Domácí úlohy ze samoopravných kódů

2025/26

Domácích úkolů bude zadáno celkem 8 za celkem 50 bodů a k získání zápočtu z nich bude třeba získat aspoň 35 bodů. Všechna svá tvrzení zdůvodňujte.

1. (odevzdejte do 27.10.)

(a) Popište nějaký binární kód délky 8, který není lineární, nosnosti $\frac{1}{2}$ a vzdálenosti 4. Dokažte, že kód, který z každého (lineárního i nelineárního) kódu s takovými parametry dostanete odstraněním kterékoli souřadnice (tj. propíchnutím π_i) je perfektní. (Návod: využijte Příklad 3.7 z přednášky.)

5 bodů

(b) Vypište všechny lineární i nelineární binární 1-perfektní MDS kódy (není jich zas tak mnoho).

5 bodů

Připomeňme značení $\mathbf{H}_{r,\underline{\alpha}} = (\alpha_j^{i-1})_{i \le r, j \le n} \in \mathbb{F}^{r \times n}$ *pro* $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{F}^n$, *r přirozené a* $\Delta(\mathbf{v}) \in \mathbb{F}^{r \times n}$ *diagonální matici s vektorem* $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^*)^n$ *na diagonále.*

2. (odevzdejte do 24.11.)

(a) Jestliže $0 < k < n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou po dvou různé nenulové prvky tělesa $\mathbb{F}$ a $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, dokažte, že pro kód $\mathcal{C}$ s kontrolní maticí $\mathbf{G} = \mathbf{H}_{n-k,\underline{\alpha}}\Delta(\mathbf{v})$, kde $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^*)^n$, existuje $\mathbf{u} \in (\mathbb{F}^*)^n$, pro které $\mathbf{H}_{k,\underline{\alpha}}\Delta(\mathbf{u})$ tvoří generující matici kódu $\mathcal{C}$.
(*Návod: pro nalezení hodnot diagonální matice uvažte řešení homogenní soustavu s maticí* $\mathbf{H}_{n-2,\underline{\alpha}}$ *a podmínku* $\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$.)

6 bodů

(b) Určete kolik existuje různých monických neasociovaných ireducibilních faktorů polynomu $x^{22} - x$ nad tělesy $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$ a $\mathbb{F}_7$.

6 bodů

3. (odevzdejte do 15.12.)

(a) Určete generující matici binárního Reedova-Mullerova kódu $\mathcal{R}(4, 1)$, kde Booleovské funkce $\mathbf{c} \to f(\mathbf{c})$ reprezentujme slovem $f(\mathbf{c}_0) \ldots f(\mathbf{c}_{15})$ pro čtveřice cifer $\mathbf{c}_i \in \mathbb{F}_2^4$ představující binární zápis čísla i. Najděte Booleův polynom p, aby $\Phi(p) = 100 \ldots 001$ (tj. hodnota 1 právě jako první a poslední cifra slova, jinde 0).

6 bodů

(b) Uvažujme ternární lineární kód $\mathcal{T}$ generovaný maticí

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{6\times 12},$$

kde $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$. Dokažte, že je $\mathcal{T}$ samoduální kód a dále za předpokladu, že jde o kód vzdálenosti 6 (to nemusíte dokazovat), dokažte, že je propíchnutí $\mathcal{T}$ v libovolné souřadnici 2-perfektní $[11, 6, 5]_3$-kód (zvaný *Golayův ternární* kód).

7 bodů

4. (odevzdejte do zkoušky nebo do 13.2.)

(a) Pro abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ) nad tělesem $\mathbb{F}_5$ se stavovou a výstupní funkcí $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{u}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{u}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ najděte fyzickou realizaci (K, G), určete vnější stupeň matice G a nakreslete realizaci kódovače obvodem.

8 bodů

(b) Pro fyzický konvoluční kódovač (K, G) určený generující maticí

$$G = \begin{pmatrix} 1 + D & \frac{1}{1+D} \\ \frac{D}{1+D+D^2} & \frac{D}{1+D} \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{F}_2$ najděte matice P, Q, R, S určující abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ), kde $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P + \mathbf{u}Q$ a $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R + \mathbf{u}S$. Najděte nějakou základní polynomiální generující matici konvolučního kódu určeného generující maticí G.

7 bodů