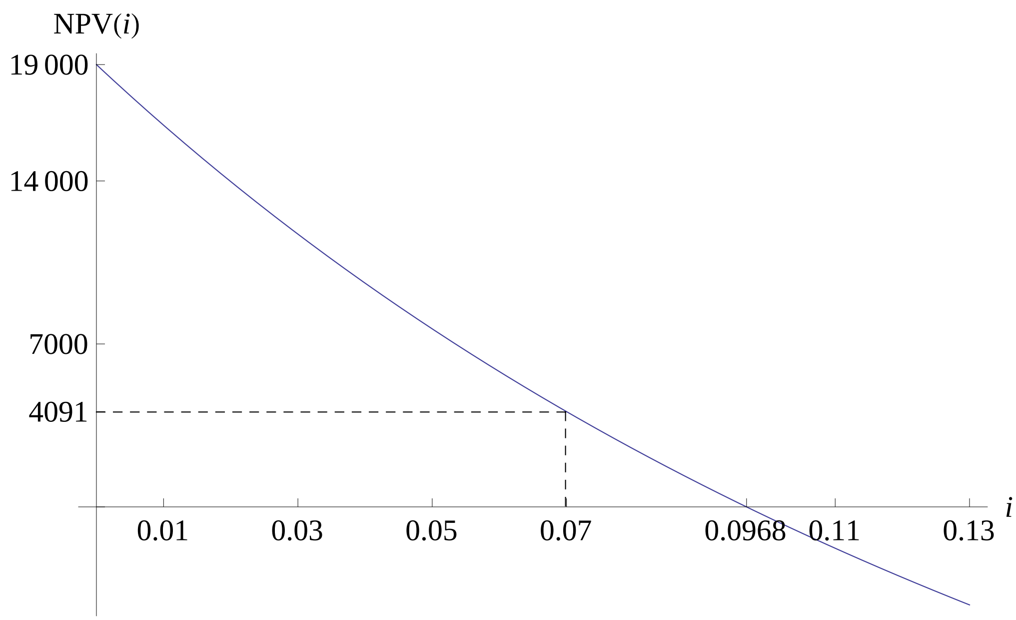
Jak již víme, $IRR$ je řešením rovnice $NPV(i) = 0$. K tomuto výpočtu je výhodné použít nějaký software. V Excelu můžeme použít „Hledání řešení", kde naše neznámá bude samozřejmě $IRR$, jednodušší je však použít funkci MÍRA.VÝNOSNOSTI. Musíme zadat v náležitém pořadí hodnoty finančních toků. Uložme si tedy do buňky B1 hodnotu -35 000 a do buněk B2 až B10 hodnotu 6 000. Funkce poté vypadá následovně:

$$\text{=MÍRA.VÝNOSNOSTI(B1:B10)} \doteq 9,679\%$$

$IRR = 9,679\ \% > 7\ \% \;\Rightarrow\;$ projekt je výhodný.
V Mathematice použijeme funkci NSolve:

$$NSolve\,[npv[i] == 0, i],$$

existuje 9 řešení, z nichž však jen kořen $i = 0.0967862$ je reálný.
Ukažme si to názorně na obrázku 3.3:




Obrázek 3.3

Dle **indexu ziskovosti** bychom se mohli také rozhodnout, je to vlastně jen jinak definovaná metoda založená na profilu současné hodnoty. Dle (3.4):

$$PI = \frac{-1}{-35\ 000} * \sum_{t=1}^{9} \frac{6\ 000}{(1+0,07)^t}$$

$$PI \doteq \frac{39\ 091}{35\ 000} \doteq 1,12 > 1$$

Opět vyhodnocujeme projekt jako výhodný.

$\diamondsuit$

**Příklad 3.2**

Uvažujme 3 nezávislé investiční projekty A, B a C s platbami vzdálenými od sebe 1 rok. Finanční toky projektu A:

$$CF_A = \{-80\ 000, -3\ 000, 4\ 000, 6\ 000, 10\ 000, 40\ 000, 40\ 000, 3\ 000\},$$

kde první platba se uskuteční ihned.
Pro projekt B platí:

$$CF_B = \{-20\ 000, 4\ 000, 2\ 000, 6\ 000, 5\ 000, 5\ 000\},$$

první platba se uskuteční až na konci 1. roku.
U projektu C očekáváme následující průběh:

$$CF_C = \{-32\ 000, 1\ 000, 1\ 000, 2\ 000, 2\ 000, 2\ 000, 2\ 000, 3\ 000, 20\ 000, 3\ 000\},$$

první platbu provedeme ihned.
Které projekty přijmeme, pokud je úroková míra $i = 2\ \%$?

**Řešení:**

Všechny projekty jsou typu I (nejdříve výdaje, pak příjmy). Investiční projekty tedy přijímáme v případě, že $IRR > i$. Pro vzájemně nezávislé projekty nám tedy stačí spočítat jednotlivé vnitřní míry výnosnosti (např. pomocí Excelu nebo programu Mathematica).

Pro projekt A řešíme rovnici:

$$-80000+\frac{-3000}{(1+IRR_A)}+\frac{4000}{(1+IRR_A)^2}+\frac{6000}{(1+IRR_A)^3}+\frac{10000}{(1+IRR_A)^4}+$$
$$+\frac{40000}{(1+IRR_A)^5}+\frac{40000}{(1+IRR_A)^6}+\frac{3000}{(1+IRR_A)^7}=0$$

V Excelu využijeme funkci MÍRA.VÝNOSNOSTI (můžeme ji použít i na projekt B, přestože výpočet nebude úplně přesný, neboť první splátka je až na konci prvního období, odchylka je však v našem případě téměř zanedbatelná). Do buněk A1 až A8 postupně vepíšeme jednotlivé finanční toky a

$$=\text{MÍRA.VÝNOSNOSTI(A1:A8)} \doteq 4,36\ \%$$

V Mathematice si můžeme poradit zadefinováním funkce přesně podle vzorce pro výpočet čisté současné hodnoty. Zde si ale ukážeme elegantnější způsob, jak tento vzorec zapsat. Mějme funkci

$$npv\,[cf\_, i\_, n\_] := cf.\frac{1}{(1+i)^{Range[n]-1}}$$

Pro projekt A nyní za $cf$ dosadíme vektor finančních toků, $n = 8$ (jelikož potřebujeme finanční toky diskontovat přes 0 až 7 let) a k získání $IRR$ použijeme funkci NSolve:

$NSolve[npv[\{-80000, -3000, 4000, 6000, 10000, 40000, 40000, 3000\}, i, 8] == 0, i]$

Z řešení si vybereme jediný reálný kladný kořen, čímž je $i = 0.0436271$.
$\Rightarrow$

$$IRR_A \doteq 0,0436 = 4,36\ \%$$

Pro projekt B bychom si v Mathematice museli definovat podobnou funkci, označme ji $npv2$:

$$npv2[cf\_, i\_, n\_]{:=}cf.\frac{1}{(1+i)^{Range[n]}}$$

Další postup by byl analogický jako v projektu A. Zadali bychom příslušné finanční toky a $n = 6$.

Vnitřní míra pro projekt B splňuje rovnici

$$\frac{-20000}{(1+IRR_B)}+\frac{4000}{(1+IRR_B)^2}+\frac{2000}{(1+IRR_B)^3}+\frac{6000}{(1+IRR_B)^4}+$$

$$+\frac{5000}{(1+IRR_B)^5}+\frac{5000}{(1+IRR_B)^6}=0$$

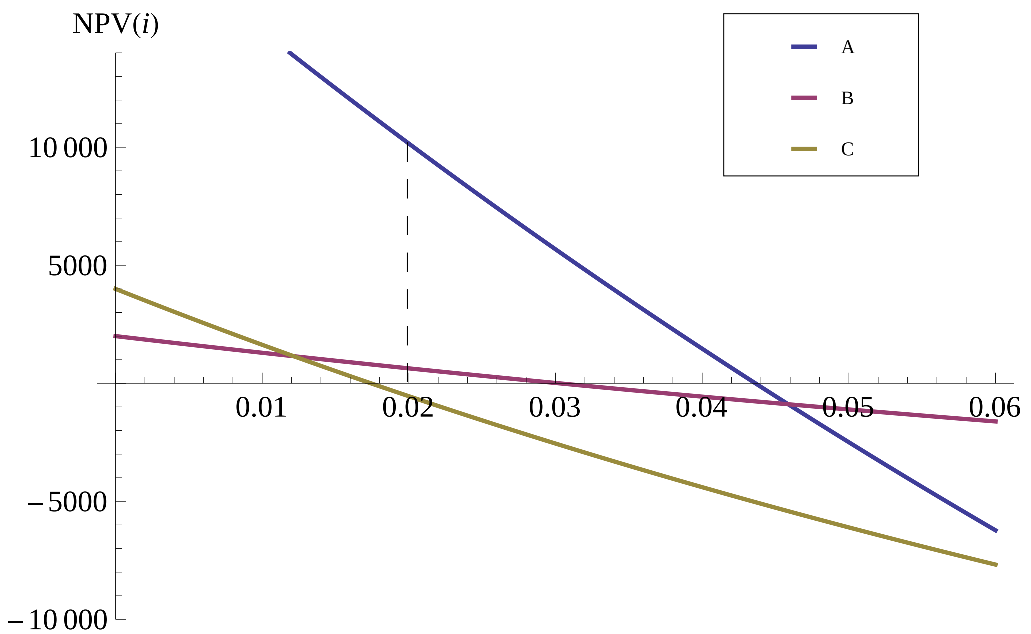
$\Rightarrow$

$$IRR_B \doteq 0,0302 = 3,02\ \%$$

Pro projekt C se vypočítá vnitřní míra výnosnosti analogicky jako pro projekt A.

$$IRR_C \doteq 0,0174 = 1,74\ \%$$

Porovnáním těchto vnitřních měr výnosnosti s úrokovou mírou 2 % zjistíme, že pouze projekt C nesplňuje podmínku výhodnosti. Přijali bychom tedy projekty A a B. Vše si ukážeme na obrázku 3.4. Zde vidíme, že jediný projekt C má pro $i = 0{,}02$ zápornou současnou hodnotu.




Obrázek 3.4

◊

**Příklad 3.3**

Mějme 4 vzájemně se vylučující investiční projekty A, B, C a D (viz tabulka 3.1). Proveďte kompletní analýzu přijetí projektů v závislosti na úrokové míře.

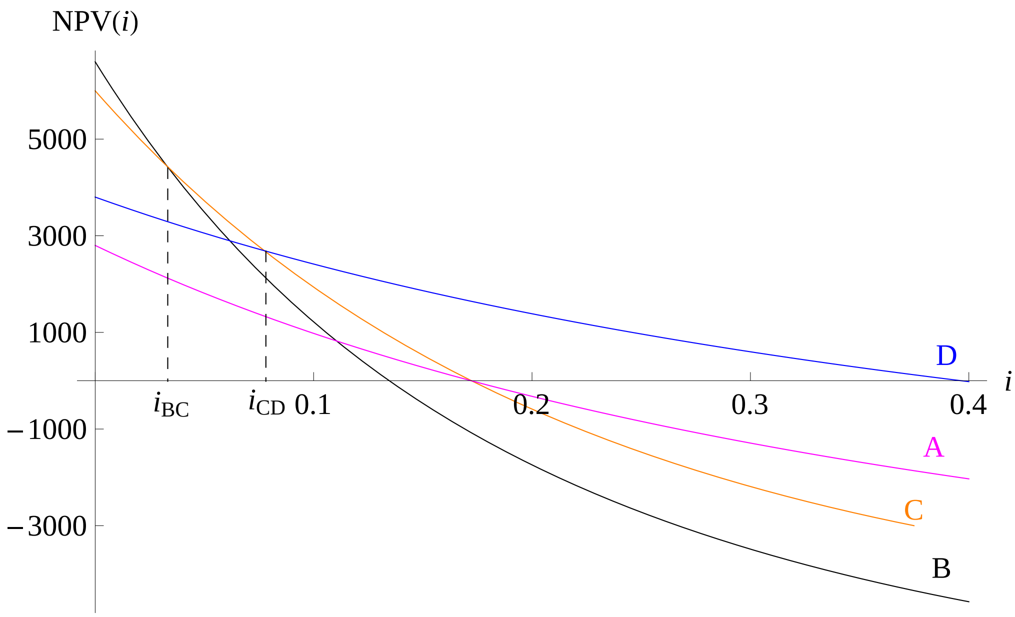
| **projekt / rok** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | -7 000 | 3 500 | 2 400 | 2 200 | 1 700 | | | |
| **B** | -8 000 | 1 500 | 500 | 700 | 2 300 | 2 300 | 3 300 | 4 000 |
| **C** | | -15 000 | 5 000 | 7 500 | 8 500 | | | |
| **D** | -4 500 | 3 000 | 3 000 | 2 000 | 300 | | | |

Tabulka 3.1

**Řešení:**

Vše bude nejlépe vidět v grafu, ve kterém si ukážeme závislosti jednotlivých současných hodnot projektů na úrokové míře (obrázek 3.5).

Pro nás je důležité, který projekt má při dané úrokové sazbě největší současnou hodnotu $NPV$. Zjistíme, při jaké hodnotě $i$ dosahují dvojice projektů stejné $NPV$ (tzv. *crossover rate*).




Obrázek 3.5

Z grafu vidíme, že rozhodující jsou 2 úrokové míry $i_{BC}, i_{CD}$ :

1) $NPV(CF_C, i_{BC}) = NPV(CF_B, i_{BC}) \Leftrightarrow$
   $NPV(CF_C - CF_B, i_{BC}) = 0$
2) $NPV(CF_D, i_{CD}) = NPV(CF_C, i_{CD})$

K výpočtu těchto úrokových měr je nejlepší použít program Mathematica. Zadefinujeme si funkci *npv* (čistá současná hodnota)

$$npv[cf\_, i\_, n\_] := cf.\frac{1}{(1+i)^{Range[n]-1}}$$

Pro projekt A:

$$npva[i\_] := npv[\{-7000, 3500, 2400, 2200, 1700\}, i, 5]$$

analogicky $npvb\,[i\_]$, $npvd\,[i\_]$.
V projektu C začínají finanční toky až v čase jedna, proto

$$npv2[cf\_, i\_, n\_] := cf.\frac{1}{(1+i)^{Range[n]}}$$

$$npvc[i\_] := npv2[\{-15000, 5000, 7500, 8500\}, i, 4]$$

Nyní v Mathematice zadáme:

$$NSolve[npvb[i] == npvc[i], i]$$

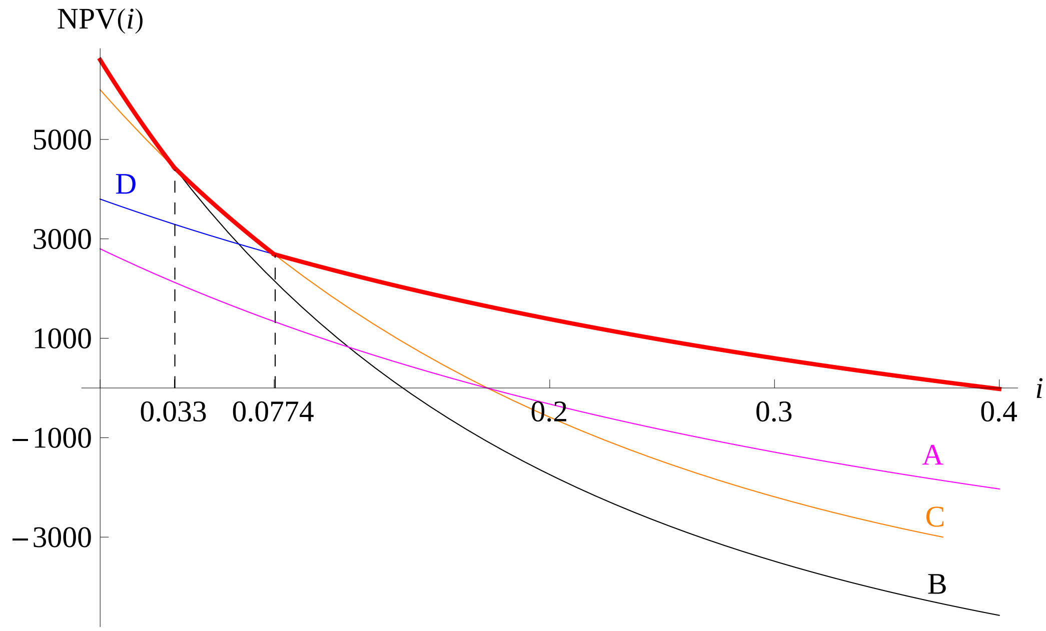
$$NSolve[npvc[i] == npvd[i], i]$$

Výstupem bude více hodnot, nás zajímají pouze reálné kladné hodnoty, což jsou naše $i_{BC}, i_{CD}$ :

$$i_{BC} \doteq 0,033$$

$$i_{CD} \doteq 0.0774$$

Již teď můžeme říci, že pro projekt A se nerozhodneme pro žádné $i$. Nyní se podívejme na obrázek 3.6.




Obrázek 3.6

Na obrázku jsou červeně vyznačeny projekty, které přijímáme. Shrňme to tabulkou 3.2.

| **úroková míra $i$** | **přijímáme** |
|---|---|
| $0 < i < 0,0330$ | projekt B |
| $0,0330 < i < 0,0774$ | projekt C |
| $0,0774 < i < 0,3964$ | projekt D |
| $0,3964 < i$ | žádný projekt |

Tabulka 3.2

Proč pro $i > 0,3964$ nepřijímáme žádný projekt?
Protože $IRR_D = 0,3964$ (spočtěte jako cvičení), tedy pro větší hodnoty $i$ už není výhodný ani projekt D.

$\diamondsuit$

**Příklad 3.4**

Uvažujme vzájemně se vylučující projekty z příkladu 3.3. Nechť je úroková sazba $i = 16$ %. Rozhodněte o přijetí projektu na základě diskontované metody návratnosti.

**Řešení:**

Dle (3.5) a (3.6), pokud $i = 0,16$:

- Projekt A:

$$A_3^{(i)} = -7\,000 + \frac{3\,500}{(1+i)} + \frac{2\,400}{(1+i)^2} + \frac{2\,200}{(1+i)^3} = -789,72$$

$$A_4^{(i)} = -7\,000 + \frac{3\,500}{(1+i)} + \frac{2\,400}{(1+i)^2} + \frac{2\,200}{(1+i)^3} + \frac{1\,700}{(1+i)^4} = 149,17$$

$\Rightarrow\ k = 4$

Diskontovaná perioda návratnosti:

$$PB(CF,i) = 4 - 1 - \frac{-789,72}{\frac{1700}{(1+0.16)^4}} = 3,84$$

- Projekt B:

$$A_7^{(i)} = -8\,000 + \frac{1\,500}{(1+i)} + \frac{500}{(1+i)^2} + \frac{700}{(1+i)^3} + \frac{2\,300}{(1+i)^4} + \frac{2\,300}{(1+i)^5} + \frac{3\,300}{(1+i)^6} + \frac{4\,000}{(1+i)^7}$$

$$A_7^{(i)} = -751,748$$

Diskontovaná perioda návratnosti: $PB(CF,i) = \infty$

- Projekt C:

$$A_3^{(i)} = \frac{-15\,000}{(1+i)} + \frac{5\,000}{(1+i)^2} + \frac{7\,500}{(1+i)^3} = -4\,410,29$$

$$A_4^{(i)} = \frac{-15\,000}{(1+i)} + \frac{5\,000}{(1+i)^2} + \frac{7\,500}{(1+i)^3} + \frac{8\,500}{(1+i)^4} = 284,19$$

$\Rightarrow\ k = 4$

Diskontovaná perioda návratnosti:

$$PB(CF,i) = 4 - 1 - \frac{-4\,410,29}{\frac{8\,500}{(1+0.16)^4}} = 3,94$$

- Projekt D:

$$A_1^{(i)} = -4\,500 + \frac{3\,000}{(1+i)} = -1\,913,79$$

$$A_2^{(i)} = -4\,500 + \frac{3\,000}{(1+i)} + \frac{30000}{(1+i)^2} = 315,7$$

$\Rightarrow\ k = 2$

Diskontovaná perioda návratnosti:

$$PB(CF,i) = 2 - 1 - \frac{-1\,913,79}{\frac{3\,000}{(1+0.16)^2}} = 1,86$$

Nejnižší diskontovanou periodu návratnosti vykazuje projekt D, pokládáme ho tedy při úrokové sazbě 16 % za nejvýhodnější. Výsledek se shoduje s řešením z minulého příkladu.

$\diamondsuit$

**Příklad 3.5**

Pan Kadlec si musel na pořízení nového stroje půjčit 300 000 Kč. V následujícím roce činil jeho zisk z výroby 100 000 Kč, o rok později se mu stroj porouchal a do opravy investoval 50 000 Kč. Třetí rok od pořízení stroje utržil 120 000 Kč, další rok nebyl již tak úspěšný, stroj mu vynesl pouhých 70 000 Kč a v posledním roce vydělal 150 000 Kč. Úroková míra činí 5,7 %.
a) Jaká je modifikovaná vnitřní míra výnosnosti?
b) Je tento projekt výhodný?
c) Jak by se změnila modifikovaná vnitřní míra výnosnosti, pokud by pan Kadlec mohl reinvestovat své příjmy s úrokovou sazbou 6 %?

**Řešení:**

Předpokládejme, že příjmy a výdaje se uskutečnily dle následujícího schématu: $CF = \{-300\,000, 100\,000, -50\,000, 120\,000, 70\,000, 150\,000\}$ v časech $t = \{0,1,2,3,4,5\}$. Úroková míra $k = 0,057$.

a) K výpočtu $MIRR$ použijeme rovnici (3.11).

$$300\,000 + \frac{50\,000}{(1,057)^2} = \frac{1}{(1+MIRR)^5} * \left(100\,000 * (1,057)^4 + \sum_{t=3}^{5} CF_t * (1,057)^{5-t}\right)$$

$$MIRR = \sqrt[5]{\frac{100\,000 * (1,057)^4 + \sum_{t=3}^{5} CF_t * (1,057)^{5-t}}{300\,000 + \frac{50\,000}{(1,057)^2}}} - 1 \doteq 0,06971 = 6,971\ \%$$

V Excelu využijeme funkce MOD.MÍRA.VÝNOSNOSTI. Do buněk A1 až A6 zadáme postupně hodnoty finančních toků (výdaje se znaménkem minus). Do argumentů Finance a Investice zadáme úrokovou sazbu 0,057. Výsledný zápis vypadá

$$= \text{MOD.MÍRA.VÝNOSNOSTI(A1:A6;} 0,057; 0,057) \doteq 6,971\ \%$$

b) Součástí úlohy je otázka, zda je projekt výhodný. Teoreticky jsme tento problém vyřešili v nerovnici (3.11). Projekt je výhodný, pokud $k < MIRR$. Pro náš projekt je $k = 5,7\ \% < 6,721\ \% = MIRR$. Projekt je tedy výhodný.

c) Označme si reinvestiční úrokovou míru $k_1 = 0,06$. Investiční úroková míra $k_0 = 0,057$ zůstává nezměněna. Náš případ popisuje rovnice (3.12).

$$300\ 000 + \frac{50\ 000}{(1,057)^2} = \frac{1}{(1+MIRR)^5} * \left(100\ 000 * (1,06)^4 + \sum_{t=3}^{5} CF_t * (1,06)^{5-t}\right)$$

$$MIRR \doteq 0,07077 = 7,077\ \%$$

V Excelu využijeme stejnou funkci jako v otázce a), změníme jen položku Investice = 0,06. Vzorec

$$= \text{MOD.MÍRA.VÝNOSNOSTI(A1:A6;} 0,057; 0,06)$$

nám dává výsledek 7,077 %.

$\diamondsuit$

**Příklad 3.6**

Určete roční míru inflace, pokud čistá současná hodnota (zohledňující inflaci) finančních toků $CF = \{3\ 000, 12\ 000, -17\ 000, -26\ 000, 40\ 000\}$ uskutečněných v časech $t = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ při roční úrokové míře 7,2 % dosahovala výše 9 200.

**Řešení:**

K řešení použijeme rovnici (3.15). Nejprve si spočítáme reálnou úrokovou sazbu $r_{real}$.

$$9\ 200 = \sum_{t=0}^{4} CF_t * \left(\frac{1}{1+r_{real}}\right)^t$$

Abychom spočítali $r_{real}$, je nejjednodušší převést čistou současnou hodnotu na pravou stranu, tedy představit si ji jako výdaj v čase 0. Pak se levá strana rovná nule a $r_{real}$ se rovná vnitřní míře výnosnosti. Použijeme Excel, konkrétně funkci MÍRA.VÝNOSNOSTI na finanční toky:$\{3\ 000 - 9\ 200, 12\ 000, -17\ 000, -26\ 000, 40\ 000\}$. Tyto hodnoty zapíšeme do buněk A1 až A5.

$$= \text{MÍRA.VÝNOSNOSTI(A1:A5)}$$

Odtud dostáváme, že $r_{real} \doteq 5,6153$ %. Jaká je však roční míra inflace? Z rovnice (3.16) si vyjádříme roční míru inflace $e$.

$$e = \frac{i - r_{real}}{1 + r_{real}}$$

Po dosazení konkrétních hodnot vychází roční míra inflace následovně:

$$e \doteq \frac{0,072 - 0,056}{1 + 0,056} \doteq 0,015 = 1,5\ \%$$

V Mathematice můžeme provést řešení následovně:

$$npve[cf\_, e\_, i\_, n\_]{:=}cf.\left(\frac{1+e}{1+i}\right)^{Range[n]-1}$$

$$infl[e\_]{:=}npve[\{3000, 12000, -17000, -26000, 40000\}, e, 0.072, 5]$$

$$NSolve[infl[e] == 9200, e]$$

Z výsledků si vybereme kladný reálný kořen $e = 0.0150041$.
Zkoušku můžeme provést dosazením do rovnice (3.15), za neznámou považovat čistou současnou hodnotu.

$$NPV_e(i) = \sum_{t=0}^{4} CF_t * \left(\frac{1 + 0,015}{1 + 0,072}\right)^t \doteq 9199,83$$

$\diamondsuit$

**Příklad 3.7**

Čistírny odpadních vod plánují koupit čističku, která stojí 25 000 000 Kč. Tento stroj jim vydrží 8 let, po 5 letech je však potřeba vyměnit filtr, který stojí 250 000 Kč. Čistička vyčistí každý rok 1 000 kubíků vody. Během následujících 8 let se předpokládají spojité výdaje (spojené s údržbou stroje) s konstantní intenzitou ve výši 520 000 Kč ročně. Cena vyčištěné vody je X Kč za 1 litr. Příjmy z prodeje vyčištěné vody jsou spojité s konstantní intenzitou. Po dosloužení stroje je nutná recyklace, výdaje s ní spojené vyjdou na 300 000 Kč. Jaká musí být minimální cena 1 litru vody, aby byl projekt výhodný, je-li běžná míra zhodnocení kapitálu 9 % ročně, roční míra inflace 2 % a každý prodaný litr vody se daní 15% sazbou?

**Řešení:**

Finanční toky si rozdělíme na příjmy a výdaje.

Výdaje: $CF_0 = -25\ 000\ 000$ Kč, $CF_5 = -250\ 000$ Kč, $CF_8 = -300\ 000$ Kč, $\rho_V(t) = \rho_V = -520\ 000$ Kč

Příjmy: $\rho_P(t) = \rho_P = 10^3 * X_k$, kde $X_k$ označuje cenu vody za kubík. Kubík je $1m^3$, což odpovídá 1 000 litrům.

$$\rho_P = 10^3 * X_k = 10^6 * X$$

Označme intenzitu $\rho = \rho_V + \rho_P * (1 - r_{tax}) = -520\ 000 + 10^6 * X * 0,85$.
Reálná úroková míra

$$r_{real} = \frac{r - r_{infl}}{1 + r_{infl}} = \frac{0,09 - 0,02}{1 + 0,02} \doteq 0,0686$$

pak tedy diskontní faktor $v = \frac{1}{1+r_{real}} \doteq 0,9358$.
Projekt je výhodný, pokud je čistá současná hodnota $NPV$ kladná.

$$NPV = CF_0 + CF_5 * v^5 + CF_8 * v^8 + \int_0^8 \rho * v^t\, dt$$

Obecně

$$\int_a^b v^t\, dt = \int_a^b e^{t*\log v}\, dt = \left[\frac{v^t}{\log v}\right]_a^b = \frac{v^b - v^a}{\log v}$$

Řešíme rovnici $NPV = 0$.

$$0 = -25\ 000\ 000 + (-250\ 000) * 0,9358^5 + (-300\ 000) * 0,9358^8 +$$

$$+(-520\ 000 + 10^6 * X * 0,85) * \frac{0,9358^8 - 1}{\log 0,9358}$$

$$X \doteq 5,418 \text{ Kč za litr}$$

Aby byl projekt výhodný, čistírny odpadních vod by si měly účtovat nejméně 5,42 Kč za litr vody.

$\diamondsuit$

# Kapitola 4

# Dluhopisy

***Dluhopis = obligace*** (bond) je cenný papír, který pro ***emitenta*** („vydavatele“) vyjadřuje dluh (závazek). Má danou dobu splatnosti a nominální hodnotu, může měnit majitele (veřejně obchodovatelné). Po uplynutí doby splatnosti je emitent povinen vyplatit majiteli obligace tzv. umořovací hodnotu, která je většinou rovna nominální hodnotě.
Existuje mnoho druhů obligací, zmíníme se zde o ***kupónové obligaci***, kdy emitent v průběhu doby splatnosti vyplácí pravidelně ***kupónové platby*** majiteli dluhopisu.

## Základní parametry obligace

$N$ … nominální hodnota (je natištěna na dluhopisu)
$A$ … spravedlivá cena ($A_0$ spravedlivá cena v čase 0)
$n$ … doba splatnosti (v letech)
$p$ … počet kupónových plateb v 1 roce (polhůtné)
$r_p$ … roční kupónová sazba
$\frac{r_p}{p} = r$ … kupónová sazba pro $p$-tinu roku
$N * r = C$ … kupónová platba
$N * r * (1 - r_{tax})$ … zdaněná kupónová platba, $r_{tax}$ … daňová sazba
$i_0$ … výnos do splatnosti (yield to maturity, $YTM$)

## 4.1 Spravedlivá cena obligace

Předpokládejme roční kupónové platby ($p = 1, r_1 = r$). Pak ***spravedlivá cena*** k datu emise je vyjádřena vzorcem

$$A_0 = r * N * \sum_{t=1}^{n} v^t + N * v^n = r * N * \frac{1 - v^n}{i} + N * v^n, \qquad (4.1)$$

kde $i$ je roční tržní úroková míra.

***Výnos do splatnosti*** je průměrný roční výnos, který investor získá okamžitým zakoupením dluhopisu za aktuální tržní cenu a jeho držením až do data splatnosti. Při dané ceně $A_0$ lze výnos do splatnosti matematicky vyjádřit jako kořen rovnice (4.1) o neznámé $i$.

Označme $MP$ ***tržní cenu dluhopisu*** (market price), pak $YTM$ je řešení rovnice $MP = PV(YTM)$. Uvědomme si, že $YTM$ je $IRR$ peněžních toků $(-MP, C, C, ..., C, C + N)$.

***Běžný výnos*** (current yield, $y$)
Běžný výnos se spočítá jako poměr kupónových plateb k tržní ceně dluhopisu. Pokud však neznáme tržní cenu dluhopisu, můžeme tento výnos vztáhnout k současné hodnotě dluhopisu (resp. k jeho spravedlivé ceně).

$$y = \frac{r * N}{MP} \qquad (4.2)$$

Případně $y = \frac{r*N}{A_0} = \frac{r}{P}$, kde $P = \frac{A_0}{N}$, což označuje jednotkovou cenu.

***Věta 4.1***
Pro obligaci s ročními kupónovými platbami platí:

$$A_0 = N \Leftrightarrow r = i_0$$

$$A_0 > N \Leftrightarrow r > i_0$$

$$A_0 < N \Leftrightarrow r < i_0$$

Důkaz viz kniha [1].

***Věta 4.2***
Pro obligaci s ročními kupónovými platbami platí:

$$A_0 = N \Leftrightarrow \frac{r}{P} = i_0$$

$$A_0 > N \Leftrightarrow \frac{r}{P} > i_0$$

$$A_0 < N \Leftrightarrow \frac{r}{P} < i_0$$

Důkaz: toto tvrzení vyplývá z předchozí věty.

***Věta 4.3***
Cena obligace $A_0$ je:
1) klesající funkcí výnosu do splatnosti $i$
2) rostoucí funkcí kupónové sazby $r$
3) klesající funkcí doby splatnosti $n$, pokud $A_0 < N$
   rostoucí funkcí doby splatnosti $n$, pokud $A_0 > N$

Důkaz: lze dokázat derivováním $A_0$ postupně podle $i$, $r$ a $n$.

## Ceny k různým datům

**Cena (spravedlivá) k datu některé z kupónových plateb** (bez zahrnutí kupónové platby v čase $k$):

$$A_k = r * N * \sum_{t=1}^{n-k} v^t + N * v^{n-k} = r * N * v * \frac{v^{n-k} - 1}{v - 1} + N * v^{n-k}, \quad (4.3)$$

$k = 1, ..., n$

**Cena k datu mezi dvěma kupónovými platbami:**
Nechť do uplynutí doby splatnosti zbývá $n^* = \lfloor n^* \rfloor + \{n^*\}$ let; $\{n^*\} \in (0, 1)$.

$$A_{n-n^*} = A_{\underbrace{n - \lfloor n^* \rfloor}_{k}} * v^{\{n^*\}} = \left( r * N * \sum_{t=0}^{\lfloor n^* \rfloor} v^t + N * v^{\lfloor n^* \rfloor} \right) * v^{\{n^*\}}, \quad (4.4)$$

$k = 1, ..., n$.
Tato cena je tzv. hrubá cena, neboť v sobě zahrnuje tzv. alikvótní úrok $AI$.

## **Čistá a hrubá**[1] **cena obligace** (pure and dirty price)

Předpokládáme roční kupónové platby.
Označme:
$k$ … datum kupónové platby; $k = 1, ..., n$
$k - E$ … datum ex-kupón; $E \in (0, 1)$
$D = n - n^* = k - \{n^*\}$ … datum prodeje obligace
$A_D, \hat{A}_D$ … cena obligace k času $D$ … ***čistá cena*** $\longrightarrow$ spravedlivá[2] $A_D$
$\searrow$ kótovaná $\hat{A}_D$

**Kótovaná cena:**
Spravedlivé ceny k datům kupónových plateb $k - 1, k$ (bez zahrnutí kupónových plateb v časech $k - 1, k$):

$$A_{k-1}^{-} = r * N * \sum_{t=1}^{n-k+1} v^t + N * v^{n-k+1} \tag{4.5}$$

$$A_k^{-} = r * N * \sum_{t=1}^{n-k} v^t + N * v^{n-k} \tag{4.6}$$

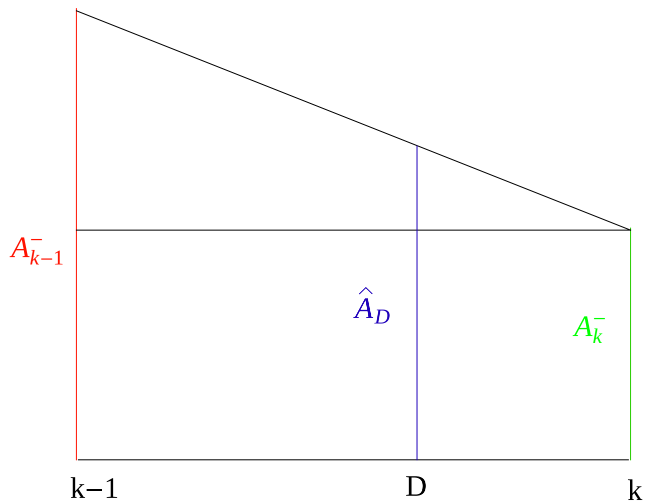
Z podobnosti trojúhelníků (viz obrázek 4.1) sestavíme rovnici:

$$\frac{A_{k-1}^{-} - A_k^{-}}{1} = \frac{\hat{A}_D - A_k^{-}}{k - D} \tag{4.7}$$

a z ní vyjádříme vztah pro kótovanou cenu:

$$\hat{A}_D = A_k^{-} + (k - D) * (A_{k-1}^{-} - A_k^{-}) \tag{4.8}$$

[1] někdy označována jako špinavá cena
[2] výpočet podobně jako na pravé straně vzorce (4.3), viz Příklad 4.2




Obrázek 4.1: Kótovaná cena $\widehat{A}_D$

Při určení ***hrubé ceny*** (= čistá cena + $AI$) rozlišujeme dvě možné situace:

- nechť $D < k - E$ neboli prodej obligace se uskutečnil před datem ex-kupón: kupónovou platbu v čase $k$ obdrží kupující a uhradí za to prodávajícímu navíc k čisté ceně tzv. ***alikvótní úrok*** $AI$ (accrued interest) ve výši $r * N * (D - k + 1)$. Hrubá cena je tedy rovna

$$\hat{A}_D + r * N * (D - k + 1) \tag{4.9}$$

- nechť $D > k - E$ neboli prodej obligace se uskutečnil po datu ex-kupón: kupónovou platbu v čase $k$ obdrží prodávající, kupujícímu je to kompenzováno snížením ceny o $AI$ ve výši $r * N * (D - k)$. Hrubá cena je tedy rovna

$$\hat{A}_D + \underbrace{r * N * (D - k)}_{<0} \tag{4.10}$$

### Kupónové platby vícekrát do roka

Předpokládejme nyní kupónové platby $p$-krát do roka, polhůtně.
$r_{(p)}$ ... roční kupónová sazba
$\frac{r_{(p)}}{p}$ ... kupónová sazba pro $p$-tinu roku
Připomeňme vztah mezi efektivním a nominálním výnosem do splatnosti:

$$1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{i_{(p)}}{p}\right)^p$$

*Spravedlivá cena k datu emise*

Nechť $n$ je doba splatnosti v letech. Jedná se o analogii se vzorcem (2.20) pro výpočet současné hodnoty důchodu s platbami a úročením $p$-krát do roka.

$$A_0 = \frac{r_{(p)}}{p} * N * \sum_{t=1}^{n*p} v^{\frac{t}{p}} + N * v^n = \frac{r_{(p)}}{p} * N * v^{\frac{1}{p}} * \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{p}}} + N * v^n \quad (4.11)$$

Pravou stranu vzorce (4.11) lze dále upravovat a za použití nominální úrokové míry vyjádříme $A_0$ ve tvaru

$$A_0 = \frac{r_{(p)}}{p} * N * \frac{1 - v^n}{\frac{i_{(p)}}{p}} + N * v^n = \frac{r_{(p)}}{i_{(p)}} * N * (1 - v^n) + N * v^n \quad (4.12)$$

Při ročních polhůtných kupónových platbách máme (viz (4.1)):

$$A_0 = \frac{r}{i} * N * (1 - v^n) + N * v^n \quad (4.13)$$

Lze ukázat, že platí analogie věty 4.2:

$$A_0 = N \Leftrightarrow r_{(p)} = i_{(p)}$$

$$A_0 > N \Leftrightarrow r_{(p)} > i_{(p)}$$

$$A_0 < N \Leftrightarrow r_{(p)} < i_{(p)}$$

## 4.2 Durace dluhopisů

O duraci (střední době splatnosti) jsme se již zmínili v kapitole 2. Nyní se zaměříme na duraci obligace.

Durace (Macaulayho durace) je měřítkem toho, za jak dlouho se vrátí investorovi cena zaplaceného dluhopisu, která je splácena svými vnitřními cashflow (kupóny).
Mějme dluhopis s nominální hodnotou $N$, ročními polhůtnými kupónovými platbami danými sazbou $r$ a dobou splatnosti $n$.
*Durace*:

$$D = \frac{r * N * \sum_{t=1}^{n} t * v^t + N * n * v^n}{r * N * \sum_{t=1}^{n} v^t + N * v^n} \tag{4.14}$$

**Vlastnosti durace:**

1. pokud $n = 1 \Rightarrow D = 1$
2. durace bezkupónového dluhopisu se rovná době do splatnosti: $D = n$
3. durace nemůže být nikdy vyšší než zbývající doba do splatnosti obligace
4. *konzola* (věčný dluhopis) má duraci rovnu $\lim_{n\to\infty} D(n) = \frac{1}{1-v}$:

$$D = \frac{1}{1-v} \tag{4.15}$$

5. durace je klesající funkcí kupónové sazby $r$
6. durace je klesající funkcí intenzity úroku $\delta$; $v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$
7. durace je klesající funkcí úrokové míry $i$
8. durace je většinou rostoucí funkcí doby splatnosti $n$ (výjimku tvoří případ dluhopisů s $r < i$)
9. durace dluhopisového portfólia je rovna váženému průměru durací jednotlivých aktiv:

$$D = \frac{PV_1 * D_1 + ... + PV_N * D_N}{PV_1 + ... + PV_N},$$

   kde $N$ je počet souborů dluhopisů, přičemž $i$-tý soubor je tvořen dluhopisy s durací $D_i$ a celkovou počáteční hodnotou $PV_i$; $i = 1, ..., N$

**Poznámka:** Podrobnosti o zmíněných vlastnostech durace viz kniha [2].

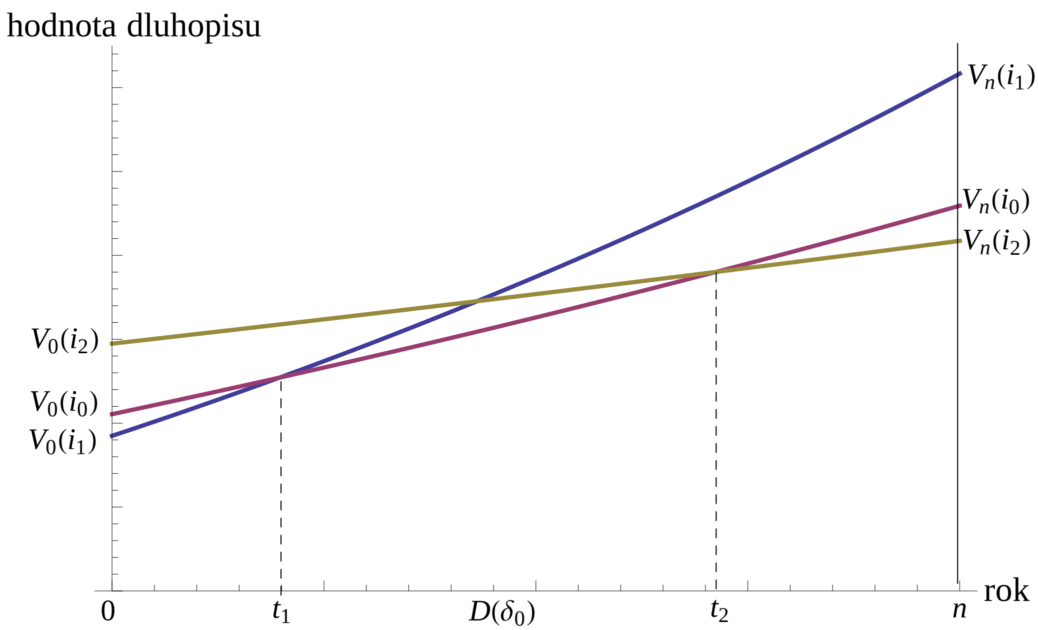
Durace má přímé využití při imunizaci dluhopisového portfólia.

## 4.3 Imunizace

***Imunizace portfólia*** (portfolio immunization) je metoda zajištění portfólia aktiv a závazků proti pohybům úrokových sazeb.
Označme:
$i_0$ … stávající úroková sazba (resp. $\delta_0$)
$i_1$ … změněná úroková sazba: $i_1 > i_0$
$i_2$ … změněná úroková sazba: $i_2 < i_0$
$CF_1, ..., CF_n > 0$ … finanční tok
Hodnota v čase $t$:

$$V_t(i_0) = V_0(i_0) * (1 + i_0)^t \tag{4.16}$$

Speciálně: $V_0(i_0) = \sum_{t=1}^{n} CF_t * (1 + i_0)^{-t}$ … klesající funkce $i_0$
$V_n(i_0) = \sum_{t=1}^{n} CF_t * (1 + i_0)^{n-t}$ … rostoucí funkce $i_0$




Obrázek 4.2: Durace

*Průsečíky* $(j = 1, 2)$:

$$
\begin{aligned}
V_{t_j}(i_j) &= V_{t_j}(i_0) && (4.17)\\
V_0(i_j) * (1+i_j)^{t_j} &= V_0(i_0) * (1+i_0)^{t_j} &&\\
\frac{V_0(i_j)}{V_0(i_0)} &= \frac{(1+i_0)^{t_j}}{(1+i_j)^{t_j}} && /\log\\
\log V_0(i_j) - \log V_0(i_0) &= -t_j * [\log(1+i_j) - \log(1+i_0)] &&
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$t_j = -\frac{\log V_0(i_j) - \log V_0(i_0)}{\log(1+i_j) - \log(1+i_0)} = -\frac{\log NPV(\delta_j) - \log NPV(\delta_0)}{\delta_j - \delta_0} \tag{4.18}$$

$$\lim_{\delta_j \to \delta_0} t_j = -\frac{\partial}{\partial \delta} \log NPV(\delta) \mid_{\delta=\delta_0} = D(\delta_0) \tag{4.19}$$

Lze ukázat (viz kniha [4]), že $D = D(\delta_0)$ je takový čas, že hodnota toku $V_D(\delta)$ je vždy větší než $V_D(\delta_0)$ pro $\delta \neq \delta_0 \;\Rightarrow\;$ tok je imunizován proti změnám v úrokových sazbách.

**Redingtonova teorie imunizace:**

Uvažujme podnik, který má:

$S_t$ … závazky splatné v čase $t$

$P_t$ … příjem z činnosti podniku v čase $t$

$L_t = S_t - P_t$ … čistá pasiva v čase $t$ (ta část závazků, která není pokryta příjmem z činnosti podniku)

$A_t$ … příjmy z finančních aktiv v čase $t$ (čistá aktiva)

Podnik by byl schopen hradit své závazky, kdyby

$$S_t = A_t + P_t \quad \forall\, t \;\wedge\; L_t = A_t \quad \forall\, t.$$

To ovšem nelze realizovat. Požadujeme proto rovnost současných hodnot čistých aktiv a pasiv.

Označme:

$$V_L(\delta) = \sum_t L_t * e^{-\delta * t}$$

$$V_A(\delta) = \sum_t A_t * e^{-\delta * t}$$

Platí-li při stávající intenzitě úroku $\delta_0$: $V_L(\delta_0) = V_A(\delta_0)$, má podnik za předpokladu neměnnosti úrokových sazeb finanční prostředky na úhradu svých závazků.

Předpokládejme splnění následujících podmínek:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad V_A(\delta_0) = V_L(\delta_0) \\
&(2) \quad V_A^{'}(\delta_0) = V_L^{'}(\delta_0) \text{ ... rovnost 1. derivací} \\
&(3) \quad V_A^{''}(\delta_0) > V_L^{''}(\delta_0) \text{ ... rovnost 2. derivací}
\end{aligned}$$

a označme:

$$V(\delta) = V_A(\delta) - V_L(\delta)$$

***Věta 4.4***
Jsou-li splněny podmínky (1) - (3), má funkce $V(\delta)$ v bodě $\delta_0$ lokální minimum a $V(\delta_0) = 0$.
Důkaz viz kniha [5].

KOMENTÁŘ K VĚTĚ 4.4: Věta říká, že splňují-li čistá aktiva a pasiva podmínky (1) - (3), je podnik imunizován proti malým změnám v úrokových sazbách, neboť $V(\delta) > 0$ pro $\delta$ z okolí $\delta_0$.

Výše zmíněné podmínky můžeme vyjádřit i jiným způsobem a jejich kombinací dojdeme k novým podmínkám:

$$(1) \quad \sum_t A_t * e^{-\delta_0 * t} = \sum_t L_t * e^{-\delta_0 * t}$$

$$(2) \quad \sum_t t * A_t * e^{-\delta_0 * t} = \sum_t t * L_t * e^{-\delta_0 * t}$$

$$(3) \quad \sum_t t^2 * A_t * e^{-\delta_0 * t} > \sum_t t^2 * L_t * e^{-\delta_0 * t}$$

Z (1) a (2) dostáváme:

$$\frac{\sum_t t * A_t * e^{-\delta_0 * t}}{\sum_t A_t * e^{-\delta_0 * t}} = \frac{\sum_t t * L_t * e^{-\delta_0 * t}}{\sum_t L_t * e^{-\delta_0 * t}}$$

neboli platí rovnost středních dob splatností (durací) čistých aktiv a pasiv:

$$(2^*) \quad D_A(\delta_0) = D_L(\delta_0)$$

Označíme: $D_A(\delta_0) = D_L(\delta_0) = D(\delta_0)$
I třetí podmínku lze vyjádřit jinak (opět s použitím prvních dvou podmínek) (viz kniha [5]):

$$(3^*) \quad \sum_t [t - D(\delta_0)]^2 * A_t * e^{-\delta_0 * t} > \sum_t [t - D(\delta_0)]^2 * L_t * e^{-\delta_0 * t}$$

Levou a pravou stranu nerovnosti lze chápat jako míru rozptýlenosti dob splatnosti čistých aktiv, resp. pasiv, kolem společné střední doby splatnosti.

## 4.4 Příklady

**Poznámka:**
Pokud se příkladech mluví o ročním výnosu do splatnosti, je tím myšlen efektivní výnos. V případě, že se bude jednat o roční nominální výnos, bude tato skutečnost zdůrazněna.

**Příklad 4.1**

Kupónový dluhopis o nominální hodnotě 15 000 Kč s pololetními kupónovými platbami a kupónovou sazbou 8 % byl vydán 1.4. 2007. Doba splatnosti je 7 let, roční výnos do splatnosti činí 9,6 %. Jaká je spravedlivá cena v době emise?

**Řešení:**
Vztah (4.11) nám určuje vzorec, který potřebujeme k vyřešení naší úlohy. Zadané hodnoty: $N = 15\ 000$ Kč; $p = 2$; $r_{(2)} = 0,08$; $n = 7$ let; $i = 0,096$. Budeme potřebovat diskontní faktor $v$

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+0,096} \doteq 0,9124$$

Dle vzorce (4.11):

$$A_0 = \frac{0,08}{2} * 15000 * \sqrt{0,9124} * \frac{1 - 0,9124^7}{1 - \sqrt{0,9124}} + 15000 * 0,9124^7 \doteq 13\ 954,1 \text{ Kč}$$

Pokud bychom chtěli použít vzorec (4.12), je nutné spočítat $i_{(2)}$ dle vzorce (1.13). Jelikož kupónové platby jsou pololetní, pak

$$i_{(2)} = 2 * (\sqrt{1+i} - 1) = 2 * (\sqrt{1+0,096} - 1) \doteq 0,0938$$

Nyní dosadíme do vzorce (4.12)

$$A_0 = \frac{0,08}{0,0938} * 15000 * (1 - 0,9124^7) + 15000 * 0,9124^7 \doteq 13\,954,8 \text{ Kč}$$

$\diamondsuit$

**Příklad 4.2**

Paní Chalupová koupila dne 13. prosince 2007 kupónový dluhopis o nominální hodnotě 10 000 Kč, který byl emitován 13. října 2006 s dobou splatnosti 6 let. Kupónové platby se uskutečňují čtvrtletně (1. kupón vyplacen 13. ledna 2007), datum ex-kupón je 8. ledna 2008, kupónová sazba činí 10 %, efektivní úroková míra je 8,5 %. Určete spravedlivou, kótovanou a hrubou cenu obligace ke dni koupě.

**Řešení:**

Údaje, které známe: $N = 10\ 000$ Kč; $p = 4$; $r_{(4)} = 0,1$; $i = 0,085$; $D = 13.\ 12.\ 2007$; $k = 13.\ 1.\ 2008$; $k - 1 = 13.\ 10.\ 2007$; $n = 6$. Zbývající doba splatnosti $n^*$ není celé číslo, neboť je to rozdíl 6 let a již uplynulé doby, $n^* = 4$ roky a 10 měsíců $= 4\frac{5}{6}$ let. Kupónové platby jsou však čtvrtletní, proto potřebujeme $n^*$ vyjádřit ve čtvrtletích, tedy $n^* = \frac{\lfloor n^* * p \rfloor}{p} + \{n^*\} = 19 * \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$. Podobně jako na pravé straně vzorce (4.3) vypočítáme spravedlivou cenu k datu 31. 12. 2007 (označme ji $A_s$). Musíme ji však transformovat na čtvrtletní kupónové platby. Obecně vzorec pro spravedlivou cenu k času $m$ (v letech) při kupónových platbách $p$-krát do roka

$$A_m = \frac{r_{(p)}}{p} * N * v^{\frac{1}{p}} * \frac{v^{n-m} - 1}{v^{\frac{1}{p}} - 1} + N * v^{n-m}$$

Pro nás je $m = 1\frac{1}{6}$. K tomuto datu je $A_s$

$$A_s = \frac{0,1}{4} * 10000 * v^{\frac{1}{4}} * \frac{v^{6-1\frac{1}{6}} - 1}{v^{\frac{1}{4}} - 1} + 10000 * v^{6-1\frac{1}{6}} \doteq 10\,695,15 \text{ Kč}$$

Chceme znát kótovanou cenu (jež je aproximací spravedlivé ceny) ke dni 13. 12. 2007. K tomu potřebujeme spočítat cenu $A_4^-$ ke dni 13. 10. 2007 (tento den je vyplacen 4. kupón) a cenu $A_5^-$ k 13. 1. 2008 (vyplacení 5. kupónu). Využijeme rovnic (4.5) a (4.6) (nezapomeňme však, že kupónové platby jsou čtvrtletní)

$$A_4^- = \frac{r_{(p)}}{p} * N * \sum_{t=1}^{n*p-4} v^{\frac{t}{p}} + N * v^{\frac{n*p-4}{p}}$$

$$A_4^- = \frac{0,1}{4} * 10000 * \sum_{t=1}^{20} \left(\frac{1}{1+0,085}\right)^{\frac{t}{4}} + 10000 * \left(\frac{1}{1+0,085}\right)^{\frac{20}{4}} \doteq 10\ 714,57 \text{ Kč}$$

$$A_5^- = \frac{r_{(p)}}{p} * N * \sum_{t=1}^{n*p-5} v^{\frac{t}{p}} + N * v^{\frac{n*p-5}{p}}$$

$$A_5^- = \frac{0,1}{4} * 10000 * \sum_{t=1}^{19} \left(\frac{1}{1+0,085}\right)^{\frac{t}{4}} + 10000 * \left(\frac{1}{1+0,085}\right)^{\frac{19}{4}} \doteq 10\ 685,34 \text{ Kč}$$

Na řadu nyní přichází výpočet kótované ceny dle (4.8), kde $k - D = \frac{1}{3}$, neboť doba mezi 13. 12. 2007 a 13. 1. 2008 je 1 měsíc, což je $\frac{1}{3}$ čtvrtletí.

$$\hat{A}_D = 10\ 685,34 + \frac{1}{3} * (10\ 714,57 - 10\ 685,34) \doteq 10\ 695,08 \text{ Kč}$$

Cena $A_s$ a $\hat{A}_D$ se tedy téměř shodují.
Pro výpočet hrubé ceny (označme ji $A_H$) musíme spočítat alikvótní úrok $AI$. Jelikož 13. prosince 2007 je dříve než 8. leden 2008, prodej se uskutečnil před datem ex-kupón, kupón v čase $k$ tedy obdrží kupující a uhradí o $AI$ prodávajícímu vyšší cenu (viz rovnice (4.9)).

$$AI = \frac{r_{(p)}}{p} * N * \frac{2}{3} = \frac{0,1}{4} * 10000 * \frac{2}{3} \doteq 166,67 \text{ Kč}$$

$$A_H = \hat{A}_D + AI = 10\ 695,08 + 166,67 = 10\ 861,75 \text{ Kč}$$

K výpočtu hrubé ceny bychom mohli použít i vzorec (4.4), který při kupónových platbách $p$-krát do roka vypadá následovně

$$A_h = \left(\frac{r_{(p)}}{p} * N * \sum_{t=0}^{\lfloor n^* * p \rfloor} v^{\frac{t}{p}} + N * v^{\frac{\lfloor n^* * p \rfloor}{p}}\right) * v^{\{n^*\}}$$

$$A_h = \left[\frac{0,1}{4} * 10000 * \sum_{t=0}^{19} \left(\frac{1}{1+0,085}\right)^{\frac{t}{4}} + 10000 * \left(\frac{1}{1+0,085}\right)^{\frac{19}{4}}\right] * \left(\frac{1}{1+0,085}\right)^{\frac{1}{12}}$$

$$A_h \doteq 10\ 861,25 \text{ Kč}$$

$\diamondsuit$

**Příklad 4.3**

Jaká je roční kupónová sazba dluhopisu s následujícími parametry? Nominální hodnota kupónového dluhopisu je 8 000 Kč, kupón se vyplácí pololetně. Cena k datu emise činí 7 800 Kč, doba splatnosti je 5 let a roční výnos do splatnosti je 9 %.

**Řešení:**

$A_0 = 7\ 800; N = 8\ 000; i = 0,09; n = 5; p = 2$. Rovnice (4.12) nám dává předpis pro výpočet ceny k datu emise. Z této rovnice si vyjádříme roční kupónovu sazbu $r_{(2)}$

$$r_{(2)} = \frac{(A_0 - N * v^n) * i_{(2)}}{N * (1 - v^n)},$$

přičemž $i_{(2)} = 2 * (\sqrt{1+i} - 1) = 2 * (\sqrt{1 + 0,09} - 1) \doteq 0,0881$.

$$r_{(2)} = \frac{\left[7\ 800 - 8\ 000 * \left(\frac{1}{1+0,09}\right)^5\right] * 0,0881}{8000 * \left[1 - \left(\frac{1}{1+0,09}\right)^5\right]} \doteq 0,0818 = 8,18\ \%$$

◊

**Příklad 4.4**

Dluhopis s nominální hodnotou 13 000 Kč má dobu splatnosti 6 let. Cena k datu emise je 14 000 Kč. Kupónové platby jsou prováděny pololetně s roční sazbou 7 %. Určete roční výnos do splatnosti.

**Řešení:**

Výnos do splatnosti $YTM$ je řešením rovnice (4.11).
$A_0 = 14\ 000$; $N = 13\ 000$; $p = 2$; $n = 6$; $r_{(2)} = 0,07$.

$$A_0 = \frac{r_{(p)}}{p} * N * \sum_{t=1}^{n*p} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{t}{p}} + N * \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

Rovnici řešíme vzhledem k $i$ pomocí softwaru, např. v Mathematice. Definujme si funkci *cena* (*nom* odpovídá $N$)

$$cena[nom\_, i\_, p\_, n\_, r\_] := \frac{r}{p} * nom * \sum_{t=1}^{p*n} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{t}{p}} + nom * \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

Vyřešíme rovnici vzhledem k $i$, řešení odpovídá $YTM$

$$Solve[cena[13000, i, 2, 6, 0.07] == 14000, i]$$

Výstupem je list možných řešení, z nichž jen poslední je reálná úroková míra $i = 0.0555343$. Hledaný roční výnos do splatnosti $YTM = 5,55$ %.

$\diamondsuit$

**Příklad 4.5**

Mějme kupónovou obligaci o nominální hodnotě 15 000 Kč. Doba splatnosti je 8 let, požadovaný roční nominální výnos do splatnosti činí 9 %. Kupónové platby jsou vypláceny pololetně, roční kupónová sazba je 7 %. Vypočtěte střední dobu splatnosti a modifikovanou duraci.

**Řešení:**

Pozor na to, že je zadán nominální výnos do splatnosti!!! V naší úloze se tedy $N = 15\,000$ Kč; $n = 8$ let; $p = 2$; $r_{(2)} = 0,07$; $i_{(2)} = 0,09$. Zajímá nás durace. Vypočtěme si nejdříve $PV$ (viz rovnice (4.11)). K tomu je výhodné si spočítat efektivní úrokovou míru $i = \left(1 + \frac{i_{(2)}}{2}\right)^2 - 1 \doteq 0,092025$.

$$PV(CF, v) = \frac{r_{(p)}}{p} * N * \sum_{t=1}^{n*p} v^{\frac{t}{p}} + N * v^n$$

$$PV(CF, v) = \frac{0,07}{2} * 15000 * \sum_{t=1}^{8*2} v^{\frac{t}{2}} + 15000 * v^8,$$

kde $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+0,092025} \doteq 0,91573$.

$$PV(CF, v) \doteq 13\,314,9 \text{ Kč}$$

Dle rovnice (2.8) nám vychází vzorec pro výpočet durace při kupónových platbách $p$-krát do roka

$$D(CF, v) = \frac{\frac{r_{(p)}}{p} * N * \sum_{t=1}^{n*p} \frac{t}{p} * v^{\frac{t}{p}} + N * n * v^n}{PV(CF, v)},$$

kde

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{\left(1 + \frac{i_{(p)}}{p}\right)^p}, \quad p = 2$$

$$D(CF, v) = \frac{81\ 666,56}{13\ 314,9} \doteq 6,1335 \text{ let}$$

Vzorec pro výpočet durace při kupónových platbách $p$-krát do roka může vypadat i následovně

$$D(CF, i_{(p)}) = \frac{\frac{r_{(p)}}{p} * N * \sum_{t=1}^{n*p} t * \left(\frac{1}{1+\frac{i_{(p)}}{p}}\right)^t + N * n * p * \left(\frac{1}{1+\frac{i_{(p)}}{p}}\right)^{n*p}}{\frac{r_{(p)}}{p} * N * \sum_{t=1}^{n*p} \left(\frac{1}{1+\frac{i_{(p)}}{p}}\right)^t + N * \left(\frac{1}{1+\frac{i_{(p)}}{p}}\right)^{n*p}}, \tag{4.20}$$

zde si však musíme dát pozor na jednotku. Durace bude mít měřítko $\frac{\text{rok}}{p}$.

$$D(CF, i_{(p)}) = \frac{\frac{0{,}07}{2} * 15000 * \sum_{t=1}^{8*2} t * \left(\frac{1}{1+\frac{0{,}09}{2}}\right)^t + 15000 * 8 * 2 * \left(\frac{1}{1+\frac{0{,}09}{2}}\right)^{8*2}}{\frac{0{,}07}{2} * 15000 * \sum_{t=1}^{8*2} \left(\frac{1}{1+\frac{0{,}09}{2}}\right)^t + 15000 * \left(\frac{1}{1+\frac{0{,}09}{2}}\right)^{8*2}}$$

$$D(CF, i_{(p)}) \doteq 12,267 \text{ půlroků}$$

Durace je tedy $12,267/2 = 6,1335$ let.

V Excelu existuje funkce DURATION. Musíme zde však zadat přesná data a navíc také kalendářní konvence,podle které má software počítat. Pokud zadáme např. Vypořádání = DATUM(2000;1;1), Splatnost = DATUM(2008;1;1), Kupón = 0,07, Výnos = 0,09 (udává se zde roční nominální výnos do splatnosti), Počet_plateb = 2 a Základnu = 1 (počítáme podle ACT/ACT), pak

$$= \text{DURATION}(\text{DATUM}(2000; 1; 1); \text{DATUM}(2008; 1; 1); 0,07; 0,09; 2; 1)$$

Výsledek je 6,1335 let.

Modifikovaná durace se při kupónových platbách $p$-krát do roka počítá (odvozeno ze vzorce (2.12))

$$D_{mod}(CF, i_{(p)}) = \frac{D(CF, i_{(p)})}{1 + \frac{i_{(p)}}{p}} \tag{4.21}$$

Po dosazení

$$D_{mod}(CF, i_{(p)}) = \frac{12,267}{1 + \frac{0{,}09}{2}} \doteq 11,739 \text{ půlroků} = 5,8695 \text{ let}$$

♢

**Příklad 4.6**

Uvažujme obligaci s nominální hodnotou 20 000 Kč, která vyplácí kupónové platby jednou ročně ve výši 6 % nominální hodnoty. Doba splatnosti je 5 let, výnos do splatnosti 8 %. Vypočtěte přibližnou novou tržní cenu obligace a) při zvýšení úrokové sazby o 1 %, b) při snížení úrokové sazby o 1 % (v obou případech zahrňte i konvexitu).

**Řešení:**

Na úvod si spočteme současnou cenu $PV$ obligace dle vzorce (4.1), přičemž $N = 20\,000$ Kč; $n = 5$ let; $r = 0,06$; $i = 0,08$.

$$PV = 0,06*20000*\sum_{t=1}^{5}\left(\frac{1}{1+0,08}\right)^{t}+20000*\left(\frac{1}{1+0,08}\right)^{5} \doteq 18\,402,92 \text{ Kč}$$

Čitatel z pravé strany rovnice (4.14) je roven

$$0,06*20000*\sum_{t=1}^{5} t*\left(\frac{1}{1+0,08}\right)^{t}+20000*5*\left(\frac{1}{1+0,08}\right)^{5} \doteq 81\,696,48$$

Durace se tedy spočítá jako

$$D(CF,i) \doteq \frac{81\,696,48}{18\,402,92} \doteq 4,45 \text{ let}$$

Pokud bychom výsledky nezaokrouhlovali, vyšel by nám přesnější výsledek, který získáme i pomocí excelovské funkce DURATION, kam můžeme za data Vypořádání a Splatnosti udat např. 1. 1. 2000 (resp. 1. 1. 2005) a Základnu zvolit 1 (neboli kalendářní konvenci ACT/ACT), tedy

$$= \text{DURATION}(\text{DATUM}(2000;1;1);\text{DATUM}(2008;1;1);0,06;0,08;1;1)$$

Excel nám vrátí hodnotu 4,439. Durace je tedy 4,439 let.
Budeme tedy dále počítat s touto přesnější hodnotou.
Pro úplnost si spočítáme modifikovanou duraci

$$D_{mod}(CF,i) = \frac{D(CF,i)}{1+i} = \frac{4,439}{1+0,08} \doteq 4,11 \text{ let}$$

Abychom určili odhad nové ceny, potřebujeme spočítat konvexitu. Dle rovnice (2.13) se bude rovnat

$$C(CF,i) = \frac{0,06*20000*\sum_{t=1}^{5} t*(t+1)*\left(\frac{1}{1+0,08}\right)^{t}+20000*5*6*\left(\frac{1}{1+0,08}\right)^{5}}{PV}$$

$$C(CF,i) \doteq \frac{470317,88}{18\,402,92} \doteq 25,557 \text{ let}^2$$

Výpočet modifikované konvexity (viz (2.14))

$$C_{mod}(CF,i) = \frac{C(CF,i)}{(1+i)^2} = \frac{25,557}{(1+0,08)^2} \doteq 23,664 \text{ let}^2$$

Nyní se dostáváme k závěrečnému výpočtu změny ceny obligace. Rovnice (2.15) nám dává návod, jak spočítat změnu ceny obligace.
Označme $\Delta PV = PV(CF, i + \Delta i) - PV(CF, i)$.

$$\Delta PV = -D_{mod}(CF,i) * PV * \Delta i + \frac{1}{2} * C_{mod}(CF,i) * PV * (\Delta i)^2$$

a) Úroková sazba se zvýšila o 1 %, tzn. že $\Delta i = 0,01$.

$$\Delta PV_a = -4,11 * 18\,402,92 * (0,01) + \frac{1}{2} * 23,664 * 18\,402,92 * (0,01)^2$$

$$\Delta PV_a \doteq -756,36 + 21,77 = -734,59 \text{ Kč}$$

Přibližná nová cena $PV_a^n$ při zvýšení úrokové sazby o 1 %

$$PV_a^n = PV + \Delta PV_a = 18\,402,92 - 734,59 = 17\,668,33$$

b) Úroková sazba se snížila o 1 %, tzn. že $\Delta i = -0,01$.

$$\Delta PV_b = -4,11 * 18\,402,92 * (-0,01) + \frac{1}{2} * 23,664 * 18\,402,92 * (-0,01)^2$$

$$\Delta PV_b \doteq 756,36 + 21,77 = 778,13 \text{ Kč}$$

Přibližná nová cena $PV_b^n$ při snížení úrokové sazby o 1 %

$$PV_b^n = PV + \Delta PV_b = 18\,402,92 + 778,13 = 19\,181,05 \text{ Kč}$$

Pro zajímavost si můžeme vypočítat přesný výsledek ceny při zvýšení či snížení úrokové sazby o 1 %. K výpočtu použijeme vzorec (4.1), kde nová úroková sazba a) $i = 9$ %, b) $i = 7$ %.

$$PV_a = 0,06*20000*\sum_{t=1}^{5}\left(\frac{1}{1+0,09}\right)^t + 20000*\left(\frac{1}{1+0,09}\right)^5 \doteq 17\,666,21 \text{ Kč}$$

$$PV_b = 0,06*20000*\sum_{t=1}^{5}\left(\frac{1}{1+0,07}\right)^t + 20000*\left(\frac{1}{1+0,07}\right)^5 \doteq 19\,179,96 \text{ Kč}$$

Vidíme, že v porovnání s odhadem nové ceny se oba výsledky liší přibližně o 2 Kč. Aproximace je tedy poměrně přesná.

◊

**Příklad 4.7**

Uvažujme 9letý kupónový dluhopis s nominální hodnotou 5 000 Kč, který vyplácí kupónové platby jednou ročně ve výši 8 % nominální hodnoty, roční tržní úroková míra činí 7 %. Předpokládejme 2 možné investiční horizonty: a) 3 roky, b) 8 let. Vypočtěte zisk pro obě situace, pokud ihned po koupi
1) vzrostla tržní úroková míra na 7,5 % nebo
2) klesla tržní úroková míra na 6,5 %.
Kdy bude investor imunizován proti změnám v úrokových sazbách?

**Řešení:**

Zadané hodnoty: $N = 5\ 000$ Kč; $n = 9$ let; $r = 0,08$; $i_0 = 0,07$.
a) Investiční horizont $IH = 3$. Nákupní cena $V_0(i_0)$ dle rovnice (4.1)

$$V_0(i_0) = 0,08 * 5000 * \sum_{t=1}^{9} \left( \frac{1}{1+0,07} \right)^t + 5000 * \left( \frac{1}{1+0,07} \right)^9$$

$$V_0(i_0) \doteq 5\ 325,76 \text{ Kč}$$

Spočítejme si cenu dluhopisu $PV_3$ po 3 letech od emise (použijeme rovnici (4.3), nezahrnujeme však již kupónovou platbu v čase 3), pokud se

1. úroková míra zvýšila na 7,5 % (označme $i_1 = 0,075$)

$$PV_3(i_1) = 0,08*5000*\sum_{t=1}^{6} \left( \frac{1}{1+0,075} \right)^t + 5000* \left( \frac{1}{1+0,075} \right)^6 \doteq 5\ 117,35 \text{ Kč}$$

Nyní musíme přihlédnout ke 3 kupónovým platbám (celkově ve výši 1 200 Kč), které bychom mohli reinvestovat s úrokovou sazbou 7,5 %. Zhodnocené kupóny mají hodnotu

$$r * N * \sum_{t=0}^{IH-1} (1+i_1)^t = 0,08 * 5000 * \sum_{t=0}^{2} (1+0,075)^t = 1\ 292,25 \text{ Kč}$$

**Poznámka:**

Součet ceny dluhopisu v čase 3 a zhodnocených kupónů odpovídá $V_3(i_1)$ při použití označení z teorie o imunizaci[3], neboli

$$V_3(i_1) = V_0(i_1) * (1+i_1)^3$$

[3]viz kapitola 4.2

$$V_3(i_1) = \left[0,08 * 5000 * \sum_{t=1}^{9} \left(\frac{1}{1+0,075}\right)^t + 5000 * \left(\frac{1}{1+0,075}\right)^9\right] * (1+0,075)^3$$

$$V_3(i_1) = 6\ 409,6 = 5\ 117,35 + 1\ 292,25$$

Celkový výnos je dán součtem rozdílu prodejní a nákupní ceny a zúročených obdržených kupónových plateb

$$PV_3(i_1) - V_0(i_0) + r * N * \sum_{t=0}^{2}(1+i_1)^t \doteq 1\ 083,84 \text{ Kč}$$

2. úroková míra snížila na 6,5 % (označme $i_2 = 0,065$)

$$V_3(i_2) = V_0(i_2) * (1+i_2)^3 \doteq 6\ 642,77 \text{ Kč}$$

Celkový výnos činí $6\ 642,77 - 5\ 325,76 \doteq 1\ 317,02$ Kč.

b) Investiční horizont $IH = 8$. Nákupní cena zůstává stejná.

1. Cena dluhopisu po 8 letech při zvýšení úrokové míry na 7,5 % ($i_1 = 0,075$):

$$V_8(i_1) = V_0(i_1) * (1+i_1)^8 \doteq 9\ 201,8 \text{ Kč}$$

Celkový výnos $V_8(i_1) - V_0(i_0) \doteq 3\ 876,04$ Kč.

2. Cena dluhopisu po 8 letech při snížení úrokové míry na 6,5 % ($i_2 = 0,065$):

$$V_8(i_2) = V_0(i_2) * (1+i_2)^8 \doteq 9\ 101,17 \text{ Kč}$$

Celkový výnos je tedy $9\ 101,17 - 5\ 325,76 \doteq 3\ 775,41$ Kč.

Pro představu si spočteme výnosy pro investiční horizonty při nezměněné úrokové sazbě.

a) $IH = 3$

$$V_3(i_0) = V_0(i_0) * (1+i_0)^3 \doteq 6\ 524,29 \text{ Kč}$$

Celkový výnos $6\ 524,29 - 5\ 325,76 = 1\ 198,53$ Kč.

b) $IH = 8$

$$V_8(i_0) = V_0(i_0) * (1 + i_0)^8 \doteq 9\,150,65 \text{ Kč}$$

Celkový výnos $9\,150,65 - 5\,325,76 = 3\,824,89$ Kč.

V Mathematice můžeme zadefinovat funkce pro výpočet výnosu takto:

$$pv[cf\_, i\_] := cf.\frac{1}{(1+i)^{Range[9]}},$$

kde funkce $pv$ spočítá současnou hodnotu finančního toku $cf$ při dané úrokové míře $i$.

$$v[cf\_, i\_, t\_] := pv[cf, i] * (1+i)^t,$$

funkce $v$ spočítá cenu finančního toku $cf$ při úrokové sazbě $i$ v čase $t$ ($t$ odpovídá $IH$), tato cena má v sobě zahrnuty i reinvestované kupónové platby.

$$vynos[cf\_, i\_, t\_] := v[cf, i, t] - pv[cf, 0.07]$$

tato funkce spočítá celkový výnos finančního toku $cf$ při úrokové sazbě $i$ za daného investičního horizontu $t$.
Finanční tok dluhopisu je dán 8 konstantními kupónovými platbami ve výši $0,08 * 5000$ Kč a poslední 9. platbou, která činí 5 400 Kč.

$$cf = Join[ConstantArray[0.08 * 5000, 8], \{5400\}]$$

Uveďme si příklad pro výpočet celkového výnosu při úrokové sazbě 0,075 za $IH = 3$:

$$vynos[cf, 0.075, 3] = 1083.83$$

Shrňme výnosy do tabulky 4.1.

| **tržní úroková míra / IH** | **3** | **8** |
|---|---|---|
| **6,5 %** | 1 317, 02 | 3 775, 41 |
| **7,0 %** | 1 198, 53 | 3 824, 89 |
| **7,5 %** | 1 083, 84 | 3 876, 04 |

Tabulka 4.1

Investor bude imunizován proti změnám v úrokových sazbách v čase durace při stávající sazbě. Durace daného kupónového dluhopisu dle (4.14)

$$D(CF, v) = \frac{0,08 * 5000 * \sum_{t=1}^{9} \left(\frac{1}{1+0,07}\right)^t + 5000 * 9 * \left(\frac{1}{1+0,07}\right)^9}{V_0(i_0)} \doteq 6,8233 \text{ let}$$

Pro investiční horizont $IH = 6,8233$ může být náš celkový výnos při změnách úrokových sazeb jen vyšší, tzn. pokud se úroková sazba sníží nebo zvýší, celkový výnos nebude nižší než při nezměněné úrokové míře, v našem případě při $i_0 = 0,07$.

1. $$V_D(i_0) = V_0(i_0) * (1 + 0,070)^{6,8233} \doteq 8\,450,38 \text{ Kč}$$

   Celkový výnos $8\,450,38 - 5\,325,76 = 3\,124,61$ Kč.

2. $$V_D(i_1) = V_0(i_1) * (1 + 0,075)^{6,8233} \doteq 8\,451,13 \text{ Kč}$$

   Celkový výnos $8\,451,13 - 5\,325,76 = 3\,125,37$ Kč.

3. $$V_D(i_2) = V_0(i_2) * (1 + 0,065)^{6,8233} \doteq 8\,451,13 \text{ Kč}$$

   Celkový výnos $8\,451,13 - 5\,325,76 = 3\,125,37$ Kč.

Vidíme, že celkový výnos v době durace je při sazbě 7,5 % i při sazbě 6,5 % vyšší než při 7 %.
Prohlédněme si celkovou tabulku 4.2. Tučně jsou vyznačeny nejnižší výnosy v daném $IH$.

| **tržní úroková míra/ IH** | **3** | **D=6,8233** | **8** |
|---|---|---|---|
| **6,5 %** | 1 317, 02 | 3 125, 37 | **3 775, 41** |
| **7,0 %** | 1 198, 53 | **3 124, 61** | 3 824, 89 |
| **7,5 %** | **1 083, 84** | 3 125, 37 | 3 876, 04 |

Tabulka 4.2

Povšimněme si závislosti výnosu na délce investičního horizontu a změně úrokové sazby:

- pro krátký $IH$

  $i \searrow \Rightarrow$ výnos $\nearrow$

  $i \nearrow \Rightarrow$ výnos $\searrow$

- pro dlouhý $IH$

  $i \searrow \Rightarrow$ výnos $\searrow$

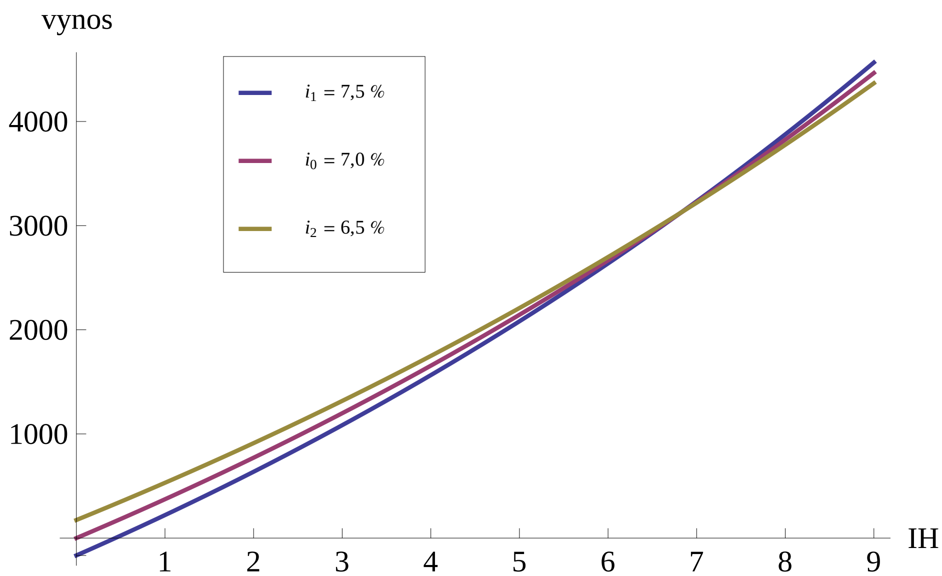
  $i \nearrow \Rightarrow$ výnos $\nearrow$

Pro přesné vymezení krátkého a dlouhého investičního horizontu bychom si museli spočítat jednotlivé průsečíky (viz rovnice (4.18)):

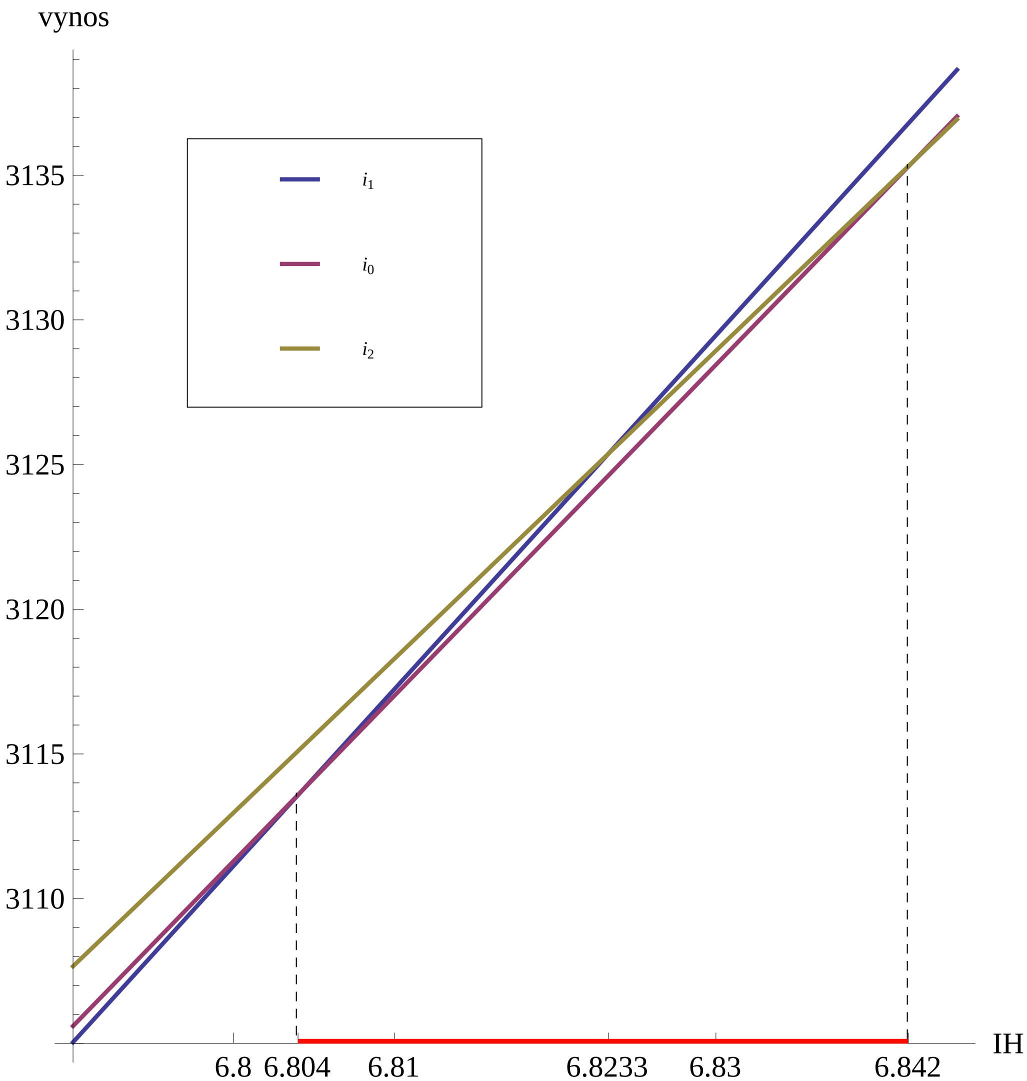
$$1)\ V_{t_1}(0,07) = V_{t_1}(0,075) \Rightarrow\ t_1 \doteq 6.8042$$

$$2)\ V_{t_2}(0,07) = V_{t_2}(0,065) \Rightarrow\ t_2 \doteq 6,8423$$

Celkový výnos je tedy imunizován přibližně pro $IH \in (6,80; 6,84)$.
Vývoj hodnoty výnosu vystihuje obrázek 4.3. Na obrázku 4.4 je červeně znázorněno období imunizace, uvažujeme-li pouze možné změny v intervalu $(i_2, i_1)$.




Obrázek 4.3: Závislost výnosu na investičním horizontu a tržní úrokové míře




Obrázek 4.4: Imunizace

◇

**Příklad 4.8**

Pan Mladý zakoupil věčný dluhopis (konzolu) za 4 000 Kč. Nominální hodnota tohoto dluhopisu je 3 000 Kč. Na konci každého roku je panu Mladému vyplacena kupónová platba v hodnotě 8 % nominální hodnoty, která se daní 15 %. Určete vnitřní míru výnosnosti z investice do obligace.

**Řešení:**

Známé údaje: $A_0 = 4\,000$ Kč; $N = 3\,000$ Kč; $r = 0,08$; $r_{tax} = 0,15$.
O tom, jak vypadá skutečná úroková míra se zahrnutím daňové sazby, jsme se zmínili v kapitole 3.5. Konzola je příkladem věčného důchodu (tvoří ho neomezená posloupnost kupónových plateb; nominální hodnota dluhopisu není nikdy vyplacena). K výpočtům tedy použijeme vzorec (2.28).

$$A_0 = N * r * (1 - r_{tax}) * \sum_{t=1}^{\infty} v^t = \frac{N * r * (1 - r_{tax})}{i}$$

Vnitřní míra výnosnosti $IRR$ je řešením rovnice vzhledem k neznámé $i$

$$IRR = \frac{N * r * (1 - r_{tax})}{A_0} = \frac{3000 * 0,08 * 0,85}{4000} = 0,051 = 5,1\ \%$$

$\diamondsuit$

**Příklad 4.9**

Nakreslete graf čisté a hrubé ceny dluhopisu s nominální hodnotou 100 Kč, jehož doba splatnosti je 7 let. Kupónové platby jsou vypláceny jednou ročně, kupónová sazba činí 7 % a tržní úroková míra $i$: a) $i = 10$ %, b) $i = 7$ %, c) $i = 4$ %.

**Řešení:**

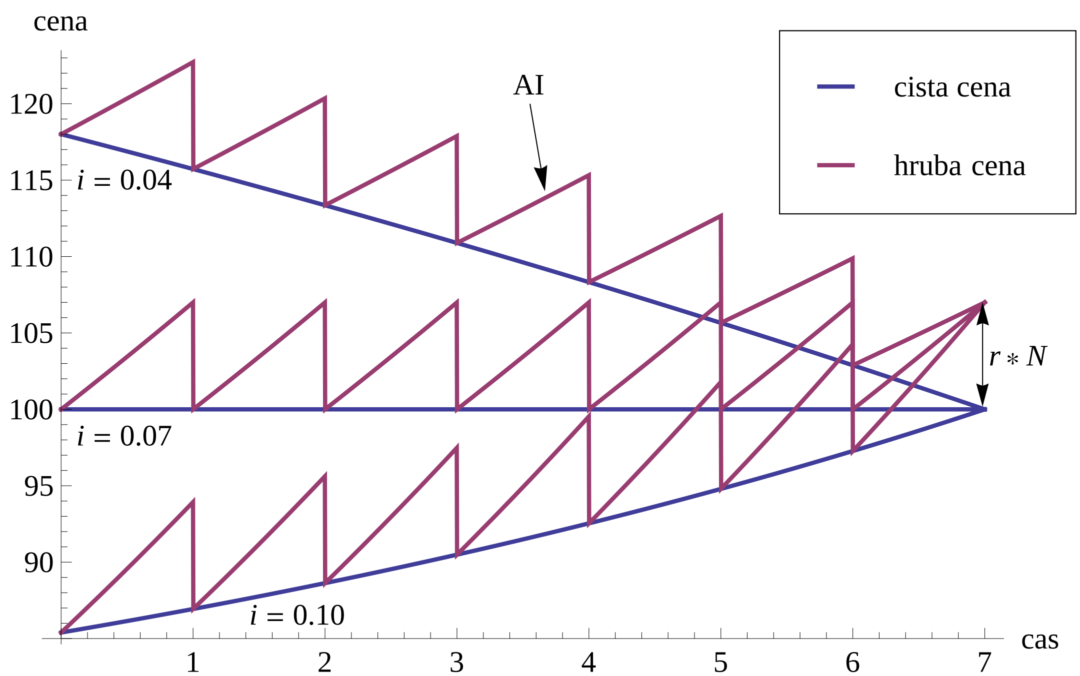
V našem příkladu máme $N = 100$ Kč, $n = 7$ let a $r = 0,07$. Abychom spočítali čistou cenu obligace v čase $m$ (nemusí být celé číslo), použijeme vzorec podobný pravé straně rovnice (4.3), v Mathematice zapsanou např. jako

$$A[m\_, i\_] = 0.07 * 100 * \left(\frac{1}{1+i}\right)^{7-m} * \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^{7-m} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} + 100 * \left(\frac{1}{1+i}\right)^{7-m}$$

a hrubou cenu dle (4.4)

$$Ah[m\_, i\_] = \left(0.07 * 100 * \sum_{t=0}^{Floor[7-m]} \left(\frac{1}{1+i}\right)^t + 100 * \left(\frac{1}{1+i}\right)^{Floor[7-m]}\right) *$$
$$* \left(\frac{1}{1+i}\right)^{(7-m-Floor[7-m])}$$

Na obrázku 4.5 vidíme, jak vypadají grafy cen při různých úrokových sazbách.




Obrázek 4.5: Čistá a hrubá cena obligace v závislosti na čase a úrokové míře

**Poznámka:**
Pokud

- $i > r$, pak $A_0 < N$. Tuto obligaci nazýváme ***diskontní obligace***.
- $i < r$, pak $A_0 > N$. Tuto obligaci nazýváme ***prémiová obligace***.
- $i = r$, pak $A_0 = N$

$\diamondsuit$

# Kapitola 5

# Opce

## 5.1 Typy opcí a jejich parametry

***Opce*** (option) jsou finanční deriváty, které představují právo v budoucnosti koupit či prodat bazický instrument (např. podkladové aktivum či komoditu), cenný papír, cizí měnu apod. za stanovených podmínek. Toto právo nemusí být využito, ***držitel opce*** (kupující, holder) rozhoduje o využití, říkáme, že je v tzv. dlouhé pozici (LONG). Zatímco ***upisovatel opce*** (prodávající, option writer) v krátké pozici (SHORT) se pasivně podřizuje rozhodnutí držitele opce. Prodávající prodá opci za cenu opce, za tzv. ***opční prémii*** (option premium).

Existují 2 typy opcí:
***1) kupní opce*** (CALL opce) - její držitel má právo koupit a upisovatel má povinnost prodat bazický instrument za předem stanovených podmínek
***2) prodejní opce*** (PUT opce) - její držitel má právo prodat upisovatel má povinnost koupit bazický instrument za předem stanovených podmínek.

Dané parametry opce:

- datum splatnosti opce (vypršení, maturity date, expiry date) = datum uplatnění opce; opci lze uplatnit buď pouze k datu splatnosti opce → jedná se o tzv. ***evropskou opci*** (European option) nebo ji lze uplatnit kdykoliv do data splatnosti → hovoříme o tzv. ***americké opci*** (American option)

- realizační cena (uplatňovací, strike, exercise price) = cena, za kterou může držitel opce call (resp. put) koupit (resp. prodat) bazický instrument

- předmět a objem opce (cenný papír apod.)

Základní údaje:
$S_t$ ... cena podkladového aktiva v čase $t$
$K$ ... realizační cena
$T$ ... okamžik vypršení
$\tau$ ... okamžik realizace ($\tau = T$ pro evropské opce)
$c_t$ ... cena evropské CALL opce v čase $t$
$p_t$ ... cena evropské PUT opce v čase $t$
$C_t$ ... cena americké CALL opce v čase $t$
$P_t$ ... cena americké PUT opce v čase $t$

Platí: zisk prodávajícího = ztráta kupujícího (a naopak).

- CALL opce z pohledu kupujícího v čase $T$ : pro $S_T > K$ kupující realizuje opci, pro $S_T < K$ nerealizuje opci

$$\text{zisk} = -c + \max\left(S_T - K, 0\right) \tag{5.1}$$

- CALL opce z pohledu prodávajícího v čase $T$ :

$$\text{zisk} = c - \max\left(S_T - K, 0\right) \tag{5.2}$$

- PUT opce z pohledu kupujícího v čase $T$ : pro $S_T < K$ kupující opci uplatní, prodá za $K$, pro $S_T > K$ nerealizuje opci

$$\text{zisk} = -p + \max\left(K - S_T, 0\right) \tag{5.3}$$

- PUT opce z pohledu prodávajícího v čase $T$ :

$$\text{zisk} = p - \max\left(K - S_T, 0\right) \tag{5.4}$$

Zisk (resp. ztráta) v závislosti na $S$ se nazývá výplatní funkce $V(S)$ (payoff function).

Tabulka 5.1 shrnuje maximální zisky a ztráty CALL a PUT opcí. Vidíme, že krátká pozice v CALL opci může znamenat neomezenou ztrátu.

| | CALL *max. zisk* | CALL *max. ztráta* | PUT *max. zisk* | PUT *max. ztráta* |
|---|---|---|---|---|
| *kupující* | $+\infty$ | $c$ | $K-p$ | $p$ |
| *prodávající* | $c$ | $+\infty$ | $p$ | $K-p$ |

Tabulka 5.1

## 5.2 Příklady

**Příklad 5.1**

Uvažujme následující situaci. Koupili jsme za 8 Kč PUT opci s realizační cenou 142 Kč a CALL opci za 10 Kč s realizační cenou 128 Kč. Obě opce jsou evropské, na stejný cenný papír a se stejným datem vypršení. V okamžiku vypršení je cena podkladového aktiva 116 Kč. Jaká je naše optimální strategie a kolik činí zisk?

**Řešení:**

Označme realizační cenu PUT opce $K_p$, realizační cenu CALL opce $K_c$.
Známé hodnoty: $p = 8$; $c = 10$; $K_p = 142$; $K_c = 128$; $S_T = 116$.
Vidíme tedy, že $S_T < K_c < K_p$. CALL opci uplatňujeme, pokud $K_c < S_T$, což není náš případ. PUT opci uplatňujeme v situaci, kdy $S_T < K_p$. Proto tedy realizujeme PUT opci.
Celkový zisk spočítáme jako součet zisků z obou opcí. Podle vzorce (5.1) a (5.3)

$$\text{celkový zisk} = [-10 + \max(116 - 128, 0)] + [-8 + \max(142 - 116, 0)] = 8 \text{ Kč}$$

Uplatníme tedy PUT opci se ziskem 8 Kč.

$\diamondsuit$

**Příklad 5.2**

Pan Synáček je vlastníkem dvou evropských CALL opcí, které koupil za $c_1 = 5$ Kč a $c_2 = 13$ Kč. Jejich realizační ceny jsou $K_1 = 1\ 020$ Kč a $K_2 = 1\ 050$ Kč. Tyto opce mají stejné datum vypršení a jsou na stejný cenný papír. Nalezněte strategii maximalizující zisk v závislosti na ceně podkladového aktiva a graficky znázorněte.

**Řešení:**

Zisk z CALL opce z pohledu kupujícího je dán rovnicí (5.1)

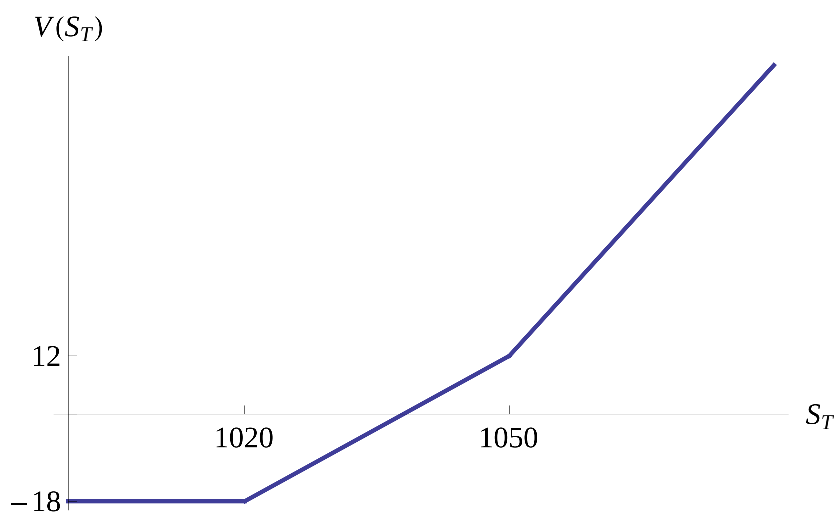
$$V(S_T) = -c_1 + \max(S_T - K_1, 0) - c_2 + \max(S_T - K_2, 0)$$

$$V(S_T) = -18 + \max(S_T - 1\ 020, 0) + \max(S_T - 1\ 050, 0)$$

Jednotlivé zisky v závislosti na hodnotě podkladového aktiva jsou shrnuty v tabulce 5.2.

| **cena podkladového aktiva** | **zisk [Kč]** |
|---|---|
| $S_T < 1\ 020$ | -18 |
| $1\ 020 < S_T < 1\ 050$ | $-1\ 038 + S_T$ |
| $1\ 050 < S_T$ | $-2\ 088 + 2 * S_T$ |

Tabulka 5.2




Obrázek 5.1: Závislost zisku na ceně podkladového aktiva

◇

**Příklad 5.3**

Znázorněte graficky závislost zisku z evropské PUT opce na ceně podkladového aktiva z pohledu krátké i dlouhé pozice. Předpokládejme cenu PUT opce 40 Kč. Cena podkladového aktiva v době vypršení je 241 Kč.

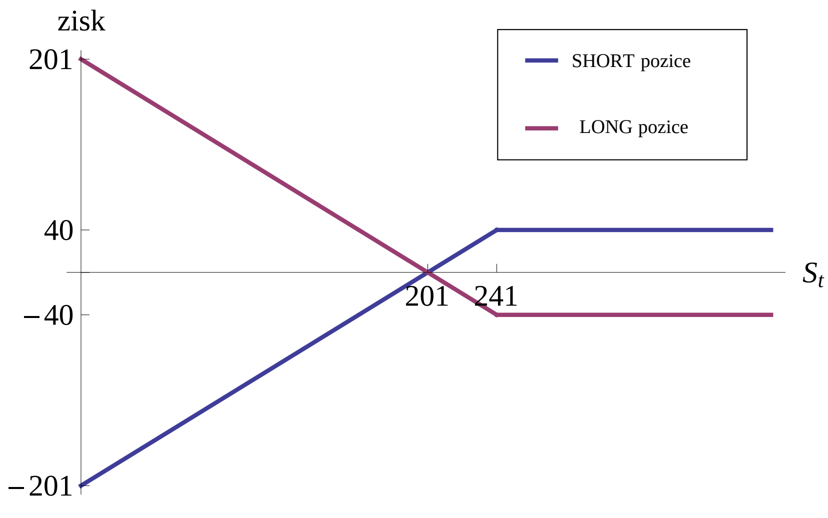
**Řešení:**

V krátké pozici je prodávající opce, v našem případě PUT opce. Zisk zjistíme pomocí rovnice (5.4). Pokud

- $S_t < 241$, držitel PUT opce svou opci uplatní
$$\text{zisk} = 40 - \max(241 - S_t, 0) = -201 + S_t$$
- $S_t > 241$, držitel PUT opce svou opci neuplatní
$$\text{zisk} = 40 - \max(241 - S_t, 0) = 40$$

Naopak kupující je v dlouhé pozici. Jeho zisk dle (5.3) pokud

- $S_t < 241$, držitel PUT opce svou opci uplatní
$$\text{zisk} = -40 + \max(241 - S_t, 0) = 201 - S_t$$
- $S_t > 241$, držitel PUT opce svou opci neuplatní
$$\text{zisk} = -40 + \max(241 - S_t, 0) = -40$$




Obrázek 5.2: Závislost zisku na ceně podkladového aktiva

$\diamondsuit$

**Příklad 5.4**

Zakoupili jsme 2 evropské opce - CALL a PUT. Obě opce jsou na stejný cenný papír a se stejnou dobou do splatnosti. CALL opce s realizační cenou 685 Kč stála 13 Kč. Za PUT opci, jejíž realizační cena je 672 Kč, jsme zaplatili 10 Kč. Vytvořte výplatní funkci a nakreslete graf zisku v závislosti na ceně cenného papíru.

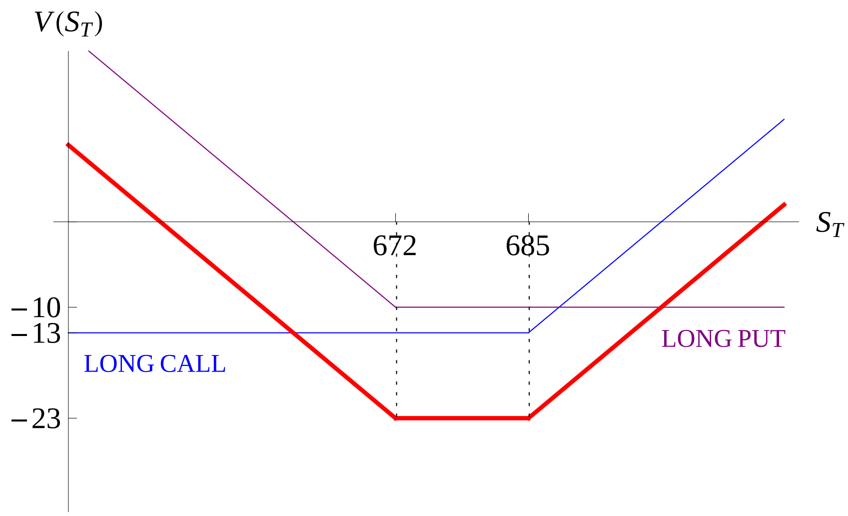
**Řešení:**

Jedná se o kombinací opcí stejných pozic s rozdílnou realizační cenou, kde realizační cena CALL opce je vyšší než realizační cena PUT opce. Tato kombinace se nazývá *STRANGLE (U-kombinace)*. V tomto případě se jedná o *LONG STRANGLE*, neboť jsme u obou opcí v dlouhé pozici (LONG CALL a LONG PUT opce).

Výplatní funkce $V(S_T)$ je součet zisků z obou opcí v závislosti na ceně cenného papíru. Zisk z CALL opce: $zisk = -13 + \max(S_T - 685, 0)$. Zisk z PUT opce: $zisk = -10 + \max(672 - S_T, 0)$. Výplatní funkce

$$V(S_T) = -13 + \max(S_T - 685, 0) + (-10) + \max(672 - S_T, 0)$$

Na obrázku 5.3 vidíme výplatní funkce LONG CALL a LONG PUT opce. Červeně je znázorněna výplatní funkce kombinace těchto opcí. Maximální ztráta (-23 Kč) nastává v intervalu, kdy $S_T \in \langle 672, 685 \rangle$.




Obrázek 5.3: Long strangle

◇

**Příklad 5.5**

Cena akcií XYZ je nyní 360 Kč. Pan Ulč se rozhodl investovat následujícím způsobem:
Koupil 2 CALL opce na akcie XYZ. První, s realizační cenou 330 Kč, za 32 Kč. Druhou koupil za 4 Kč, ta má realizační cenu 390 Kč. Navíc vypsal dvě CALL opce na akcie XYZ. Prodejní cena první činila 18 Kč a měla realizační cenu 350 Kč. Druhá se prodala za 11 Kč a její realizační cena byla 370 Kč. Všechny opce mají stejnou dobu do splatnosti. K datu splatnosti opcí vytvořte graf závislosti zisku na ceně akcií XYZ.

**Řešení:**
Shrňme si údaje do tabulky 5.3.

| **opce** | **realizační cena** | **cena opce** |
|---|---|---|
| *LONG CALL opce* $(O_1)$ | $K_1 = 330$ | $c_1 = 32$ |
| *LONG CALL opce* $(O_2)$ | $K_2 = 390$ | $c_2 = 4$ |
| *SHORT CALL opce* $(O_3)$ | $K_3 = 350$ | $c_3 = 18$ |
| *SHORT CALL opce* $(O_4)$ | $K_4 = 370$ | $c_4 = 11$ |

Tabulka 5.3

Pan Ulč do opcí investuje 7 Kč (neboť $18 + 11 - 32 - 4 = -7$). Zisk ze zakoupených CALL opcí v době jejich vypršení v závislosti na ceně akcií XYZ (označme ho $V_C(S_T)$) je roven

$$-32 + \max(S_T - 330, 0) + (-4) + \max(S_T - 390, 0)$$

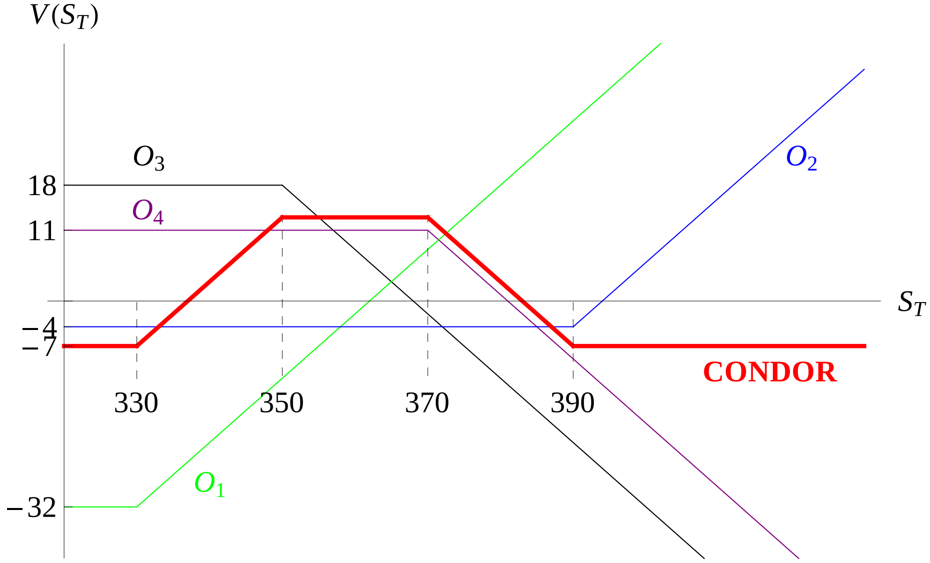
zisk z prodaných CALL opcí ($V_P(S_T)$) se rovná

$$18 - \max(S_T - 350, 0) + 11 - \max(S_T - 370, 0).$$

Výplatní funkce kombinace všech opcí $V(S_T)$ je rovna součtu zisků ze zakoupených opcí a z prodaných opcí.

$$V(S_T) = V_C(S_T) + V_P(S_T)$$

Průběh funkce $V(S_T)$ je zobrazen červeně na obrázku 5.4. Tato strategie se nazývá *CONDOR (KONDOR)*. Pro realizační ceny opcí platí, že $K_1 < K_3 < K_4 < K_2$ a $K_1 + K_2 = K_3 + K_4$. Maximální zisk 13 Kč nastane, pokud $S_T \in \langle 350, 370 \rangle$. Maximální ztráta je rovna počáteční investici, tzn. 7 Kč. Zisk je nulový, pokud $S_T = 337$ Kč nebo $S_T = 383$ Kč.




Obrázek 5.4: Condor

◊

# Literatura


[1] Cipra T.: *Finanční matematika v praxi*, HZ Praha, spol. s r. o., Praha, 1994.

[2] Cipra T.: *Matematika cenných papírů*, HZ Praha, spol. s r. o., Praha, 2000.

[3] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J.: *Stochastic modeling in economics and finance*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[4] Loistl O.: *Computergestütztes wertpapiermanagement*, Oldenbourg, München, 1996.

[5] McCutcheon J. J., Scott W. F.: *An introduction to the mathematics of finance*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2003.

[6] Mejstřík M., Pečená M., Teplý P.: *Základní principy bankovnictví*, Karolinum, Praha, 2008.

[7] ww.czso.cz, webové stránky Českého statistického úřadu