

SAMOOPRAVNÉ KÓDY

OBSAH

Motivace a obsah	2
Základní koncepty	3
1. Najít a opravit!	3
2. S linearitou je lépe	5
Algebraické konstrukce	8
3. Co všechno přežijí MDS-kódy	8
4. Co už ani MDS-kódy nepřežijí	10
5. Rozkládáme polynomy	12
6. Cyklické kódy	16
7. GRS kódy a jejich ostatky	19
Kombinatorické konstrukce	22
8. Reedovy-Mullerovy kódy	22
9. Golayovy perfektní kódy	25
Konvoluční kódy	33
10. Kódujme konvolučním kódem!	33
11. Konvoluční kódovač: obvod nebo překladač?	36
12. Polynomiální generující matice	40
13. Viterbiho dekodování	44

Date: 5. ledna 2026.

Děkuji Dominiku Stejskalovi za upozornění na chyby a Adamu Klepáčovi za šablonu obvodu.

MOTIVACE A OBSAH

Objektem našeho zájmu bude jeden, z hlediska praktického použití zásadní aspekt matematického modelu otázky, jak rychle a bez ztrát přenést informaci, jímž je kocept matematické struktury, které umožní realizaci modelu v konkrétní fyzikální situaci. Model přenosu můžeme popsat jednoduchým schématem:

$$\text{informační zdroj} \xrightarrow{\text{kódování}} \text{kód} \xrightarrow{\text{kanál}} \text{dekódování}$$

Informaci v tomto modelu chápeme jako náhodnou veličinu výběru zprávy z množiny všech možných zpráv, podobně můžeme jazykem teorie pravděpodobnosti popsat informační kanál, v němž s jistou pravděpodobností může dojít k chybě, tedy přijetí jiné než vyslané zprávy (přirozené je kvantifikovat pravděpodobnost přijetí všech možných zpráv za předpokladu vyslání každé možné zakódované zprávy, tedy pomocí podmíněné pravděpodobnosti). Pravděpodobnostní stránkou modelu a kvantifikací teoretických mezí úspěšnosti přenosu se zabývá teorie informace. Pro porozumění přístupu teorie samoopravných kódů si stačí z teorie informace vzít pouze fakt, že neexistuje žádná teoreticky lepší metoda dekódování než hledání bitově nejbližší kódové zprávy k té, která byla přijata. V naší přednášce se tedy omezíme na zkoumání konkrétních matematických struktur, jmenovitě tříd lineárních kódů, vhodného kódování a (z časových důvodů ve velmi omezené míře) algoritmicky efektivními postupy dekódování metodou nejbližšího slova.

Je smutným faktem, že přes silné výsledky teorie informace, které lze shrnout do sloganu *náhodný kód je asymptoticky dobrý*, je asymptotické chování konstrukcí takzvaných blokových kódů, jimž se budeme věnovat větší část semestru, velmi špatné, tedy, že informační poměr počtu informačních bitů vzhledem k délce (tedy podíl logaritmu počtu kódových slov k logaritmu počtu všech slov) se pro rostoucí délku bloků blíží limitně k nule. To ovšem nemění nic na faktu, že pro omezené délky jsou prezentované algebraické a kombinatorické konstrukce kódů aplikačně a občas i teoreticky významné. Na závěr kurzu našťestí nastíníme základy teorie konvolučních kódů, jejichž využití v konstrukci takzvaných turbokódů už se Shannonově teoretické mezi využití kapacity kanálu úspěšně přibližuje.

Rozvrh přednášky:

- (1) základní koncepty teorie kódů (vzdálenost, nosnost, linearita, dualita),
- (2) algebraické konstrukce (konečná tělesa a polynomy nad nimi, cyklické, RS, GRS a reziduální kódy),
- (3) kombinatorické a geometrické konstrukce (Golayovy kódy, RM kódy),
- (4) úvod do konvolučních kódů.

Základní koncepty

1. NAJÍT A OPRAVIT!

Nejprve zavedeme pojmy délky a vzdálenosti kódu, které nám umožní korektně pracovat s konceptem nalezení a opravení chyby přijatého slova. Hlavním výsledkem sekce budou dva vztahy (Hammingův a Singletonův) ozřejmující pro danou délku kódu protiklad schopnosti opravit chybu a velikosti.

Celou přednášku předpokládáme, že $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}$ je abeceda znaků zdroje i příjemce pro \mathbb{F} konečné těleso řádu $q = |\mathbb{F}|$, n bude vždy přirozené číslo.

T&N. Aritmetický vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ budeme nazývat *slovo* délky n a v souřadnicích ho budeme zapisovat řádkově $\mathbf{v} = v_1v_2 \dots v_n$.

Množina $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ se nazývá *blokový kód délky n* a jednoprvkový kód budeme nazývat *triviálním kódem*, zatímco kód $\mathcal{C} = \mathbb{F}^n$ *totálním kódem*.

Definice. Necht' $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je neprázdná množina slov. Pak

- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\{i \mid u_i \neq v_i\}|$ se nazývá (*Hammingova*) *vzdálenost* slov \mathbf{u} a \mathbf{v} ,
- položíme $d(\mathcal{C}) = \min\{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\}$ pro $|\mathcal{C}| > 1$ a $d(\mathcal{C}) = n + 1$ pro $|\mathcal{C}| = 1$, pak $d(\mathcal{C})$ nazveme (*Hammingova*) *vzdálenost kódu \mathcal{C}* ,
- $w(\mathbf{u}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{0})$ se nazývá (*Hammingova*) *váha* slova \mathbf{u} .

Poznámka 1.1. Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ pak

- (1) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ pro každé $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$
- (2) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = w(\mathbf{u} - \mathbf{v})$

Důkaz. (1) Označme $D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{i \mid u_i \neq v_i\}$, pak

$$D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \subseteq D(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cup D(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

proto

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |D(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq |D(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cup D(\mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

- (2) Stačí uvážit, že $u_i \neq v_i \Leftrightarrow u_i - v_i \neq 0$. □

T&N. Jestliže $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n$, $M \subseteq \mathbb{F}_q^n$ a r je nezáporné celé číslo, pak

$$S(\mathbf{u}, r) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n \mid d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq r\}$$

je q -ární koule o poloměru r se středem \mathbf{u} a dále značíme $V_q(n, r) = |S(\mathbf{0}, r)|$ a $\mathbf{u} + M = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n\}$.

Pozorování. Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ a $r \in \mathbb{N}$ pak

- (1) $S(\mathbf{u}, r) = \mathbf{u} + S(\mathbf{0}, r) = \mathbf{u} - \mathbf{v} + S(\mathbf{v}, r)$,
- (2) $V_q(n, r) = |S(\mathbf{u}, r)| = |S(\mathbf{v}, r)|$.

T&N. Je-li r nezáporné celé číslo, pak o kódu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ řekneme, že

- *rozpozná r chyb*, pokud $S(\mathbf{u}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$ pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$,
- *opraví r chyb*, pokud $S(\mathbf{u}, r) \cap S(\mathbf{v}, r) = \emptyset$ pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Pozorování. Pokud kód \mathcal{C} opraví r chyb, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v} \in S(\mathbf{u}, r)$, pak $S(\mathbf{v}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$.

Předchozí úvaha vede k opravovacímu algoritmu metodou nejbližšího slova: je-li \mathbf{v} přijaté slovo, zvolíme takové $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, pro něž $S(\mathbf{v}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$. Je-li pravděpodobnost bezchybného přijetí (q -árního) bitu větší než pravděpodobnost bitové chyby, víme z teorie informace, že se jedná o ML dekodovací schéma.

Poznámka 1.2. Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je netriviální kód a $r \in \mathbb{N}$ pak

- (1) \mathcal{C} rozpozná r chyb $\Leftrightarrow d(\mathcal{C}) > r$,
- (2) \mathcal{C} opraví r chyb $\Leftrightarrow d(\mathcal{C}) > 2r$,

Důkaz. (1) $d(\mathcal{C}) > r \Leftrightarrow \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ platí, že $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > r$, tudíž $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{C} : S(\mathbf{u}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$.

(2) Dokážeme nepřímo.

(\Rightarrow) Nechť $d \leq 2r$. Pak $\exists \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ splňující $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq 2r \Rightarrow$ pro $D := \{i \mid u_i \neq v_i\}$ dostáváme $|D| \leq 2r \Rightarrow \exists B \subset D$, pro něž $|B| \leq r$ a $|D \setminus B| \leq r$. Definujme slovo \mathbf{w} :

$$w_i = \begin{cases} u_i & \text{pro } i \in B \\ v_i & \text{pro } i \in D \setminus B \\ u_i = v_i & \text{jinde} \end{cases}$$

Pak $d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq r$ a $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq r$, proto $\mathbf{w} \in S(\mathbf{u}, r) \cap S(\mathbf{v}, r)$.

(\Leftarrow) Nechť $\exists \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ a $\exists \mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$ splňující $\mathbf{w} \in S(\mathbf{u}, r) \cap S(\mathbf{v}, r)$. Pak

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq 2r$$

díky 1.1(1). □

Věta 1.3 (Hammingova nerovnost). Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je netriviální kód, který opraví r chyb. Pak $2r < d(\mathcal{C})$ a pro $k = \log_q |\mathcal{C}|$ platí, že $V_q(n, r) \leq q^{n-k}$.

Důkaz. Z 1.2 plyne, že $2r < d(\mathcal{C})$, proto je $\{S(\mathbf{u}, r) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{C}\}$ disjunktní systém podmnožin \mathbb{F}^n . Nyní stačí přepočítat prvky jednotlivých množin:

$$V_q(n, r)|\mathcal{C}| = \sum_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} |S(\mathbf{u}, r)| = \left| \bigcup_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} S(\mathbf{u}, r) \right| \leq |\mathbb{F}^n| = q^n.$$

Protože $|\mathcal{C}| = q^k$, dostáváme $V_q(n, r) \leq \frac{q^n}{q^k} = q^{n-k}$. □

Definice. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$, $k = \log_q |\mathcal{C}|$ a r je nezáporné celé číslo. Číslo $\frac{k}{n}$ se nazývá *nosnost* (nebo také informační poměr) kódu

Kód \mathcal{C} je *r -perfektní*, jestliže opraví r chyb a $V_q(n, r) = q^{n-k}$, \mathcal{C} je *perfektní*, jestliže existuje r , pro něž je r -perfektní.

Pozorování. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je netriviální kód, $k = \log_q |\mathcal{C}|$ a r je nezáporné celé číslo.

- (1) $\frac{k}{n} \in (0, 1)$ a $k = n$, právě když $\mathcal{C} = \mathbb{F}_q^n$,
- (2) \mathcal{C} je r -perfektní, právě když $\mathbb{F}_q^n = \bigcup_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} S(\mathbf{u}, r)$,
- (3) je-li \mathcal{C} perfektní kód, je r -perfektní pro jediné $r = \frac{d(\mathcal{C})-1}{2}$, a je $d(\mathcal{C})$ nutně liché.

Věta 1.4 (Singletonův odhad). Jestliže $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ je kód a $k = \log_q |\mathcal{C}|$, pak $d(\mathcal{C}) \leq n - k + 1$.

Důkaz. Pro triviální kód je $k = 0$ a tvrzení tak zřejmě platí. Položme nyní $A(n, d) := \max\{\log_q |\mathcal{C}| \mid \mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n, d(\mathcal{C}) \geq d\}$. Pak pro každé $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ splňující $d = d(\mathcal{C})$ platí, že $k \leq A(n, d)$.

Dokazujeme indukci dle $d \geq 1$ tvrzení $\forall n \ A(n, d) \leq n - d + 1$.

Protože vzdálenost jedna má totální kód \mathbb{F}_q^n , dostáváme $A(n, 1) = n = n - 1 + 1$, vidíme, že tvrzení pro $d = 1$ a každé n platí.

Za platnosti tvrzení pro $d - 1$ dokážeme tvrzení pro $d \geq 2$. Pro libovolný kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ splňující $d(\mathcal{C}) \geq d$ sestrojíme kód

$$\bar{\mathcal{C}} := \{v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{F}_q^{n-1} \mid \exists v_n : v_1 \dots v_{n-1} v_n \in \mathcal{C}\}.$$

Pak $|\bar{\mathcal{C}}| = |\mathcal{C}|$ protože $d \geq 2$ a dále $d(\bar{\mathcal{C}}) \geq d - 1$, proto díky indukčnímu předpokladu dostáváme, že

$$A(n, d) \leq A(n - 1, d - 1) \leq (n - 1) - (d - 1) + 1 = n - d + 1.$$

Protože $k \leq A(n, d(\mathcal{C})) \leq n - d(\mathcal{C}) + 1$, vidíme, že $d(\mathcal{C}) \leq n - k + 1$. \square

Definice. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$, $k = \log_q |\mathcal{C}|$ a $d = d(\mathcal{C})$. \mathcal{C} se nazývá *MDS* (maximum distance separable), jestliže $d = n - k + 1$.

Příklad 1.5. (1) Totální kód \mathbb{F}_q^n má vzdálenost 1, neopraví tudíž žádnou chybu a představuje zcela nezajímavý kód, byť je 0-perfektní i MDS.

(2) Dvouprvkový binární kód $\{\mathbf{0}, 11 \dots 1\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ má vzdálenost n , jedná se tedy o MDS kód, který je pro n liché i perfektní, neboť opraví právě $\frac{n-1}{2}$ chyb a $\mathbb{F}_2^n = S(\mathbf{0}, \frac{n-1}{2}) \cup S(11 \dots 1, \frac{n-1}{2})$. V případě, že je n sudé o perfektní kód se podle předchozího pozorování jistě nejedná.

(3) Pro $n \geq 2$ je tzv. paritní kód $\mathcal{C} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^n \mid \sum_i v_i = 0\}$ MDS, neboť $d(\mathcal{C}) = 2$ a $k = n - 1$, který není perfektní.

2. S LINEARITOU JE LÉPE

V této kapitole si uvědomíme, že lineární kódy umožňují snadné kódování i testování, zda je přijaté slovo kódové, díky generující a kontrolní matici. Pouhá záměna generující a kontrolní matice ozřejmí velmi užitečný koncept dualizace kódu.

Definice. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ se nazývá *lineární kód*, jde-li o podprostor vektorového prostoru \mathbb{F}^n nad tělesem \mathbb{F} .

T&N. Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ lineární kód délky n nad tělesem \mathbb{F}_q , $k = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{C})$ a $d = d(\mathcal{C})$, pak ho v závislosti na tom, které z hodnot známe, označujeme jako kód s parametry

$$[n, k], [n, k, d], [n, k]_q, [n, k, d]_q.$$

Pozorování. Jestliže je \mathcal{C} kód s parametry $[n, k, d]_q$, pak

- (1) $k = \log_q |\mathcal{C}| = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{C})$, a proto je nosnost \mathcal{C} rovna $\frac{k}{n}$,
- (2) $d(\mathcal{C}) = \min\{w(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}\}$, protože pro všechna kódová slova \mathbf{v}, \mathbf{w} platí, že $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$ a $w(\mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{0})$ a naopak $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathcal{C}$ a $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = w(\mathbf{v} - \mathbf{w})$.

T&N. Buď \mathcal{C} $[n, k]$ -kód a $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times n}$ a $\mathbf{H} \in \mathbb{F}^{(n-k) \times n}$, pak \mathbf{G} je *generující matice*

kódu \mathcal{C} , jestliže c_1, \dots, c_k je báze \mathcal{C} , a \mathbf{H} *kontrolní matice* kódu \mathcal{C} , pokud $\mathcal{C} = \text{Ker } \mathbf{H}$. Řekneme, že je generující matice lineárního kódu ve *standardním tvaru*, má-li formu $(\mathbf{I}_k | \mathbf{A}) \in \mathbb{F}^{k \times n}$.

Pozorování. Nechť $\mathbf{G} \in \mathbb{F}^{k \times n}$, $\mathbf{H} \in \mathbb{F}^{(n-k) \times n}$ a \mathcal{C} je $[n, k]$ -kód.

- (1) Buď \mathbf{G} generující matice \mathcal{C} . Pak \mathbf{H} je kontrolní matice kódu \mathcal{C} , právě když řádky \mathbf{H} tvoří bázi řešení soustavy $\mathbf{G}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$.
- (2) Buď \mathbf{H} kontrolní matice \mathcal{C} . Pak \mathbf{G} je generující matice kódu \mathcal{C} , právě když řádky \mathbf{G} tvoří bázi řešení soustavy $\mathbf{H}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$.
- (3) \mathbf{G} a \mathbf{H} jsou generující a kontrolní matice kódu \mathcal{C} , právě když $\text{rank } \mathbf{G} = k$, $\text{rank } \mathbf{H} = n - k$, $\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ a $\mathcal{C} = \text{Im } \mathbf{G}^T = \text{Ker } \mathbf{H}$.

Uvědomíme si, že generující matice ve standardním tvaru nám umožňují velmi snadno popsat kontrolní matici.

Poznámka 2.1. Je-li $(\mathbf{I}_k | \mathbf{A}) \in \mathbb{F}^{k \times n}$ generující matice $[n, k]$ -kódu, pak $(-\mathbf{A}^T | \mathbf{I}_{n-k})$ je jeho kontrolní matice.

Důkaz. Využijeme třetí bod pozorování ze začátku sekce, které říká, že stačí spočítat $\text{rank}((-\mathbf{A}^T | \mathbf{I}_{n-k})) = n - k$ a ověřit nulovost součinu

$$(-\mathbf{A}^T | \mathbf{I}_{n-k}) \cdot (\mathbf{I}_k | \mathbf{A})^T = (-\mathbf{A}^T | \mathbf{I}_{n-k}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{A}^T \end{pmatrix} = -\mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T = \mathbf{0},$$

kde jsme využili znalosti počítání s blokovými maticemi. □

T&N. Pro (blokové) kódy $\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{F}^n$ a permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\mathcal{C} \sim_\sigma \bar{\mathcal{C}}$, pokud $c_1 \dots c_n \in \mathcal{C} \Leftrightarrow c_{\sigma(1)} \dots c_{\sigma(n)} \in \bar{\mathcal{C}}$. Řekneme, že jsou kódy \mathcal{C} a $\bar{\mathcal{C}}$ *permutačně ekvivalentní* (prostřednictvím permutace σ) jestliže existuje $\sigma \in S_n$, pro niž $\mathcal{C} \sim_\sigma \bar{\mathcal{C}}$.

Pozorování. Nechť $\sigma \in S_n$, kódy $\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{F}^n$ jsou permutačně ekvivalentní prostřednictvím σ a definujme $\varphi_\sigma : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ předpisem $\varphi_\sigma(v) = v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(n)}$. Pak

- (1) $\varphi_\sigma : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ je izomorfismus vektorových prostorů, $\bar{\mathcal{C}} = \varphi_\sigma(\mathcal{C})$ a $|\mathcal{C}| = |\bar{\mathcal{C}}|$,
- (2) \mathcal{C} je lineární právě když je $\bar{\mathcal{C}}$ lineární,
- (3) pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ máme $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\varphi_\sigma(\mathbf{u}), \varphi_\sigma(\mathbf{v}))$ a proto $d(\mathcal{C}) = d(\bar{\mathcal{C}})$,
- (4) permutační ekvivalence tvoří ekvivalenci na kódech obsažených v \mathbb{F}^n , která zachovává vzdálenost i velikost kódu.

Následující tvrzení nám říká, že až na pořadí souřadnic lze každý lineární kód popsat pomocí generující matice ve standardním tvaru.

Poznámka 2.2. Je-li \mathcal{C} lineární kód, pak existuje generující matice ve standardním tvaru nějakého kódu, který je permutačně ekvivalentní k \mathcal{C} .

Důkaz. Nechť \mathbf{G} je generující matice $[n, k]$ -kódu \mathcal{C} . Posloupností elementárních úprav (obvykle nazývanou Gaussova-Jordanova eliminace) najdeme řádkově ekvivalentní, tedy

rovněž generující odstupňovanou matici $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_1^T | \dots | \mathbf{d}_n^T) \sim \mathbf{G}$ s bázovými sloupci $\mathbf{d}_{i_1}^T = \mathbf{e}_1^T, \dots, \mathbf{d}_{i_k}^T = \mathbf{e}_k^T$ tvořící kanonickou bázi prostoru \mathbb{F}^k . Vezmeme-li libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$ splňující $\sigma(j) = i_j$, pak dostáváme generující matici

$$\tilde{\mathbf{D}} = (\mathbf{d}_{\sigma(1)}^T | \mathbf{d}_{\sigma(2)}^T | \dots | \mathbf{d}_{\sigma(k)}^T \dots | \mathbf{d}_{\sigma(n)}^T) = (\mathbf{I}_k | \mathbf{d}_{\sigma(k+1)}^T \dots | \mathbf{d}_{\sigma(n)}^T),$$

kódu $\bar{\mathcal{C}}$ permutačně ekvivalentního \mathcal{C} , konkrétně platí, že $\mathcal{C} \sim_\sigma \bar{\mathcal{C}}$. \square

Pozorování. Nechť \mathbf{G} je generující a \mathbf{H} kontrolní matice $[n, k]$ -kódu \mathcal{C} a definujme zobrazení $c: \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$ předpisem $c(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{G}$.

- (1) c je prosté lineární zobrazení a $\mathcal{C} = c(\mathbb{F}^k)$,
- (2) je-li \mathbf{G} generující matice ve standardním tvaru, pak $c(\mathbf{v}) = (\mathbf{I}_k | \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} | \mathbf{v}\mathbf{A})$,
- (3) opraví-li \mathcal{C} r chyb a $E_r = \{\mathbf{e}\mathbf{H}^T \mid \mathbf{e} \in S(\mathbf{0}, r)\}$, pak pro každé $\mathbf{v} \in E_r$ existuje jediné $\mathbf{e} \in S(\mathbf{0}, r)$ pro něž $\mathbf{e}\mathbf{H}^T = \mathbf{v}$, a pokud $\mathbf{u}\mathbf{H}^T = \mathbf{e}\mathbf{H}^T$, pak $\mathbf{u} - \mathbf{e} \in \mathcal{C}$.

Zobrazení c z bodu (1) je prosté (dokonce prefixové) *kódování* zdroje \mathbb{F}^k a kódování maticí ve standardním tvaru z bodu (2) se říká *systematické* kódování. Hodnota $\mathbf{u}\mathbf{H}^T$ využívaná v bodu (3) se obvykle nazývá *syndrom* slova \mathbf{u} a nalezení chyby ze syndromu pomocí vhodného algoritmu bývá klíčové pro efektivní dekódování.

Věta 2.3. Je-li \mathcal{C} $[n, k, d]$ -kód s kontrolní maticí \mathbf{H} a r je největší hodnota, pro niž je každých r sloupců \mathbf{H} lineárně nezávislých, pak $d = r + 1$.

Důkaz. Nejprve uvažíme, že $r = 0$, právě když existuje i , pro něž je i -tý sloupec \mathbf{H} nulový, což je ekvivalentní podmínce, že existuje i , pro které $\mathbf{H}\mathbf{e}_i^T = \mathbf{0}^T$ a to nastává právě tehdy, když existuje i , pro které $\mathbf{e}_i \in \mathcal{C}$. Protože je poslední podmínka ekvivalentní tomu, že $d(\mathcal{C}) = 1$, máme tvrzení pro $r = 0$ dokázané.

Nyní si všimněme, že $r = n$, právě když \mathbf{H} je regulární čtvercová matice, což nastává, právě když $d(\mathcal{C}) = d(\{\mathbf{0}\}) = n + 1$.

Konečně nechť $0 < r < n$ a $d(\mathcal{C}) = d$. Potom existuje $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, pro které $w(\mathbf{u}) = d$, tedy $\mathbf{H}\mathbf{u}^T = \mathbf{0}^T$, z čehož plyne, že máme d lineárně závislých sloupců matice \mathbf{H} . Odtud vidíme, že $r \leq d - 1$. Naopak z maximality r plyne, že $\exists \mathbf{v}$, pro které $w(\mathbf{v}) = r + 1$ a $\mathbf{H}\mathbf{v}^T = \mathbf{0}^T$. To znamená, že $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ a $d \leq w(\mathbf{v}) = r + 1$, čímž jsme ověřili, že $d = r + 1$. \square

Nyní sestrojíme perfektní lineární kód, který není MDS.

Příklad 2.4 (Hammingův perfektní kód délky 7). Definujme binární kód \mathcal{H} s kontrolní

maticí $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Spočítáme $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ generu-

ující matici ve standardním tvaru, všimněme si, že jsou ve sloupcích v binárním zápisu umístěny hodnoty 1 až 7. Protože jsou tudíž každé dva sloupce \mathbf{H} různé, jsou nad \mathbb{F}_2 lineárně nezávislé. Naopak, například první tři sloupce \mathbf{H} už jsou lineárně závislé, proto podle věty 2.3 platí, že $d(\mathcal{H}) = 3$, a kód podle poznámky 1.2 opraví právě jednu chybu. Snadno spočítáme

$$V_2(7, 1) = 1 + \binom{7}{1} = 8 = 2^{7-4},$$

tedy se jedná o 1-perfektní kód, který ovšem není MDS, neboť $3 < 7 - 4 + 1$.

Algebraické konstrukce

3. CO VŠECHNO PŘEŽIJÍ MDS-KÓDY

V této kapitole budeme zkoumat elementárních vlastností třídy lineárních kódů, které jsou nejlepší možné z hlediska Singletonova odhadu. Nejprve zavedeme obecný koncept duálního kódu a ověříme, že je třída MDS kódů na dualizaci uzavřena. Dále ukážeme, že i výsledkem propíchnutí MDS kódu v omezeném počtu souřadnic je opět MDS kód.

T&N. Bilineární formě \cdot na vektorovém prostoru \mathbb{F}^n nad tělesem \mathbb{F} dané vztahem $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ budeme říkat *bodový součin*. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je kód. Pak $\mathcal{C}^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} \forall \mathbf{d} \in \mathcal{C}\}$ nazývá *duální kód* ke kódu \mathcal{C} . Kód \mathcal{C} se nazývá *samoortogonální*, pokud $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^\perp$ a \mathcal{C} je *samoduální*, pokud $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$.

Pozorování. Nechť $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{F}^n$.

- (1) bodový součin \cdot je regulární symetrická bilineární forma,
- (2) $\mathcal{C}^\perp = (\text{LO } \mathcal{C})^\perp$ je lineární kód, tedy samoduální kód je vždy lineární
- (3) $\mathcal{C} \subseteq \text{LO } \mathcal{C} = (\mathcal{C}^\perp)^\perp$ a je-li \mathcal{C} lineární, pak $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^\perp)^\perp$,
- (4) pokud $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, pak $\mathcal{D}^\perp \subseteq \mathcal{C}^\perp$.

Poznámka 3.1. Buď \mathcal{C} $[n, k]$ -kód, $\mathbf{G} \in \mathbb{F}^{k \times n}$ a $\mathbf{H} \in \mathbb{F}^{(n-k) \times n}$.

- (1) \mathbf{G} je generující matice \mathcal{C} , právě když je \mathbf{G} kontrolní matice \mathcal{C}^\perp ,
- (2) \mathbf{H} je generující matice \mathcal{C}^\perp , právě když je \mathbf{H} kontrolní matice \mathcal{C} ,
- (3) \mathcal{C}^\perp je $[n, n - k]$ -kód,
- (4) je-li \mathbf{G} je generující matice, pak
 - (a) \mathcal{C} je samoduální, právě když \mathbf{G} je kontrolní matice \mathcal{C} .
 - (b) \mathcal{C} je samoortogonální, právě když $\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{0}$,

Důkaz. (1) Všimneme si, že podle předchozího je \mathbf{G} generující matice právě tehdy, když $\text{Ker } \mathbf{G} = \mathcal{C}^\perp$, což je ekvivalentní tomu, že \mathbf{G} kontrolní matice \mathcal{C}^\perp .

(2) Protože $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^\perp)^\perp$, je podle (1) je \mathbf{H} generující matice \mathcal{C}^\perp , právě když je \mathbf{H} kontrolní matice $(\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}$.

(3) Plyne okamžitě z (1) a lineárně algebraického faktu, že dimenze řešení homofenní soustavy rovnic s maticí \mathbf{G} hodnoti k je právě $n - k$.

(4) Platnost (a) plyne okamžitě z (2), (b) plyne z pozorování, že $\mathcal{C} \subseteq \text{Ker } \mathbf{G}$, právě když $\mathbf{G}\mathbf{u}^T = \mathbf{0}$ pro každý řádek \mathbf{u} matice \mathbf{G} . \square

Připomeňme, že pro $[n, k, d]$ -kód vždy platí $d \leq n - k + 1$ a tento kód je MDS, právě když $d = n - k + 1$. Začneme formulací důsledku věty 2.3.

Poznámka 3.2. Buď \mathcal{C} $[n, k, d]$ -kód s kontrolní maticí \mathbf{H} . Pak je ekvivalentní:

- (1) \mathcal{C} je MDS,
- (2) každých $n - k$ sloupců \mathbf{H} je lineárně nezávislých,
- (3) každá čtvercová matice, která vznikne z \mathbf{H} vypuštěním k sloupců je regulární.

Důkaz. (1) \Rightarrow (2) \mathcal{C} je MDS znamená, že $d - 1 = n - k$, proto (2) plyne z 2.3.

(2) \Rightarrow (1) Z 1.4 plyne, že $d \leq n - k + 1$ a z 2.3 plyne, že $d \geq n - k + 1$, proto je \mathcal{C} MDS.

(2) \Leftrightarrow (3) To, že je čtvercová matice regulární, právě když jsou její sloupce lineárně nezávislé, víme z lineární algebry. \square

Poznamenejme, že použijeme-li 3.1 na předchozí tvrzení, dostáváme pro $[n, k]$ -kód s generující maticí \mathbf{G} , že je jeho duál MDS, právě když každá čtvercová matice, která vznikne z \mathbf{G} vypuštěním $n - k$ sloupců, je regulární.

Věta 3.3. Lineární kód \mathcal{C} je MDS, právě když \mathcal{C}^\perp je MDS.

Důkaz. Protože $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^\perp)^\perp$, stačí dokázat (například) jen zpětnou implikaci, platí-li totiž zpětná implikace, pak přímou obdržíme jejím použitím na duální kód \mathcal{C}^\perp . Zjevně jsou přitom triviální a totální kód vzájemně duální MDS kódy, proto se budeme zabývat jen netriviálními a netotálními kódy \mathcal{C} .

Zpětnou implikaci dokažme nepřímou, tedy budeme předpokládat, že \mathcal{C} je $[n, k, d]$ -kód, který není MDS. Pak $d < n - k + 1$, tudíž $d \leq n - k$. Protože existuje $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tak, že $0 < w(\mathbf{v}) \leq n - k$, vidíme, že $|\{i \mid v_i = 0\}| = n - w(\mathbf{v}) \geq k$. Z lineární algebry víme, že existuje báze \mathcal{C} obsahující vektor \mathbf{v} , a proto existuje generující matice \mathbf{G} , jejíž první řádek tvoří slovo \mathbf{v} . Podle 3.1 je \mathbf{G} kontrolní maticí kódu \mathcal{C}^\perp , jejíž alespoň k sloupců má první souřadnici nulovou. Uvážíme-li tedy čtvercovou matici tvořenou k takovými sloupci, je její první řádek nulový a tudíž se jedná o singulární matici. Z poznámky 3.2 potom plyne, že \mathcal{C}^\perp není MDS. \square

Díky 3.1 tedy můžeme testovat to, zda je kód MDS i pomocí jeho generující matice:

Důsledek 3.4. Buď \mathbf{G} generující matice $[n, k]$ -kódu \mathcal{C} . Pak \mathcal{C} je MDS (tedy $[n, k, n - k + 1]$ -kód), právě když je každých k sloupců \mathbf{G} lineárně nezávislých.

Nyní zavedeme ještě jedno přirozené lineární zobrazení kódů, o němž předchozí důsledek ukáže, že zachovává vlastnost kódu být MDS.

T&N. Nechť $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ a $I = \{i_1, \dots, i_r\}$. Označme $\pi_I : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^{n-r}$ zobrazení, kde $\pi_I(\mathbf{u})$ vznikne z \mathbf{u} vynecháním všech souřadnic i_1, \dots, i_r a $\pi_i = \pi_{\{i\}}$. Zobrazení π_I se nazývá *propíchnutí* a $\pi_I(\mathcal{C})$ je pro každé $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ *propíchnutý* kód v souřadnicích I .

Pozorování. Pro r přirozené, $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, $i \in \{1, \dots, n\}$ a $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ platí:

- (1) $\pi_I = \pi_{i_1} \dots \pi_{i_r}$ je lineární zobrazení,
- (2) propíchnutý kód lineárního kódu je lineární,
- (3) je-li \mathcal{C} $[n, k, d]$ -kód pro $d > 1$, pak $\pi_i(\mathcal{C})$ je buď $[n - 1, k, d]$ -kód nebo $[n - 1, k, d - 1]$ -kód.

Důsledek 3.5. Buď \mathcal{C} MDS $[n, k, n - k + 1]$ -kód a nechť platí, že $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ a $r = |I| \leq n - k$. Pak $\pi_I(\mathcal{C})$ je MDS $[n - r, k, n - r - k + 1]$ -kód.

Důkaz. Nechť $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \dots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix}$ je generující matice kódu \mathcal{C} . Pak je $G_I = \begin{pmatrix} \pi_I(\mathbf{c}_1) \\ \dots \\ \pi_I(\mathbf{c}_k) \end{pmatrix}$ generující matice kódu $\pi_I(\mathcal{C})$, neboť $r = |I| \leq n - k$, $k \leq n - r$ a matice G_I má tudíž hodnost rovnou k . Potom z 3.4 plyne, že každých k sloupců G , a tudíž i G_I je lineárně nezávislých. Naopak obrácená implikace důsledku 3.4 nám říká, že je kód $\pi_I(\mathcal{C})$ je MDS. \square

Nyní zkonstruujeme velmi důležitou třídu příkladů MDS kódů, již se budeme podrobněji zabývat v 7. sekci.

Příklad 3.6. Nechtě $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ jsou po dvou různé prvky, $k < n$, položme $\alpha =$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \text{ dále } \mathbf{H}_{k,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_n^{k-1} \end{pmatrix} \text{ a } \mathcal{C}_{k,\alpha} = \ker \mathbf{H}_{k,\alpha}. \text{ Potom tvoří}$$

každých k sloupců této matice regulární (Vandermondovu) matici, kterou známe z lineární algebry, a proto jsou $\mathcal{C}_{k,\alpha}$ i $\mathcal{C}_{k,\alpha}^\perp$ MDS-kódy.

Na závěr si prohlédneme příklad samoduálního kódu, jehož propíchnutí nám dá perfektní kód.

Příklad 3.7. Je-li $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ generující matice $[8, 4]_2$ -kódu \mathcal{C} ve

standardním tvaru, vidíme, že $\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{0}$, jde o samoduální kód. Protože žádný sloupec matice \mathbf{G} není nulový, každé dva jsou různé, součet každých tří má lichou váhu, tedy není nula a součet prvních tří sloupců dá právě poslední sloupec, plyne z 2.3, že $d(\mathcal{C}) = 4$, proto je \mathcal{C} $[8, 4, 4]_2$ -kód.

Všimněme si, že propíchnutí $\pi_8(\mathcal{C})$ je právě Hammingův 1-perfektní $[7, 4, 3]_2$ -kód z 2.4

s generující maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. CO UŽ ANI MDS-KÓDY NEPŘEŽIJÍ

Tentokrát si pro MDS kódy rozmyslíme, že vzdálenost použitelných konstrukcí je shora omezena řádem tělesa, což se ukazuje jako velmi nepříjemné omezení pro existenci MDS kódů nad malými tělesy. Proto zavedeme pojem reziduálního kódu, který nám umožní některé vlastnosti MDS kódů vybudovaných nad velkým tělesem převést do kódů nad jejich podtělesy.

Kapitolu zahájíme důkazem tvrzení, které ozřejmí vztah mezi existencí lineárních MDS-kódů a velikostí tělesa \mathbb{F} . Ukazuje se, že předpoklad konstrukce příkladu 3.6 na dostatečnou velikost použitého tělesa nebyl náhodný. Nejprve ovšem vyslovíme drobné lineárně algebraické pozorování.

Pozorování. Nechtě $0 < i < j \leq k$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$, $b_i \neq 0 \neq b_j$, Jestliže $\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j}$, pak je množina vektorů $\{\mathbf{e}_s \in \mathbb{F}^k \mid s : i \neq s \neq j\} \cup \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ lineárně závislá, neboť se jedná o řádkové vektory matice $\mathbf{I}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, kterou dostaneme z jednotkové nahrazením i -tého řádku slovem \mathbf{a} a j -tého řádku slovem \mathbf{b} a jejíž determinant je $\det \mathbf{I}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = a_i b_j - a_j b_i = 0$.

Věta 4.1. Jestliže je $[n, k, d]_q$ -kód MDS a $3 \leq d \leq n - 1$, pak $n - q < k < q$ a $d \leq q$.

Důkaz. Nechť \mathcal{C} je $[n, k, d]_q$ -kód, který je MDS, tedy $d = n - k + 1$. Pak podle 3.3 je duální kód \mathcal{C}^\perp MDS $[n, n - k, d']_q$, kde

$$d' = n - (n - k) + 1 = k + 1 = n - d + 2,$$

což také znamená, že $d = n - d' + 2$. Dosadíme-li vyjádření d do předpokladu $3 \leq d \leq n - 1$ dostáváme nerovnosti

$$3 \leq n - d' + 2 \leq n - 1,$$

které upravíme odečtením $n + 2$ na

$$1 - n \leq -d' \leq -3$$

a následně přenásobením hodnotou -1 na

$$3 \leq d' \leq n - 1.$$

Ověřili jsme, že pro d i d' platí stejné předpoklady a dokázané tvrzení pro kód \mathcal{C} bude platit i pro duální kód \mathcal{C}^\perp , který je podle 3.3 rovněž MDS-kód.

Protože parametry kódu nezávisí na pořadí souřadnic, můžeme díky 2.2 bez újmy na obecnosti předpokládat, že existuje generující matice kódu \mathcal{C} ve standardním tvaru $(\mathbf{I}_k | \mathbf{A})$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{F}_q^{k \times n-k}$. Protože $d \geq 3$, máme $n - k = d - 1 \geq 2$, tedy \mathbf{A} má aspoň dva sloupce.

Uvědomme si, že všechny hodnoty \mathbf{A} jsou nenulové. Kdyby $a_{ij} = 0$, pak by j -tý sloupec matice \mathbf{A} byl lineární kombinací prvních k sloupců matice $(\mathbf{I}_k | \mathbf{A})$ s výjimkou i -tého, což je ve sporu s 3.4. Protože jsou podle 3.4 první dva sloupce matice \mathbf{A} a každých $k - 2$ sloupců jednotkové matice lineárně nezávislé, plyne z předchozího pozorování, že $\forall i \neq j$ $\frac{a_{i1}}{a_{i2}} \neq \frac{a_{j1}}{a_{j2}}$, tedy

$$k = |\{\frac{a_{i1}}{a_{i2}} \in \mathbb{F}_q^* \mid i = 1, \dots, k\}| \leq |\mathbb{F}_q^*| \leq q - 1.$$

Odtud okamžitě dostáváme nerovnost $k < q$ a duálně pro MDS kód \mathcal{C}^\perp máme $n - k < q$, a proto $k > n - q$. Z předposlední nerovnosti konečně plyne $d = n + 1 - k \leq q$. \square

Příklad 4.2. (1) Dvoupřvkový kód $\{0, 1 \dots 1\}$ je pro $k \geq 1$ a $n > 2$ jediný binární lineární MDS kód s parametry $[n, k, n - k + 1]_2$, který opraví 1 chybu, tedy $d \geq 3$. Kdyby totiž platilo $d < n$, pak by z 4.1 plynulo, že $3 \leq d \leq q = 2$, tedy spor, a proto $n - k + 1 = d = n$, a proto $k = 1$.

(2) Je-li $[n, k, d]_q$ MDS-kód, který opraví 1 chybu a $k > 1$, pak $3 \leq d \leq n - 1$, a proto z Věty 4.1 dostáváme omezení parametrů $n \leq 2q - 2$, $k \leq q - 1$ a $D \leq q$.

Definice. Nechť $r \in \mathbb{N}$, \mathbb{F}_q je podtěleso \mathbb{F}_{q^r} a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_{q^r}^n$. Pak $\mathcal{C} \cap \mathbb{F}_q^n$ se nazývá q -ární reziduální kód kódu \mathcal{C} .

Pozorování. Nechť $r \in \mathbb{N}$, \mathbb{F}_q je podtěleso \mathbb{F}_{q^r} a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_{q^r}^n$ je lineární kód.

- (1) \mathbb{F}_{q^r} je vektorový prostor dimenze r nad tělesem \mathbb{F}_q .
- (2) Nechť $B \subset \mathbb{F}_q^n \subset \mathbb{F}_{q^r}^n$. Pak B je lineárně nezávislá nad \mathbb{F}_q , právě když je lineárně nezávislá nad \mathbb{F}_{q^r} . Zatímco zpětná implikace je triviální, je pro důkaz přímé implikace třeba zvolit $(\beta_i)_{i \leq r}$ bázi \mathbb{F}_{q^r} nad \mathbb{F}_q a lineární kombinaci napsat vzhledem k $(\beta_i)_{i \leq r}$.
- (3) $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathbb{F}_q^n$ je q -ární lineární kód a $\dim_{\mathbb{F}_q} \tilde{\mathcal{C}} \leq \dim_{\mathbb{F}_{q^r}} \mathcal{C}$.

Na závěr se podíváme na vztah vzdálenosti a dimenze reziduálních kódů vytvořených z MDS kódů.

Věta 4.3 (o kódech se zaručenou vzdáleností). Je-li $\mathcal{C} [n, l, D]_{q^r}$ kód, který je MDS, a $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathbb{F}_q^n$ je $[n, k, d]_q$ kód, pak $k \geq n - r(D - 1)$ a $d \geq D \geq \frac{n-k}{r} + 1$.

Důkaz. Protože je \mathcal{C} MDS a proto platí, že $D = n - l + 1$, dostáváme rovnost $n - l = D - 1$. Dokážeme-li nerovnost $n - k \leq r(n - l)$, snadno z ní odvodíme obě nerovnosti $k \geq n - r(D - 1)$ i $d \geq D \geq \frac{n-k}{r} + 1$.

Všimněme si, že $n - k$ je právě počet řádků (libovolné) kontrolní matice kódu $\tilde{\mathcal{C}}$ a zvolíme nějakou kontrolní matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \dots \\ \mathbf{h}_{n-l} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_{q^r}^{(n-l) \times n}$ kódu \mathcal{C} s řádky \mathbf{h}_i . Označíme

β_1, \dots, β_r nějakou bázi \mathbb{F}_{q^r} nad \mathbb{F}_q a uvážíme, že existuje posloupnost vektorů $\mathbf{a}_{ji} \in \mathbb{F}_q^n$ pro všechna $i = 1, \dots, n - l$ a $j = 1, \dots, r$ splňující $\mathbf{h}_i = \sum_{j=1}^r \beta_j \mathbf{a}_{ji}$. Nyní definujeme matice

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1i} \\ \dots \\ \mathbf{a}_{ri} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_q^{r \times n} \quad \text{a} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \dots \\ \mathbf{A}_{n-l} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_q^{(n-l)r \times n}.$$

Nyní platí, že $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{C}}$, právě když $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ a $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n$. Zvolíme-li si tedy libovolné slovo $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n$, pak $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{C}}$, právě když $\mathbf{u}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$, což nastává, právě když $\mathbf{u}\tilde{\mathbf{H}}^T = \mathbf{0}$. Proto $\tilde{\mathcal{C}} = \text{Ker}\tilde{\mathbf{H}}$ a počet řádků kontrolní matice kódu $\tilde{\mathcal{C}}$ je roven $\text{rank}\tilde{\mathbf{H}} \leq (n - l)r$, což je počet řádků $\tilde{\mathbf{H}}$. Dokázali jsme, že $n - k \leq (n - l)r$. \square

Poté, co jsme si v pozorování všimli, že dimenze reziduálního kódu je shora omezena dimenzí původního kódu, si na jednoduchém příkladu uvědomíme, že nic víc o dimenzi binárního reziduálního kódu obecně říci nemůžeme.

Příklad 4.4. Nechť $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \beta\}$, kde $\alpha\beta = 1 = \alpha + \beta$. Uvažujme reziduální binární kódy kvaternárních kódů dimenze 2. Potom

- (1) $\text{LO}(10\alpha 0, 010\beta) \cap \mathbb{F}_2^4 = \{0000\}$ a reziduální kód má dimenzi 0,
- (2) $\text{LO}(10\alpha 0, 01\beta 0) \cap \mathbb{F}_2^4 = \text{LO}(1110)$ a reziduální kód má dimenzi 1,
- (3) $\text{LO}(\beta\alpha 1\beta, \alpha\beta 1\alpha) \cap \mathbb{F}_2^4 = \text{LO}(1101, 1011)$ a reziduální kód má dimenzi 2.

5. ROZKLÁDÁME POLYNOMY

V této kapitole budeme aplikovat některé výsledky Galoisovy teorie na případ konečných těles. Především nás budou s ohledem na důležitou strukturu cyklických kódů, kterou se budeme zabývat v následující kapitole, zajímat ireducibilní rozklady polynomů $x^n - 1$. Nejdůležitějším nástrojem pro tento úkol budou cyklotomické polynomy, o nichž dokážeme, že na rozdíl od celočíselných cyklotomických polynomů, důležitých v teorii čísel, nemusí být ireducibilní.

\mathbb{F} v celé kapitole značí konečné těleso (prvočíselné) charakteristiky p , čísla n a k jsou přirozená. Nejprve shrneme popis konečných těles, který jsme zčásti odvodili a zčásti

připomněli na základě znalostí z přednášky Algebra. Ve loňské verzi skript z Algebry Davida Stanovského najdete uvedené výsledky v sekcích 24.2 a 16.2.

Fakt 5.1. Pro konečné těleso \mathbb{F} (prvočíselné) charakteristiky p a přirozené číslo q platí:

- (1) Těleso \mathbb{F} řádu q existuje, právě když existuje n , pro něž $q = p^n$,
- (2) jestliže $p^n = |\mathbb{F}|$ pak je \mathbb{F} izomorfní rozkladovému nadtělesu polynomu $x^{p^n} - x$ nad \mathbb{F}_p a $x^{p^n} - x = \prod_{a \in \mathbb{F}} (x - a)$,
- (3) pro každé k existuje ireducibilní polynom m stupně k nad tělesem \mathbb{F}_p , a pro každý takový polynom platí, že $\mathbb{F}_p[x]/(m) \cong \mathbb{F}_{p^k}$ a že $m \mid x^{p^n} - x$,
- (4) \mathbb{F}_q^* je cyklická grupa a pro každé $k \mid (q - 1)$ existuje jediná podgrupa \mathbb{F}_q^* řádu k .

T&N. Až na izomorfismus jednoznačně určené těleso o p^n prvcích se značí \mathbb{F}_{p^n} a obvykle se nazývá *Galoisovo* těleso řádu p^n . Zobrazení $f_{p^k} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ určená předpisem $f_{p^k}(a) = a^{p^k}$ budeme nazývat *Frobeniovy endomorfismy*.

Pozorování. Uvažujme-li $P = \langle 1 \rangle$ podgrupu \mathbb{F} generovanou prvkem 1 a $U_k := \{t \in \mathbb{F} \mid f_{p^k}(t) = t\}$ pro k přirozené, platí:

- (1) f_p je automorfismus a $f_{p^k} = f_{p^{k-1}} \circ f_p$,
- (2) $P \subseteq U_k$ jsou podtělesa tělesa \mathbb{F} a $U_1 = P \cong \mathbb{Z}_p$,
- (3) f_{p^k} je U_k -automorfismus tělesa \mathbb{F} .

T&N. Podtělesu P tělesa \mathbb{F} z pozorování se říká *prvotěleso* tělesa \mathbb{F} .

Poznámka 5.2. Nechť p je prvočíslo, k, n, r přirozená čísla, $q = p^r$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (1) $k \mid n$ v oboru \mathbb{Z} ,
- (2) $(p^k - 1) \mid (p^n - 1)$ v oboru \mathbb{Z} ,
- (3) $(q^k - 1) \mid (q^n - 1)$ v oboru \mathbb{Z} ,
- (4) $(x^{q^k} - x) \mid (x^{q^n} - x)$ v oboru $\mathbb{F}[x]$.

Důkaz. (1) \Rightarrow (2) Jestliže $n = kd$, snadno spočítáme, že $p^n - 1 = (p^k - 1) \sum_{i=0}^{d-1} p^{ik}$.
(2) \Rightarrow (1) Nechť $(p^k - 1) \mid (p^n - 1)$ a $n = kd + r$, kde $0 \leq r < k$. Víme, že

$$p^{kd} - 1 = (p^k - 1) \sum_{i=0}^{d-1} p^{ik}, \quad \text{tedy } (p^k - 1) \mid ((p^n - 1) - p^r(p^{kd} - 1)).$$

Protože $(p^n - 1) - p^r(p^{kd} - 1) = p^r - 1$, máme $(p^k - 1) \mid (p^r - 1)$. Ovšem $r < k$, proto $r = 0$.

(1) \Leftrightarrow (3) Stačí uvážit, že $k \mid n \Leftrightarrow rk \mid rn$ a to je dle dokázané ekvivalence ekvivalentní tvrzení $(q^k - 1) \mid (p^{rk} - 1) \mid (p^{rn} - 1) = (q^n - 1)$.

(3) \Rightarrow (4) Použijeme obdobný argument jako v důkazu (1) \Leftrightarrow (2), je-li totiž $(q^n - 1) = s(q^k - 1)$, pak $(x^{q^n} - x) = x(x^{q^k-1} - 1) \sum_{i=0}^{s-1} x^{i(q^k-1)}$, což dokazuje (4) za předpokladu, že platí (3)

(4) \Rightarrow (3) Obdobně, pokud $(x^{q^k-1} - 1) \mid (x^{q^n-1} - 1)$ a vydělíme-li se zbytkem $q^n - 1 = s(q^k - 1) + r$, pak i $(x^{q^k-1} - 1)$ dělí $(x^{q^n-1} - 1) - x^r(x^{s(q^k-1)} - 1) = x^r - 1$, odkud opět kvůli argumentu $r < q^k - 1$ dostáváme, že $r = 0$, a proto $(q^k - 1) \mid (q^n - 1)$. \square

Poznámka 5.3. Necht q je přirozené číslo. Pak existuje podtěleso tělesa \mathbb{F}_{p^n} o q prvcích, právě když existuje $k \mid n$, pro které $q = p^k$. Podtěleso dané velikosti je určeno jednoznačně.

Důkaz. (\Rightarrow) Víme, že podtěleso U řádu q má charakteristiku p , proto podle 5.1(2) existuje $k \geq 1$, pro něž $q = p^k$. Z Lagrangeovy věty použité pro $U^* \leq \mathbb{F}_{p^n}^*$ plyne, že $(p^k - 1) \mid (p^n - 1)$, tudíž $k \mid n$ díky 5.2.

(\Leftarrow) Podle 5.1(2) jsou všechny prvky \mathbb{F}_{p^n} kořeny polynomu $x^{p^n} - x$ a $k \mid n$, tudíž podle 5.2 $(x^{p^k} - x) \mid (x^{p^n} - x)$ a $U_k = \{t \in \mathbb{F}_{p^n} \mid f_{p^k}(t) = t\}$ je podtěleso složené právě z p^k kořenů polynomu $x^{p^k} - x$. Tedy U_k je hledané podtěleso řádu p^k .

Jednoznačnost existence podtělesa řádu p^k plyne za faktu 5.1(1), že nutně sestává právě ze všech kořenů polynomu $x^{p^k} - x$. \square

Nyní si uvědomíme, že $x^{q^n} - x$ poskytuje všechny ireducibilní polynomy stupně n nad tělesem řádu q .

Věta 5.4. Je-li $m \in \mathbb{F}_q[x]$ ireducibilní polynom stupně k , pak m dělí $x^{q^n} - x$ právě tehdy, když k dělí n .

Důkaz. Poznamenejme, že existuje přirozené s , pro něž $q = p^s$, a že můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je m monický polynom.

(\Rightarrow) Protože m dělí $x^{q^n} - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_{q^n}} (x - a)$, existuje díky 5.1(2) prvek $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$, které je kořenem m , a protože je m ireducibilní monický polynom, jedná se právě minimální polynom prvku α nad tělesem \mathbb{F}_q . Proto

$$[\mathbb{F}_q(\alpha) : \mathbb{F}_q] = \deg(m) = k,$$

tedy $|\mathbb{F}_q(\alpha)| = q^k = p^{ks}$. Podle 5.3 tak dostáváme, že $ks \mid ns$ a tudíž $k \mid n$.

(\Leftarrow) Známa konstrukce nám říká, že $\mathbb{F}_q[x]/(m)$ tvoří kořenové nadtěleso polynomu m nad tělesem \mathbb{F}_q řádu q^k . To je podle 5.1(3) izomorfní rozkladovému nadtělesu polynomu $x^{q^k} - x$ nad tělesem \mathbb{F}_p a tudíž i nad tělesem \mathbb{F}_q , které je podle 5.3 obsaženo v \mathbb{F}_{q^k} . Protože existuje společný kořen $\alpha \in \mathbb{F}_{q^k}$ polynomů m a $x^{q^k} - x$, je polynom m opět minimální polynom prvku α nad \mathbb{F}_q , a tedy platí, že $m \mid x^{q^k} - x$. Konečně díky 5.2 $(x^{q^k} - x) \mid (x^{q^n} - x)$, a proto $m \mid (x^{q^n} - x)$. \square

Protože neasociované ireducibilní faktory mají různé kořeny a $x^{q^n} - x$ má všechny kořeny jednoduché, plyne z předchozí věty důležité tvrzení:

Důsledek 5.5. Polynom $x^{q^n} - x$ je právě součinem všech monických ireducibilních polynomů stupně $k \mid n$ v oboru $\mathbb{F}_q[x]$.

T&N. Symbolem $\mathbb{F}_{(n)}$ budeme značit rozkladové nadtěleso polynomu $x^n - 1$ nad tělesem \mathbb{F} a $\mathbb{E}_{(n)} = \{\alpha \in \mathbb{F}_{(n)} \mid \alpha^n = 1\}$.

Pozorování. Necht $k > 0$.

- (1) $\mathbb{E}_{(n)}$ je podgrupa $\mathbb{F}_{(n)}^*$, tedy cyklická grupa,
- (2) pokud p nedělí n , pak $x^n - 1$ má v $\mathbb{F}_{(n)}$ právě n jednoduchých kořenů, $|\mathbb{E}_{(n)}| = n$ a $x^n - 1 = \prod_{\alpha \in \mathbb{E}_{(n)}} (x - \alpha)$,
- (3) pokud $n = p^k \cdot m$ a p nedělí m , pak $x^n - 1 = (x^m - 1)^{p^k}$ má v $\mathbb{F}_{(n)}$ právě m kořenů násobnosti p^k , $|\mathbb{E}_{(n)}| = m$ a $x^n - 1 = \prod_{\alpha \in \mathbb{E}_{(n)}} (x - \alpha)^{p^k}$.

Definice. Označme $\mathbb{P}_{(n)}$ množinu všech generátorů grupy $\mathbb{E}_{(n)}$. Pokud charakteristika tělesa nedělí n , budeme prvkům $\mathbb{P}_{(n)}$ říkat *primitivní n -té odmocniny z jedné* a polynomu $Q_n = \prod_{\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}} (x - \alpha) \in \mathbb{F}_{(n)}[x]$ *n -tý cyklotomický polynom*.

Připomeňme, že symbol φ značí Eulerovu funkci, tedy zobrazení dané například vztahem $\varphi = |\mathbb{Z}_n^*|$

Pozorování. Nechť \mathbb{F} je těleso charakteristiky p a nechť p nedělí n .

- (1) $\mathbb{E}_{(n)} = \bigcup_{k|n} \mathbb{P}_{(k)}$ a sjednocení je disjunktní,
- (2) $\deg(Q_n) = |\mathbb{P}_{(n)}| = \varphi(n)$,
- (3) pokud $\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}$, pak $\mathbb{F}_{(n)} = \mathbb{F}(\alpha)$.

Věta 5.6. Nechť $q = p^r = |\mathbb{F}|$, charakteristika p nedělí n , \mathbb{F}_p je prvotěleso tělesa \mathbb{F} a d značí řád prvku $(q) \bmod n$ v grupě \mathbb{Z}_n^* (tj. nejmenší kladné d , pro něž $q^d \equiv 1 \pmod{n}$). Potom

- (1) $x^n - 1 = \prod_{k|n} Q_k$,
- (2) $Q_n \in \mathbb{F}_p[x]$,
- (3) Q_n se rozkládá nad tělesem \mathbb{F} na právě $\frac{\varphi(n)}{d}$ ireducibilních polynomů stupně $d = [\mathbb{F}_{(n)} : \mathbb{F}]$.

Důkaz. (1) Protože $\mathbb{E}_{(n)}$ tvoří cyklickou grupu řádu n dostáváme $x^n - 1 = \prod_{\alpha \in \mathbb{E}_n} (x - \alpha) = \prod_{k|n} Q_k$ přímo z definice a pozorování (1).

(2) Indukcí podle n nesoudělného s p nahlédneme, že $Q_n \in \mathbb{F}_p[x]$. Pro $n = 1$ tvrzení platí a nyní předpokládejme, že pro všechna $k < n$, pro něž $k | n$, platí $Q_k \in \mathbb{F}_p[x]$. Potom podle (1)

$$Q_n = \frac{x^n - 1}{\prod_{k|n, k < n} Q_k} \in \mathbb{F}_p[x],$$

neboť výsledek dělení (s nulovým zbytkem) má koeficienty opět v prvotělese \mathbb{F}_p .

(3) Uvažme prvek $\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}$. Potom si díky Lagrangeově větě uvědomíme platnost ekvivalencí

$$\alpha \in \mathbb{F}_{q^k}^* \Leftrightarrow \alpha^{q^k - 1} = 1 \Leftrightarrow n | q^k - 1 \Leftrightarrow q^k \equiv 1 \pmod{n}.$$

Protože je d řád prvku $(q) \bmod n$ v grupě \mathbb{Z}_n^* , dostáváme podle předchozího pozorování, že $\alpha \in \mathbb{F}_{q^d}$ a $\alpha \notin \mathbb{F}_{q^i}$ pro všechna $i < d$, která zároveň dělí d . Tudíž $\mathbb{F}_{q^d} = \mathbb{F}_q(\alpha)$ podle 5.3. Je-li nyní m libovolný monický ireducibilní faktor Q_n nad \mathbb{F}_q , existuje $\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}$, pro které $m(\alpha) = 0$, tedy jde o minimální polynom α nad \mathbb{F}_q a podle známého tvrzení z algebry

$$\deg(m) = [\mathbb{F}_q(\alpha) : \mathbb{F}_q] = [\mathbb{F}_{q^d} : \mathbb{F}_q] = d.$$

Konečně počet takových polynomů plyne z faktu, že $\deg Q_n = \varphi(n)$. □

Příklad 5.7. Nad \mathbb{F}_2 máme

$$Q_1 = x - 1, \quad Q_3 = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1, \quad Q_5 = \frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Potom $Q_{15} = \frac{x^{15} - 1}{Q_1 Q_3 Q_5}$.

Zřejmě jsou Q_1 a Q_3 ireducibilní a protože 2 má v \mathbb{Z}_5^* řád 4, je ireducibilní podle 5.6(2) rovněž cyklotomický polynom Q_5 . Protože 2 má i v \mathbb{Z}_{15}^* řád 4 a Q_{15} je stupně 8, je součinem dvou ireducibilních polynomů stupně 4.

Konečně $x^{30} - 1 = (x^{15} - 1)^2 = Q_1^2 Q_3^2 Q_5^2 Q_{15}^2$, tedy $x^{30} - 1$ má právě 10 ireducibilních faktorů.

6. CYKLIČKÉ KÓDY

Cílem kapitoly je kompletní popis třídy lineárních kódů uzavřených na cyklické posunutí souřadnic, kterým se říká cyklické kódy. Ukážeme, že všechny lze nahlížet jako hlavní ideály faktorových okruhů $\mathbb{F}[x]/(x^n - 1)$ určené právě děliteli polynomu $x^n - 1$. S využitím popisu faktorizace $x^n - 1$ z předchozí kapitoly, tak získáme popis všech lineárních cyklických kódů.

Předpokládáme, že $n > 1$ je přirozené a souřadnice slov délky n budeme nově indexovat $\mathbf{c} = c_0 c_1 \dots c_{n-1}$, tedy čísla $0, \dots, n-1$. Připomeňme, že $\mathbb{F}[x]/f = \{g \in \mathbb{F}[x] \mid \deg g < \deg f\}$ je okruh se standardním sčítáním polynomů a násobením modulo polynom f , jehož nulový prvek je polynom 0 a jednotkový polynom 1

Definice. Kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je *cyklický*, pokud pro každé slovo $c_0 c_1 \dots c_{n-2} c_{n-1} \in \mathcal{C}$ platí, že $c_{n-1} c_0 \dots c_{n-3} c_{n-2} \in \mathcal{C}$.

Příklad 6.1. (1) Kód $\mathcal{C}_1 = \{0123, 3012, 2301, 1230\} \subset \mathbb{F}_5^4$ je nelineární cyklický.

(2) Kód $\mathcal{C}_2 = \text{LO}(1111) \subset \mathbb{F}_5^4$ je lineární cyklický.

(3) Všimněme si, že sjednocení cyklických kódů stejné délky nad stejným tělesem, tedy například $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, tvoří opět cyklický kód.

T&N. Mějme zobrazení $\nu : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}[x]/x^n - 1$ dané vztahem $\nu(c_0 c_1 \dots c_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$.

Na množině \mathbb{F}^n uvažujme standardní vektorové operace $+$, $-$ a definujme operaci \cdot pomocí operace násobení modulo $x^n - 1$ na okruhu $\mathbb{F}[x]/x^n - 1$ tak, aby

$$\nu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \nu(\mathbf{u}) \cdot \nu(\mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i x^i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} v_i x^i = \left(\sum_{i=0}^{2n-2} \left(\sum_{r=0}^i u_r v_{i-r} \right) x^i \right) \text{mod } x^n - 1.$$

Označme $\mathbf{1} = 10 \dots 00$.

Připomeňme, že $\mathbb{F}[x]$ je Eukleidův obor, kde umíme algoritmicky hledat největší společné dělitele (nsd) i nejmenší společné násobky (nsn), v $\mathbb{F}[x]$ i v každém jeho faktoru jsou tudíž všechny ideály hlavních.

Pozorování. Uvažujme výše uvedené značení. Potom

- (1) $\mathbb{F}[x]_n = (\mathbb{F}^n, +, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ tvoří komutativní okruh a ν je izomorfismus okruhů i vektorových prostorů.
- (2) $\mathbb{F}[x]/x^n - 1$ i $\mathbb{F}[x]_n$ jsou okruhy hlavních ideálů,
- (3) je-li $\mathbf{e} = \nu^{-1}(x)$, pak $\mathbf{e} = 010 \dots 00$ a

$$\mathbf{e} \cdot c_0 c_1 \dots c_{n-2} c_{n-1} = c_{n-1} c_0 \dots c_{n-3} c_{n-2},$$

T&N. Okruh $(\mathbb{F}^n, +, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ z předchozího pozorování budeme značit $\mathbb{F}[x]_n$.

Poznámka 6.2. Kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je lineární a cyklický, právě když \mathcal{C} je ideál okruhu $\mathbb{F}[x]_n$.

Důkaz. Protože ν je izomorfismus, stačí dokázat, že $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je cyklický lineární kód, právě když je $\nu(\mathcal{C})$ ideál okruhu $\mathbb{F}[x]/x^n - 1$.

(\Rightarrow) Předpokládáme-li, že \mathcal{C} je cyklický lineární kód, potom je i jeho obraz $\nu(\mathcal{C})$ podle předchozího pozorování podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{F}[x]/x^n - 1$ nad tělesem \mathbb{F} . Protože je \mathcal{C} uzavřeno na cyklické posunutí, $\nu(\mathcal{C})$ je uzavřeno na násobení třídou monomem x . Indukcí nahlédneme, že $\forall i \geq 1$ a $\forall p \in \nu(\mathcal{C})$ $x^i \cdot p = x \cdot x^{i-1} \cdot p \in \nu(\mathcal{C})$, z čehož plyne, že pro každý polynom $\sum_i a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ dostáváme

$$\sum_i a_i x^i \cdot p = \sum_i a_i x^i \cdot p \in \nu(\mathcal{C}).$$

(\Leftarrow) Je-li naopak $\nu(\mathcal{C})$ ideál okruhu $\mathbb{F}[x]/x^n - 1$, pak \mathcal{C} je lineární kód, protože ν je izomorfismus vektorových prostorů a $\nu(\mathcal{C})$ podprostor. Podmínka cykličnosti díky pozorování (3) plyne z uzavřenosti $\nu(\mathcal{C})$ na násobení prvkem $[x]$. \square

Hlavní ideál oboru $\mathbb{F}[x]$ generovaný polynom f budeme značit (f) a rozkladovou třídu $g + (f)$ faktorového okruhu $\mathbb{F}[x]/(f)$ budeme značit $[g]$.

T&N. Pro každý polynom $f \in \mathbb{F}[x]/x^n - 1$ značíme (f) hlavní ideál okruhu $\mathbb{F}[x]/x^n - 1$ a definujeme množinu

$$\mathcal{C}(f) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}^n \mid \exists g \in \mathbb{F}[x] : \deg g < n - \deg f, \nu(\mathbf{u}) = f \cdot g\}.$$

Pozorování. V okruhu $\mathbb{F}[x]/x^n - 1$ platí: .

- (1) $(f) = (\text{nsd}(f, x^n - 1)) \forall f \in \mathbb{F}[x]$,
- (2) každý ideál je tvaru (f) pro nějaké $f \in \mathbb{F}[x]$, které dělí $x^n - 1$.

Věta 6.3. Kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je lineární cyklický, právě když $\mathcal{C} = \mathcal{C}(f)$ pro nějaký monický polynom $f \in \mathbb{F}[x]$, který dělí $x^n - 1$.

Důkaz. Díky 6.2 víme, že \mathcal{C} je cyklický, právě když je to ideál okruhu $\mathbb{F}[x]_n$. Protože $\nu : \mathbb{F}[x]_n \rightarrow \mathbb{F}[x]/x^n - 1$ je izomorfismus okruhů i vektorových prostorů, a ideály druhého (které tvoří podprostor) jsou právě tvaru (f) pro nějaký $f \mid x^n - 1$, stačí pro každý takový polynom f ověřit, že $\nu(\mathcal{C}(f)) = (f)$. Nechť tedy f dělí $x^n - 1$.

(\subseteq) Z definice $\mathcal{C}(f)$ platí, že $\nu(\mathcal{C}(f)) \subseteq (f)$.

(\supseteq) Nechť $[h] \in (f)$ a označme $g := \frac{x^n - 1}{f}$. Potom existuje $a \in \mathbb{F}[x]$, pro které

$$h = a \cdot f = (af) \bmod x^n - 1 = (a) \bmod g \cdot f \in \nu(\mathcal{C}(f)),$$

a proto $(f) \subseteq \nu(\mathcal{C}(f))$. Tím jsme ověřili, že f je generátor ideálu $\nu(\mathcal{C}(f))$. \square

T&N. Polynom $f \in \mathbb{F}[x]$, který dělí $x^n - 1$, nazýváme *generujícím polynomem* cyklického kódu $\mathcal{C}(f)$.

Poznámka 6.4. Nechť pro $g = \sum_i g_i x^i, h = \sum_i h_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ platí, že $x^n - 1 = g \cdot h$, a označme $k = \deg h$. Potom $\deg g = n - k$, $\mathcal{C}(g)$ je $[n, k]$ -kód s generující maticí

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-k} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_0 & \dots & g_{n-k-1} & g_{n-k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & g_{n-k} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & g_{n-k-1} & g_{n-k} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times n}$$

a kontrolní maticí

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_k & h_{k-1} & \dots & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_k & \dots & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & h_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & h_1 & h_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n-k \times n}.$$

Navíc $\mathcal{C}(g)^\perp = \mathcal{C}(h^*)$, kde $h^* = \sum_i h_i x^{k-i}$

Důkaz. matice $\mathbf{G} \in \mathbb{F}^{k \times n}$ je odstupňovaná s nenulovými řádky, proto je hodnosti k . Podobně \mathbf{H} je hodnosti $n - k$. Pokud $a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i$, pak

$$\nu^{-1}(ag) = \nu^{-1}(a)\mathbf{G} = a_0 \dots a_{k-1} \cdot \mathbf{G},$$

tudíž je \mathbf{G} je generující matice $\mathcal{C}(g)$. Zbývá nahlédnout, že $\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$.

Nejprve spočítáme koeficienty součinu $x^n - 1 = gh = \sum_{s=0}^n (\sum_{r=0}^s g_r h_{s-r}) x^s$. Odtud vidíme, že $\sum_{r=0}^s g_r h_{s-r} = 0 \forall s \in \{1, \dots, n-1\}$.

Označme \mathbf{G}_i i -tý řádek matice \mathbf{G} a \mathbf{H}_j j -tý řádek matice \mathbf{H} pro $i = 0, \dots, k-1$ a $j = 0, \dots, n-k-1$, pak

$$\mathbf{G}_i \mathbf{H}_j^T = (0 \quad \dots \quad 0 \quad g_0 \quad g_1 \quad \dots \quad g_{n-k} \quad 0 \quad \dots \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ h_k \\ \cdot \\ h_0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{r=i}^{k+j} g_{r-i} h_{k+j-r} = 0,$$

protože $\sum_{r=i}^{k+j} g_{r-i} h_{k+j-r} = \sum_{r=0}^s g_r h_{s-r} = 0$ pro $s = k+j-i$, kde $0 \leq i \leq k-1$ a $0 \leq j \leq n-k-1$, a proto $1 \leq s \leq n-1$.

Protože $\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$, je \mathbf{G} generující a \mathbf{H} kontrolní matice kódu $\mathcal{C}(g)$. \square

Jakmile umíme najít ireducibilní rozklad polynomu $x^n - 1$ a tedy i všechny dělitele tohoto polynomu, umíme najít všechny cyklické kódy délky n nad tělesem \mathbb{F} .

Příklad 6.5. Ireducibilní rozklad polynomu $x^3 - 1$ v oboru $\mathbb{F}_2[x]$ je

$$x^3 - 1 = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1),$$

proto máme právě 4 dělitele $x^3 - 1$ a tedy existují právě 4 cyklické binární lineární kódy délky 3. Dva triviální odpovídají triviálním dělitelům $\mathcal{C}(1) = \mathbb{F}_2^3$, $\mathcal{C}(x^3 + 1) = \{\mathbf{0}\}$.

Potom má kód $\mathcal{C}(x+1)$ generující matici $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a kontrolní matici $\mathbf{H} = (1 \quad 1 \quad 1)$, zatímco kód $\mathcal{C}(x^2 + x + 1)$ má generující matici \mathbf{H} a kontrolní matici \mathbf{G} .

7. GRS KÓDY A JEJICH OSTATKY

V této kapitole se vrátíme k MDS kódům a ukážeme, že klasická Reedova-Solomonova konstrukce představuje cyklický MDS kód. A ačkoli jejich reziduální kódy už MDS nejsou, představují velmi užitečné třídy kódů se zajímavými vlastnostmi.

V celé sekci uvažujme, že charakteristika p tělesa \mathbb{F} nedělí n , souřadnice slov jsou indexovány od 0 a $\mathbb{F}_{(n)}$ značí rozkladové nadtěleso polynomu $x^n - 1$ nad tělesem \mathbb{F} .

Nejprve zobecníme konstrukci MDS kódu z příkladu 3.6:

T&N. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ jsou po dvou různé prvky, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{F}^*)^n$ a $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{F}^*)^n$. Potom pro $r < n$ označme v souladu s příkladem 3.6 matice

$$\mathbf{H}_{r,\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_1^{r-1} & \alpha_2^{r-1} & \dots & \alpha_n^{r-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{r \times n}, \quad \Delta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

Lineární kód $\mathcal{C} = \ker(\mathbf{H}_{r,\underline{\alpha}}\Delta(\mathbf{v}))$ s kontrolní maticí $\mathbf{H}_{r,\underline{\alpha}}\Delta(\mathbf{v})$ se nazývá *zobecněný Reedův-Solomonův (GRS) kód s lokátory $\underline{\alpha}$ a multiplikátory \mathbf{v}* .

Dále řekneme, že je \mathcal{C}

- *normovaný* GRS kód, pokud $v_i = 1$ pro všechna $i = 1, \dots, n$,
- *Reedův-Solomonův (RS)*, pokud existuje prvek $\alpha \in \mathbb{F}^*$ řádu n a $0 \leq b < n$ tak, že $\alpha_i = \alpha^{i-1}$ a $v_i = \alpha^{b(i-1)}$.

Pozorování. Za předpokladů předchozí terminologické poznámky platí pro $k < n$:

- (1) GRS kódy jsou MDS díky 3.2 a 3.6,
- (2) duál GRS kódu je opět GRS, neboť pro $\mathbf{v} \in (\mathbb{F}^*)^n$ existuje řešení $\mathbf{u} \in (\mathbb{F}^*)^n$ soustavy

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^{r+s} v_i u_i = 0, \quad r = 0, \dots, k-1, \quad s = 0, \dots, n-k-1,$$

což je právě řešení soustavy s maticí $\mathbf{H}_{n-2,\underline{\alpha}}\Delta(\mathbf{v})$. Tedy GRS kódy dimenze k a $n-k$ se společnými lokátory α a uvedenými multiplikátory \mathbf{v} a \mathbf{u} jsou vzájemně duální.

- (3) $[n,k]$ RS kód má pro $t = n-k-1$ a $0 \leq b < n$ generující a kontrolní matice tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^{n-b+1} & \alpha^{2(n-b+1)} & \dots & \alpha^{(n-1)(n-b+1)} \\ 1 & \alpha^{n-b+2} & \alpha^{2(n-b+2)} & \dots & \alpha^{(n-1)(n-b+2)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha^{n-b+k} & \alpha^{2(n-b+k)} & \dots & \alpha^{(n-1)(n-b+k)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha^b & \alpha^{2b} & \dots & \alpha^{(n-1)b} \\ 1 & \alpha^{b+1} & \alpha^{2(b+1)} & \dots & \alpha^{(n-1)(b+1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha^{b+t} & \alpha^{2(b+t)} & \dots & \alpha^{(n-1)(b+t)} \end{pmatrix},$$

protože hodnota první matice je k , druhé $n-k$ a bodový součin i -tého a j -tého řádku, kde $1 \leq i \leq k$ a $0 \leq j \leq n-k-1$, a proto $1 \leq i+j \leq n-1$, je

$$\sum_{s=0}^{n-1} \alpha^{s(n-b+i)} \alpha^{s(b+j)} = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha^{s(n-b+i+b+j)} = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha^{s(i+j)} = \frac{\alpha^{n(i+j)} - 1}{\alpha^{i+j} - 1} = 0.$$

Věta 7.1. Pro zobrazení $\nu : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}[x]/x^n - 1$ z předchozí kapitoly, kde obraz slova chápeme jako standardní polynom, do nějž lze dosadit kterýkoli prvek rozšíření $\mathbb{F}_{(n)}$, platí:

- (1) je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ lineární cyklický kód, $M = \{\alpha \in \mathbb{F}_{(n)} \mid \nu(\mathbf{u})(\alpha) = 0 \ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}\}$ a $f = \prod_{\alpha \in M} x - \alpha$, pak $f \in \mathbb{F}[x]$, f dělí $x^n - 1$ a $\mathcal{C} = \mathcal{C}(f)$,
- (2) je-li $\alpha_i \in \mathbb{F}_{(n)}$ kořen $x^n - 1$, m_i minimální polynom prvku α_i nad tělesem \mathbb{F} pro $i = 1, \dots, r$ a $\mathcal{C} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}^n \mid \nu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0 \ \forall i \leq r\}$, pak $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{C}(m_i) = \mathcal{C}(\text{nsn}_{i \leq r}(m_i))$ je cyklický kód.

Důkaz. (1) Připomeňme, že charakteristika p nedělí n , proto podle 6.3 existuje monický polynom g , který dělí $x^n - 1$ a platí, že $\mathcal{C} = \mathcal{C}(g)$. Dále $\text{nsd}(x^n - 1, nx^{n-1}) = 1$, proto jsou všechny kořeny polynomů $x^n - 1$ i g jednoduché, a existuje podmnožina $L \subseteq \mathbb{E}_{(n)} = \{\alpha \in \mathbb{F}_{(n)} \mid \alpha^n = 1\}$ splňující $g = \prod_{\alpha \in L} x - \alpha$. Nyní snadno nahlédneme, že platí řada ekvivalencí

$$\alpha \in L \Leftrightarrow g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \nu(\mathbf{u})(\alpha) = 0 \ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}(g) \Leftrightarrow \alpha \in M.$$

Proto $g = f$, $L = M$ a $\mathcal{C} = \mathcal{C}(g) = \mathcal{C}(f)$.

(2) Položme $f = \text{nsn}_{i \leq r}(m_i)$. Potom jistě $f \mid x^n - 1$ a zvolíme-li $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, pak platí, že $m_i \mid \nu(\mathbf{u})$ pro všechna i . Odtud plyne, že $f \mid \nu(\mathbf{u})$, a proto $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(f)$. Naopak, vezmeme-li $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(f)$, potom $f \mid \nu(\mathbf{u})$, a proto $\nu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0$ pro všechna i , odkud dostáváme, že $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$. Dokázali jsme, že $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\text{nsn}_{i \leq r}(m_i))$ je cyklický kód. Rovnost $\mathcal{C}(\text{nsn}_{i \leq r}(m_i)) = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{C}(m_i)$ plyne z popisu průniku ideálů v oboru hlavních ideálů. \square

Důsledek 7.2. RS kódy jsou cyklické

Důkaz. Buď \mathcal{C} RS kód s lokátory $\alpha_i = \alpha^{i-1}$ pro prvek grupy $\alpha \in \mathbb{F}^*$ řádu n a multiplikátory $v_i = \alpha^{b(i-1)}$. Pak $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, právě když

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^b & \alpha^{2b} & \dots & \alpha^{(n-1)b} \\ 1 & \alpha^{b+1} & \alpha^{2(b+1)} & \dots & \alpha^{(n-1)(b+1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha^{b+n-k-1} & \alpha^{2(b+n-k-1)} & \dots & \alpha^{(n-1)(b+n-k-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

což nastává, právě když $\nu(\mathbf{u})(\alpha^{b+i}) = 0$ pro $i = 0, \dots, n - k - 1$. Tedy \mathcal{C} je cyklický podle věty 7.1(2). \square

Uvědomíme-li si, že reziduální kód $\mathcal{C} \cap \mathbb{F}_q^n$ cyklického kódu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_{q^r}^n$ je opět cyklický, dostáváme následující tvrzení:

Důsledek 7.3. Reziduální kódy RS kódů jsou cyklické.

Pozorování. Nechť \mathbb{F}_q je podtěleso tělesa \mathbb{F}_{q^r} a $\alpha_i \in (\mathbb{F}_{q^r})_{(n)}$, $\alpha_i^n = 1$ a označme m_i minimální polynom prvku α_i nad tělesem \mathbb{F}_q a $m_{i,r}$ minimální polynom prvku α_i nad tělesem \mathbb{F}_{q^r} . Pokud $f = \text{nsn}_i(m_{i,r}) \in \mathbb{F}_{q^r}[x]$ a $g = \text{nsn}_i(m_i) \in \mathbb{F}_q[x]$, pak díky větě 7.1(2)

- (1) $\mathcal{C}(g) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n \mid \nu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0 \ \forall i\}$,
- (2) $\mathcal{C}(f) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_{q^r}^n \mid \nu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0 \ \forall i\}$,
- (3) $\mathcal{C}(g) = \mathbb{F}_q^n \cap \mathcal{C}(f)$.

Poznamenejme, že se reziduální kódy GRS kódů obvykle nazývají *Alternantní* a reziduální kódy RS kódů se označují *BCH* kódy (jako zkratka jmen Bose, Chaudhuri a Hocquenghem), a protože jsou GRS kódy MDS $[n, l, D]_{q^r}$ -kódy, platí pro BCH i alternantní $[n, k, d]_q$ -kódy dimenzní odhad $k \geq n - r(D - 1)$ z věty 4.3.

Příklad 7.4. Uvažujme těleso $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\alpha)$ pro α splňující $\alpha^2 + 1 = 0$ a nad ním GRS $[6, 4, 3]_9$ kód s kontrolní maticí $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 2\alpha & \alpha + 1 & 2\alpha + 2 \end{pmatrix}$. Pro reziduální kód $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathbb{F}_3^6$ určíme stejně jako v důkazu 4.3 matici $\tilde{\mathbf{H}}$, pro níž platí, že $\tilde{\mathcal{C}} = \text{Ker}\tilde{\mathbf{H}}$. K tomu zvolíme bázi $1, \alpha$ prostoru \mathbb{F}_9 nad \mathbb{F}_3 .

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Odtud vidíme, že $\tilde{\mathcal{C}}$ je $[6, 3]_3$ -kód a z 4.3 dostáváme odhad jeho vzdálenosti $d \geq 3$ (odhad pro k z 4.3 je pouze $k \geq 6 - 2 \cdot 2 = 2$). Díky 1.4 $d \leq 4$ a kdyby $d = 4$, šlo by o MDS kód, který by podle 4.1 musel mít vzdálenost shora omezenou velikostí tělesa, což by neplatilo. Tedy $\tilde{\mathcal{C}}$ je $[6, 3, 3]_3$ -kód.

Kombinatorické konstrukce

8. REEDOVY-MULLEROVY KÓDY

Binární Reedovy-Mullerovy kódy představují třídu snadno konstruovatelných lineárních kódů, které podobně jako RS kódy popsané v předchozí kapitole disponují efektivním dekódovacím algoritmem. Výhodou konstrukce je předem známá vzdálenost kódu a fakt, který v této kapitole ověříme, že týž postup můžeme použít i pro vytvoření duálního kódu.

V celé kapitole předpokládáme, že $r \leq m \in \mathbb{N}$, $n = 2^m$ a slova \mathbb{F}_2^m si pevně očíslováme

$$\mathbb{F}_2^m = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}.$$

T&N. Každé množině

$$\mathcal{R}(m, r) = \{f(\beta_0)f(\beta_1) \dots f(\beta_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n \mid f \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_m], \deg(f) \leq r\}.$$

budeme říkat binární *Reedův-Mullerův* kód (krátce RM-kód).

Dále označme $x_I = \prod_{i \in I} x_i$ pro každé neprázdné $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, prázdnou množinu položíme $x_\emptyset = 1$ a definujeme množiny *Booleových polynomů*

$$\mathcal{BP}_m(r) = \left\{ \sum_{I: |I| \leq r} f_I x_I \mid f_I \in \mathbb{F}_2 \forall I \subseteq \{1, \dots, m\} \right\},$$

speciálně $\mathcal{BP}_m = \mathcal{BP}_m(m)$ a na \mathcal{BP}_m potom zavedeme strukturu okruhu

$$\begin{aligned} \sum_I a_I x_I \pm \sum_I b_I x_I &= \sum_I (a_I \pm b_I) x_I \\ \sum_I a_I x_I \cdot \sum_J b_J x_J &= \sum_{I, J} (a_I \cdot b_J) x_{I \cup J} = \sum_K \sum_{I, J: K=I \cup J} (a_I \cdot b_J) x_K, \end{aligned}$$

kde všechna I, J bereme jako podmnožiny $\{1, \dots, m\}$.

Dále označíme množinu *Booleových funkcí*

$$\mathcal{BF}_m = \{\mathbb{F}_2^m \rightarrow \mathbb{F}_2\}$$

a připomeňme, že na obou množinách \mathcal{BF}_m i \mathbb{F}_2^n máme k dispozici přirozeně po složkách definovanou strukturu okruhu:

$$\begin{aligned} (f \pm g)(\beta_i) &= f(\beta_i) \pm g(\beta_i), & (f \cdot g)(\beta_i) &= f(\beta_i) \cdot g(\beta_i) \\ (\mathbf{u} \pm \mathbf{v})_i &= \mathbf{u}_i \pm \mathbf{v}_i, & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_i &= \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i \end{aligned}$$

pro libovolné funkce $f, g \in \mathcal{BF}_m$, slova $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^n$ a všechny souřadnice $i = 1, \dots, n$.

Pozorování. Zobrazení $f \rightarrow f(\beta_0) \dots f(\beta_{n-1})$ je izomorfismus komutativních okruhů $(\mathcal{BF}_m, +, -, \cdot, 0, 1)$ a $(\mathbb{F}_2^n, +, -, \cdot, 0 \dots 0, 1 \dots 1)$.

Nadále budeme pomocí výše uvedeného izomorfismu ztotožňovat okruhy \mathcal{BF}_m a \mathbb{F}_2^n a obě značení budeme podle potřeby zaměňovat.

T&N. Pro $I, J \subseteq \{1, \dots, m\}$ budeme značit $i_J = i_1 \dots, i_m$ incidenční vektor množiny I , tj. $i_j = 1 \Leftrightarrow j \in I$ a $\chi_I \in \mathcal{BF}_m$ funkci danou podmínkou $\chi_I(i_J) = 1 \Leftrightarrow J = I$.

Pozorování. Pro RM kódy, Booleovy polynomy a Booleovy funkce platí:

$$(1) \mathcal{R}(m, r) = \{p(\beta_0) \dots p(\beta_{n-1}) \mid p \in \mathcal{BP}_m(r)\} \text{ je lineární kód délky } n = 2^m,$$

- (2) $(\mathcal{BP}_m, +, -, \cdot, 0, 1)$ je komutativní okruh a přirozená projekce $p \rightarrow [p]$ určuje izomorfismus okruhů $\mathcal{BP}_m \cong \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_m]/(x_1^2 + x_1, \dots, x_m^2 + x_m)$,
- (3) pro každé $f \in \mathcal{BF}_m$ platí, že $f = \sum_{I:f(i_I)=1} \chi_I$.

Všimněme si, že uvažované izomorfní okruhy jsou zároveň vektorové prostory nad tělesem \mathbb{F}_2 (tedy \mathbb{F}_2 -algebry). Protože násobení skalárem z \mathbb{F}_2 žádný nový požadavek na okruhový homomorfismus nepředstavuje, jsou uvažované okruhový izomorfismy zároveň izomorfismy vektorových prostorů nad tělesem \mathbb{F}_2 .

T&N. Pro polynom $p = \sum_i p_I x_I \in \mathcal{BP}_m$ budeme značit

$$N(p) = \{i_I \in \mathbb{F}_2^m \mid p(i_I) = 1\} \quad \text{a} \quad \deg(p) = \max(\{|I| \mid p_I \neq 0\} \cup \{-1\}).$$

Poznámka 8.1. Jestliže $p \in \mathcal{BP}_m(r) \setminus \{0\}$, pak $|N(p)| \geq 2^{m-r}$.

Důkaz. Dokazujeme indukci podle $m \geq 1$ a p stupně $\deg(p) \leq r$.

(a) Pro $m = 1$ uvažujeme polynomy tvaru $p = a_0 + a_1 x_1 \in \mathbb{F}_2[x_1]$. Provedeme diskusi pro oba případy $r = 0, 1$.

Pro $r = 0$ máme $a_0 = 1$ a $a_1 = 0$, proto $p = 1$ a $|N(p)| = 2 = 2^{1-0}$.

Pro $r = 1$ triviálně dostáváme $|N(p)| \geq 1 = 2^{1-1}$.

(b) Předpokládejme, že tvrzení platí pro $m - 1$ a dokážeme ho pro $m > 1$. Nechť $p = x_m g + h$, kde $g, h \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_{m-1}]$.

Pokud $g = 0$, pak $\deg h = \deg p$ a platí ekvivalence

$$h(i_1 \dots i_{m-1}) = 1 \Leftrightarrow p(i_1 \dots i_{m-1}, 0) = p(i_1 \dots i_{m-1}, 1) = 1,$$

proto s využitím indukčního předpokladu pro h dostáváme, že

$$|N(p)| = 2|N(h)| \geq 2 \cdot 2^{m-1-r} = 2^{m-r}.$$

Pokud $g \neq 0$, pak $\deg g \leq r - 1$ a $\forall (i_1, \dots, i_{m-1}) \in N(g)$ existuje $t \in \mathbb{F}_2$ splňující $p(i_1, \dots, i_{m-1}, t) = g(i_1, \dots, i_{m-1})t + h(i_1, \dots, i_{m-1}) = t + h(i_1, \dots, i_{m-1}) = 1$, proto

$$|N(p)| \geq |N(g)| \geq 2^{m-1-(r-1)} = 2^{m-r}.$$

díky platnosti indukčního předpokladu pro g . □

T&N. Označme zobrazení $\Phi : \mathcal{BP}_m \rightarrow \mathcal{BF}_m$ dané podmínkou $\Phi(p)(\beta) = p(\beta)$.

Ztotožnění $\mathcal{BF}_m \cong \mathbb{F}_2^n$ bijekcí $f \rightarrow f(\beta_0) \dots f(\beta_{n-1})$ umožňuje zobrazení Φ popsat vztahem $\Phi(p) = p(\beta_0) \dots p(\beta_{n-1})$.

Pozorování. Pro množiny $J, Y \subseteq \{1, \dots, m\}$ a $p_J = (\prod_{i \in J} x_i) \cdot (\prod_{i \notin J} (x_i + 1)) \in \mathcal{BP}_m$ platí:

- (1) $\Phi(p_J) = \chi_J$, Φ je homomorfismus okruhů i vektorových prostorů, tedy pro libovolnou $f \in \mathcal{BF}_m$ platí, že

$$\Phi\left(\sum_{I:f(i_I)=1} p_I\right) = \sum_{I:f(i_I)=1} \Phi(p_I) = \sum_{I:f(i_I)=1} \chi_I = f,$$

- (2) Φ je izomorfismus, neboť jde dle (1) o surjektivní homomorfismus okruhů (i vektorových prostorů) stejné mohutnosti 2^n ,
- (3) $\{x_I \mid I \subseteq \{1, \dots, m\}, |I| \leq r\}$ je báze prostoru $\mathcal{BP}_m(r)$, proto je její izomorfní obraz $B_r = \{\Phi(x_I) \mid I \subseteq \{1, \dots, m\}, |I| \leq r\}$ báze prostoru $\mathcal{R}(m, r)$,

- (4) $w(\Phi(p)) = |N(p)|$ pro všechny polynomy $p \in \mathcal{BP}_m$,
(5) $x_J(i_Y) = \prod_{j \in J} (i_Y)_j = 1 \Leftrightarrow J \subseteq Y$.

Věta 8.2. $\mathcal{R}(m, r)$ je $[n, \sum_{i=0}^r \binom{m}{i}, 2^{m-r}]_2$ kód.

Důkaz. Vidíme, že $\dim(\mathcal{R}(m, r)) = |\{I \subseteq \{1, \dots, m\} \mid |I| \leq r\}| = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i}$ díky pozorování (2) a (3).

Jestliže $|I| = r$, potom $\Phi(x_I) \in \mathcal{R}(m, r)$, a proto $w(\Phi(x_I)) = |N(x_I)| = 2^{m-r}$ podle pozorování (4) a (5). Tím jsme dokázali nerovnost $d(\mathcal{R}(m, r)) \leq 2^{m-r}$.

Naopak z poznámky 8.1 a pozorování (4) plyne opačná nerovnost $d(\mathcal{R}(m, r)) \geq 2^{m-r}$. \square

Věta 8.3. Kódy $\mathcal{R}(m, r)$ a $\mathcal{R}(m, m-r-1)$ jsou vzájemně duální.

Důkaz. Nejprve dokážeme pro báze B_r a B_{m-r-1} z pozorování (3), že pro každou dvojici $\Phi(x_I) \in B_r$, $\Phi(x_J) \in B_{m-r-1}$ je bodový součin $\Phi(x_I) \cdot \Phi(x_J) = 0$. Protože $|I| \leq r$ a $|J| \leq m-r-1$, spočítáme

$$\Phi(x_I) \cdot \Phi(x_J) = \sum_B x_I(i_B) \cdot x_J(i_B) = \sum_B x_{I \cup J}(i_B).$$

Uvědomíme-li si, že podle pozorování (5) platí, že $x_{I \cup J}(i_B) = 1$, právě když $I \cup J \subseteq B$ a že $|I \cup J| \leq r + m - r - 1 = m - 1$, dostáváme

$$\Phi(x_I) \cdot \Phi(x_J) \equiv \sum_{B: I \cup J \subseteq B} 1 \equiv 2^{m-|I \cup J|} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Dokázali jsme, že $\mathcal{R}(m, r) \subseteq \mathcal{R}(m, m-r-1)^\perp$ a $\mathcal{R}(m, m-r-1) \subseteq \mathcal{R}(m, r)^\perp$. Protože navíc podle 8.2 $\dim \mathcal{R}(m, r) + \dim \mathcal{R}(m, m-r-1) =$

$$= \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} + \sum_{i=0}^{m-r-1} \binom{m}{i} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} + \sum_{i=r+1}^m \binom{m}{i} = 2^m$$

jsou prostory $\mathcal{R}(m, r)$ a $\mathcal{R}(m, m-r-1)$ vzájemně duální. \square

Příklad 8.4. (1) $\mathcal{R}(3, 1)$ je podle 8.2 a 8.3 samoduální $[8, 4, 4]_2$ -kód. Všimněme si podobně jako v příkladu 3.5, že propíchnutí $\mathcal{R}(3, 1)$ v kterékoli souřadnici je permutačně ekvivalentní 1-perfektnímu Hammingovu $[7, 4, 3]_2$ -kódu z 2.4.

(2) Obdobně uvážíme, že $\mathcal{R}(m, m-2) = \mathcal{R}(m, 1)^\perp$ je $[2^m, 2^m - m - 1, 4]_2$ -kód a jeho propíchnutí v kterékoli souřadnici je díky 1.3 1-perfektní $[2^m - 1, 2^m - m - 1, 3]_2$ -kód.

Na závěr pro ilustraci užitečnosti RM kódů nastíníme myšlenku kódování a dekódování (téma ovšem nebude letos obsahem zkoušky).

Kódování. Označíme $\mathcal{P}_r^m = \{I \subseteq \{1, \dots, m\} \mid |I| \leq r\}$ a $k = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i}$. Slovo \mathbf{v} z \mathbb{F}_2^k reprezentované polynomem $f_{\mathbf{v}} = \sum_{I \in \mathcal{P}_r^m} v_I x_I$, kde souřadnice slova \mathbf{v} indexujeme prvky množiny \mathcal{P}_r^m mohutnosti k , zakódujeme vztahem $\mathbf{v} \rightarrow \Phi(f_{\mathbf{v}})$. Dostáváme lineární kódování $\mathbb{F}_2^k \cong \mathbb{F}_2^{\sum_{i=0}^r \binom{m}{i}} \rightarrow \mathcal{BF}(m) \cong \mathbb{F}_2^m$, jehož obrazem je RM-kód $\mathcal{R}(m, r)$.

Dekódování. Nejprve přidáme ještě jedno značení: je-li $f \in \mathcal{BP}_m$ nebo $f \in \mathcal{BF}_m$, $I, Y \subseteq \{1, \dots, m\}$, pak definujeme $f^I \in \mathcal{BF}_m$ předpisem

$$f^I(i_Y) = \sum_{B: Y \subseteq B \subseteq I \cup Y} f(i_B).$$

Nyní zformulujeme algoritmus, který přijaté chybové slovo s váhou chyby menší než 2^{m-r-1} reprezentovaného booleovskou funkcí opraví na původní polynom:

Vstup: $g \in \mathcal{BF}_m$ splňující $g = f + e$ pro $f \in \mathcal{R}(m, r)$ a $e \in \mathbb{F}_2^m$, $w(e) < 2^{m-r-1}$
Výstup: $\tilde{f} \in \mathcal{BP}_m(r)$, pro který $d(\Phi(\tilde{f}), g) < 2^{m-r-1}$, proto $f = \Phi(\tilde{f})$.

```

for d=r downto 0 do
  for all  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  splňující  $|I| = d$  do
     $\{\alpha_0 := |\{Y \subseteq \{1, \dots, m\} : Y \cap I = \emptyset, g^I(i_Y) = 0\}|\};$ 
     $\alpha_1 := 2^{m-d} - \alpha_0$  ( $= |\{Y \subseteq \{1, \dots, m\} : Y \cap I = \emptyset, g^I(i_Y) = 1\}|\});$ 
    if  $\alpha_0 > \alpha_1$  then  $a_I := 0$  else  $a_I := 1$ ,  $g := g + \Phi(x_I)$ ;
  }
return  $\sum_{I \in \mathcal{P}_r^m} a_I x_I$ .
```

Korektností algoritmu se nebudeme zabývat, zájemci jeho důkaz naleznou například ve skriptech Aleše Drápala.

9. GOLAYOVY PERFEKTNÍ KÓDY

Tentokrát se vrátíme k pojmu perfektního kódu. Zkonstruujeme binární 3-perfektní kód délky 23 a dokážeme o něm, že je určen jednoznačně až na posunutí a permutační ekvivalenci.

V celé kapitole předpokládáme, že $b, v \in \mathbb{N}$ a uvažujeme uspořádané množiny $X = \{x_1, \dots, x_v\}$ a $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

T&N. Pro $B, C \in \mathcal{B}$ definujme $i_B = i_1 \dots i_v \in \mathbb{Z}^v$ podmínkou $i_j = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x_j \in B \\ 0 & \text{pokud } x_j \notin B \end{cases}$.
Dále označme $i_B \cap i_C = i_{B \cap C}$ (což je právě součin obou vektorů po složkách). Řekneme, že matice $M = \begin{pmatrix} i_{B_1} \\ \dots \\ i_{B_b} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{b \times v}$ je *incidenční matice* systému \mathcal{B} .

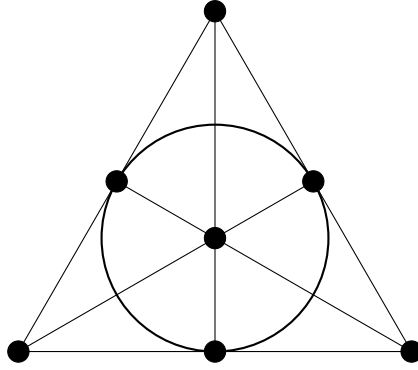
Pozorování. Pro incidenční matici M systému \mathcal{B} a matice $U = (u_{ij}) = MM^T \in \mathbb{Z}^{b \times b}$ a $V = (v_{ij}) = M^T M \in \mathbb{Z}^{v \times v}$ platí:

- (1) Jestliže $B, C \subseteq X$, pak $w(i_B + i_C) = |B \dot{\cup} C| = w(i_B) + w(i_C) - 2w(i_{B \cap C})$, kde i_B, i_C chápeme jako slova z \mathbb{F}_2^v ,
- (2) U je symetrická čtvercová, $u_{ij} = |B_i \cap B_j| \forall i, j$ a $u_{ii} = |B_i|$,
- (3) V je symetrická čtvercová, $v_{ij} = |\{s \mid \{x_i, x_j\} \subseteq B_s\}| \forall i, j$ a $v_{ii} = |\{s \mid x_i \in B_s\}|$.

T&N. Pro $v, k, \lambda \in \mathbb{N}$ řekneme, že \mathcal{B} je *symetrický 2 - (v, k, λ) design*, pokud

- $v = |X| = |\mathcal{B}|$,
- $k = |B| = |\{C \in \mathcal{B} \mid x \in C\}|$ pro $\forall B \in \mathcal{B}$ a $\forall x \in X$,
- $\lambda = |B_i \cap B_j| = |\{C \in \mathcal{B} \mid \{x, y\} \subseteq C\}| \forall i \neq j$ a $\forall x \neq y \in X$.

Příklad 9.1. (1) Přímky Fanovy roviny, tj. projektivního prostoru $P_2(\mathbb{F}_2)$ všech jednodimenzionálních podprostorů vektorového prostoru \mathbb{F}_2^3 tvoří symetrický 2 - (7, 3, 1) design.



(2) Obecněji, nechť $\mathcal{P} = \{\text{LO}(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\}$, $B_V = \{p \in \mathcal{P} \mid p \subseteq V\}$, pak $\mathcal{B} = \{B_V \mid V \leq \mathbb{F}_q^3, \dim V = 2\}$ je symetrický $2 - (q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ design.

Pozorování. Systém \mathcal{B} s incidenční maticí $M \in \mathbb{Z}^{v \times v}$ je symetrický $2 - (v, k, \lambda)$ design,

právě když $MM^T = M^T M = \begin{pmatrix} k & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & k & \dots & \lambda \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda & \lambda & \dots & k \end{pmatrix}$.

Nyní sestrojíme $2 - (11, 5, 2)$ design.

Konstrukce

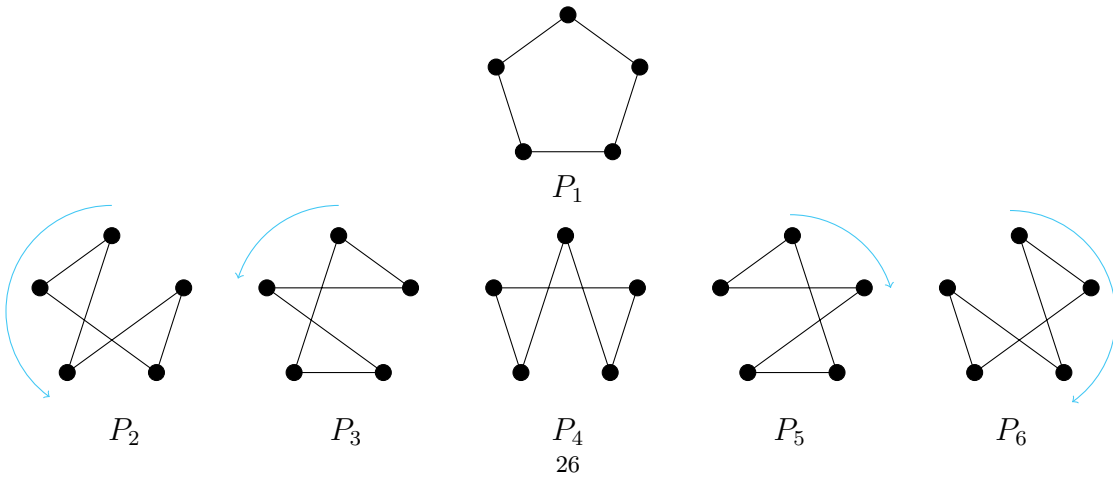
Nechť $Y = \{1, \dots, 5\}$, $Z = \{A \subset \mathcal{P}(Y) \mid |A| = 2\}$, $\Phi = \{\sigma \in S_5 \mid \sigma^5 = 1, \sigma \neq \text{id}\}$, $P_\varphi = \{\{i, \varphi(i)\} \mid i \in Y\} \forall \varphi \in \Phi$.

Pozorování. Pro množiny Y , Z , Φ a P_φ a $\forall \varphi, \psi \in \Phi$ platí:

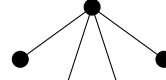
- (1) $|Z| = 10$, $|\Phi| = 24$, $|\{P_\varphi \mid \varphi \in \Phi\}| = 12$,
- (2) φ ani φ^{-1} nemají pevný bod, tudíž $P_\varphi \cap P_{\varphi^2} = \emptyset$,
- (3) jestliže $|P_\varphi \cap P_\psi| \geq 4$, potom $P_\varphi = P_\psi$,
- (4) jestliže $|P_\varphi \cap P_\psi| \leq 1$, potom $|P_{\varphi^2} \cap P_\psi| \geq 4$, a proto $P_\varphi \cap P_\psi = \emptyset$,

Definujme množiny

$$P_1 = P_{(12345)}, P_2 = P_{(14235)}, P_3 = P_{(14352)}, P_4 = P_{(13254)}, P_5 = P_{(13425)}, P_6 = P_{(13542)},$$



Položme $X = Z \cup \{0\}$ a $\forall i \in Y$:



$$F_i = \{\{i, a\} \mid a \in Y, a \neq i\} \cup \{0\} = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \cup \{0\},$$

yní zkonstruujeme symetrický $2 - (11, 5, 2)$ design: $\mathcal{B} = \{P_i \mid i \leq 6\} \cup \{F_j \mid j \leq 5\}$

T&N. Nechť $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, 2$. Pak $\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2$ (tj. systémy jsou izomorfní), pokud \exists bijekce $b : X_1 \rightarrow X_2$, pro níž $\mathcal{B}_2 = \{b(B) \mid B \in \mathcal{B}_1\}$.

Fakt 9.2. Systém \mathcal{B} z předchozí konstrukce je až na izomorfismus jediný symetrický $2 - (11, 5, 2)$ design.

Důkaz. Důkazu se na přednášce nebudeme věnovat, ale pro informaci ho zde alespoň naznačíme.

Fakt, že \mathcal{B} je $2 - (11, 5, 2)$ design, se snadno přímočaře ověří z definice (a do značné míry je vidět ze znázornění množin grafy). Uvážíme $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{P}(\tilde{X})$ jiný $2 - (11, 5, 2)$ design a naším úkolem je najít izomorfismus $\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$. Zvolíme nejprv libovolně $x_0 \in \tilde{X}$ a definujeme $\tilde{Z} = \tilde{X} \setminus \{x_0\}$, snadno nahlédneme, že existuje právě 5 množin \tilde{B} , které obsahují x_0 , a označíme je \tilde{F}_i , $i = 1, \dots, 5$. Z definice designu plyne, že pro všechna $i < j$ existuje právě jedno $x_{ij} \in \tilde{Z}$ splňující $\tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j = \{x_0, x_{ij}\}$.

Dále označíme $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{B}} \setminus \{\tilde{F}_i \mid i \leq 5\}$. To, že $\lambda = 2$ znamená, že $\{i < j\} \rightarrow x_{ij}$ je bijekce desetiprvkové množiny dvojic $\{i < j\}$ na \tilde{Z} , proto $\tilde{Z} = \{x_{ij} \mid i < j \leq 5\}$. Nyní definujeme bijekci $b : \tilde{X} \rightarrow X$: $b(x_0) = 0$ a $b(x_{ij}) = \{i, j\}$, která je hledaným izomorfismem. Zřejmě $\{b(\tilde{F}_i)\} = F_i$, a pokud $P_1 \notin \mathcal{P} = \{b(\tilde{B}) \mid \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{P}}\}$, změnilme pořadí \tilde{F}_i tak, aby $P_1 \in \mathcal{P}$. Vidíme, že množina $\mathcal{P} = \{b(\tilde{P}) \mid \tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}\}$ obsahuje P_1 a $|b(\tilde{P}_1) \cap b(\tilde{P}_2)| = 2$ pro všechna $\tilde{P}_1 \neq \tilde{P}_2 \in \tilde{\mathcal{P}}$. Na závěr zbývá uvážit, že pro $\{P_1, \dots, P_6\}$ je vzhledem k inkluzi největší podmnožina $\{P_\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$, která obsahuje P_1 a platí $|P_i \cap P_j| = 2$ pro všechny $i \neq j$, a že odtud plyne závěr $\tilde{\mathcal{B}} = \{b(\tilde{B}) \mid \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}\}$. \square

Důsledek 9.3. $\mathcal{C} = \{X \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$ pro \mathcal{B} z předchozí konstrukce tvoří až na izomorfismus jediný symetrický $2 - (11, 6, 3)$ design.

Důkaz. Definujme zobrazení $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ vztahem $c(A) = X \setminus A$ a označme M incidenční matici \mathcal{B} , N incidenční matici \mathcal{C} a $J = (1) \in \mathbb{Z}^{11 \times 11}$ matici sestávající ze samých hodnot 1. Potom vidíme, že $N = J - M$ a snadno spočítáme

$$N \cdot N^T = J^2 - JM^T - MJ + MM^T = 11J - 5J - 5J + MM^T = J + MM^T.$$

Podobně $N^T \cdot N = J + M^T M = J + MM^T$, proto

$$N \cdot N^T = N^T \cdot N = J + \begin{pmatrix} 5 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 5 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 2 & 2 & \dots & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 6 & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 3 & 3 & \dots & 6 \end{pmatrix}$$

a \mathcal{C} je tudíž symetrický $2 - (11, 6, 3)$ design.

Obdobně nahlédneme, že pro symetrický $2 - (11, 6, 3)$ design \mathcal{C} s incidenční maticí N platí pro incidenční maticí $M = J - N$ systému $c(\mathcal{C})$, že je $M^T M = M M^T = N^T N - J$, proto je $c(\mathcal{C})$ symetrický $2 - (11, 5, 2)$ design. Kdybychom nyní měli dva neizomorfní symetrické $2 - (11, 6, 3)$ designy, pak by je bijekce c převedla na neizomorfní $2 - (11, 5, 2)$ designy. Proto jsou i $2 - (11, 6, 3)$ designy určeny až na izomorfismus jednoznačně. \square

T&N. Nechť N je incidenční matice $2 - (11, 6, 3)$ designu a uvažujme blokové matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & & N & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & & & \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & & N & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & & \end{pmatrix},$$

kde $E \in \mathbb{F}_2^{12 \times 24}$ sestává z bloku s jednotkovou maticí I_{12} a dále z bloku tvořeným maticí N s řádkem nad a sloupcem vlevo obsahujícím na první souřadnici 0 a jinde 1 a $G \in \mathbb{F}_2^{12 \times 24}$ vznikne z E vypuštěním 13. sloupce.

Dále \mathcal{E} buď $[24, 12]_2$ -kód s generující maticí E a \mathcal{G} $[23, 12]_2$ -kód s generující maticí G .

Jestliže \mathcal{C} je blokový kód délky n a $f_i = |\{\mathbf{v} \in \mathcal{C} \mid w(\mathbf{v}) = i\}|$, pak se polynom $f_{\mathcal{C}} = \sum_{i=0}^n f_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ nazývá *váhový polynom* kódu \mathcal{C} .

$\mathbf{1}$ bude značit slovo, jehož všechny souřadnice mají hodnotu 1.

Pozorování. (1) \mathcal{E} je určen jednoznačně až na permutační ekvivalenci bez ohledu na konkrétní volbu incidenční matice N .

(2) Nechť \mathcal{C} je binární kód délky 23, velikosti 2^{12} a vzdálenosti 7. Protože $V_2(23, 3) = \sum_{i=0}^3 \binom{23}{i} = 1 + 23 + 23 \cdot 11 + 23 \cdot 77 = 2048 = 2^{23-12}$, je \mathcal{C} nutně 3-perfektní. Uvažíme, že každé slovo váhy i leží právě v jedné binární kouli $S(\mathbf{u}, 3)$ o poloměru 3 a středu v kódovém slově $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ váhy $w(\mathbf{u}) = i + j$ pro $-3 \leq j \leq 3$ a $w(\mathbf{u}) = i + j$ a označíme $c_{i,j}$ počet slov váhy i ležících v této kouli. Je-li $f_{\mathcal{C}} = \sum_{i=0}^n f_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ váhový polynom kódu \mathcal{C} , potom pro všechna $i \geq 3$ platí vztah $\binom{23}{i} = \sum_{s=-3}^3 c_{i,s} f_{i+s}$.

Hodnoty $c_{i,j}$ reprezentují počty slov váhy i , které dostaneme z kódového slova $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ váhy $i + j$ pomocí daných bitových změn. Kombinatorickou úvahou určíme hodnoty koeficientů:

$$c_{i,-3} = \binom{23-i+3}{3} \text{ je počet 3 bitových změn } 0 \rightarrow 1 \text{ pro } w(\mathbf{u}) = i - 3,$$

$$c_{i,-2} = \binom{23-i+2}{2} \text{ je počet 2 změn } 0 \rightarrow 1 \text{ pro } w(\mathbf{u}) = i - 2,$$

$$c_{i,-1} = \binom{i-1}{1} \binom{23-i+1}{2} + \binom{23-i+1}{1}: 1 \times 0 \rightarrow 1 \text{ nebo } 2 \times 0 \rightarrow 1 \text{ a } 1 \times 1 \rightarrow 0 \text{ pro } w(\mathbf{u}) = i - 1,$$

$$c_{i,0} = 1 + \binom{i}{1} \binom{23-i}{1}: \text{slovo } \mathbf{u} \text{ nebo } 1 \times 0 \rightarrow 1 \text{ a } 1 \times 1 \rightarrow 0 \text{ pro } w(\mathbf{u}) = i,$$

$$c_{i,1} = \binom{i+1}{2} \binom{23-i-1}{1} + \binom{i+1}{1}: 1 \times 1 \rightarrow 0 \text{ nebo } 2 \times 1 \rightarrow 0 \text{ a } 1 \times 0 \rightarrow 1 \text{ pro } w(\mathbf{u}) = i + 1,$$

$$c_{i,2} = \binom{i+2}{2}: 2 \times 1 \rightarrow 0 \text{ pro } w(\mathbf{u}) = i + 2,$$

$$c_{i,3} = c_{i,3} = \binom{i+3}{3}: 3 \times 1 \rightarrow 0 \text{ pro } w(\mathbf{u}) = i + 3.$$

Jestliže navíc kód \mathcal{C} obsahuje slovo $\mathbf{0}$, platí, že $f_0 = 1$, $f_i = 0$ pro $i = 1, \dots, 6$ a rekurzí spočítáme váhový polynom

$$f_{\mathcal{C}} = 1 + 253x^7 + 506x^8 + 1288x^{11} + 1288x^{12} + 506x^{15} + 253x^{16} + x^{23}$$

T&N. Kód \mathcal{C} je *dvojnásobně sudý*, jestliže 4 dělí $w(\mathbf{u})$ pro každé slovo $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$.

Poznámka 9.4. Necht $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \dots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix}$ je generující matice $[n, k]_2$ -kódu \mathcal{C} .

- (1) \mathcal{C} je samoortogonální, právě když $w(\mathbf{c}_i \cap \mathbf{c}_j)$ je sudá pro všechna i, j ,
- (2) samoortogonální kód \mathcal{C} je dvojnásobně sudý, právě když 4 dělí $w(\mathbf{c}_i) \forall i \leq k$.

Důkaz. (1) \mathcal{C} je samoortogonální, právě když $\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0$ všechna i, j , což nastává právě když $2|w(\mathbf{c}_i \cap \mathbf{c}_j)|$ pro všechna i, j .

(2) (\Rightarrow) Řádky matice \mathbf{G} jsou kódová slova, proto je jejich váha dělitelná 4.

(\Leftarrow) Pro všechna $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ existuje jediná množina $I \subseteq \{1, \dots, k\}$, pro niž $\mathbf{u} = \sum_{i \in I} \mathbf{c}_i$. Označíme $\delta(\mathbf{u}) = |I|$ a dokážeme tvrzení, že 4 dělí $w(\mathbf{u})$, indukcí podle $\delta = \delta(\mathbf{u})$.

Pro $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ splňující $\delta(\mathbf{u}) = 0$ není co dokazovat, a pokud $\delta(\mathbf{u}) = 1$, pak existuje i splňující $\mathbf{u} = \mathbf{c}_i$, tedy $4|w(\mathbf{u})$ podle předpokladu.

Necht tvrzení platí pro $\delta > 0$ a $\delta(\mathbf{u}) = \delta + 1$. Pak existuje $\mathbf{v}, \mathbf{c} \in \mathcal{C}$, pro něž $\delta(\mathbf{v}) = \delta$, $\delta(\mathbf{c}) = 1$ a $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{c}$. Z indukčního předpokladu víme, že 4 dělí váhy $w(\mathbf{v})$ i $w(\mathbf{c})$, a protože $w(\mathbf{v} \cap \mathbf{c})$ je sudá díky (1), dělí 4 váhu $w(\mathbf{u}) = w(\mathbf{v} + \mathbf{c}) = w(\mathbf{v}) + w(\mathbf{c}) - 2w(\mathbf{v} \cap \mathbf{c})$. \square

Poznámka 9.5. \mathcal{E} je samoduální dvojnásobně sudý $[24, 12, 8]_2$ -kód a \mathcal{G} je 3-perfektní $[23, 12, 7]_2$ -kód.

Důkaz. Označme si řádky matice E po řadě $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{12}$. Všimneme si, že $w(\mathbf{u}_1) = 12$ a využijeme předpoklad, že matice je N maticí $2 - (11, 6, 3)$ designu, abychom nahlédli, že $w(\mathbf{u}_i) = 8$, $w(\mathbf{u}_1 \cap \mathbf{u}_i) = 6$ pro všechna $i > 1$ a $w(\mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_j) = 4$ pro všechna $i > j > 1$.

Ze sudosti hodnot $w(\mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_j)$ díky 9.4(1) plyne, že je \mathcal{E} , který obsahuje právě 2^{12} slov, samoduální a podle 9.4(2) i dvojnásobně sudý. Z vah $w(\mathbf{u}_i)$ okamžitě vidíme, že platí nerovnost $d(\mathcal{E}) \leq w(\mathbf{u}_i) \leq 8$. Uvážíme nyní sporný předpoklad $d(\mathcal{E}) < 8$, z něž pro dvojnásobně sudý kód plyne $d(\mathcal{E}) = 4$. To znamená, že existuje $I \subset \{1, \dots, 12\}$, pro něž $\mathbf{v} = v_1 \dots v_{24} = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i$ a $w(\mathbf{v}) = 4$. Potom $\mathbf{v} = i_I \cdot E$, a proto $1 < |I| \leq w(\mathbf{v}) = 4$. Vezmeme kontrolní matici \mathcal{E} zajištěnou poznámkou 2.1:

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & N^T & & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & & & & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{u}}_{12} \end{pmatrix},$$

která je zároveň generující maticí samoduálního kódu \mathcal{E} . Její řádky $\tilde{\mathbf{u}}_i$ mají stejné vlastnosti jako slova \mathbf{u}_i , neboť rovněž N^T je incidenční matice symetrického $2 - (11, 6, 3)$ designu, proto existuje množina indexů $\tilde{I} \subset \{1, \dots, 12\}$, pro něž $\mathbf{v} = \sum_{i \in \tilde{I}} \tilde{\mathbf{u}}_i$. Protože stejně jako v případě množiny I ani množina \tilde{I} nemůže být jednoprvková, dostáváme, že $1 < |\tilde{I}| \leq 4$ a uvědomíme-li si, že

$$4 = w(\mathbf{v}) = w(\pi_{\{13, \dots, 24\}} \mathbf{v}) + w(\pi_{\{1, \dots, 12\}} \mathbf{v}) = |I| + |\tilde{I}|,$$

dostáváme, že $1 < |I| < 3$. Proto $|I| = 2$ a tedy existují $i \neq j$, pro které

$$4 = w(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j) = w(\mathbf{u}_i) + w(\mathbf{u}_j) - 2w(\mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_j) = 8,$$

což je spor. Dokázali jsme, že je \mathcal{E} vzdálenosti 8

Protože \mathcal{G} vznikne z \mathcal{E} propíchnutím v 13. souřadnici, jedná se podle předchozího pozorování o 3-perfektní $[23, 12, 7]_2$ -kód. \square

Věta 9.6. Až na permutační ekvivalenci existuje právě jeden $[24, 12, 8]_2$ -kód, který je samoduální, dvojnásobně sudý a obsahuje slovo váhy 12. Kód je permutačně ekvivalentní \mathcal{E} a jeho propíchnutí v kterékoli souřadnici je permutačně ekvivalentní \mathcal{G} .

Důkaz. Existence plyne z 9.5, neboť slovo váhy 12 je na prvním řádku generující matice E .

Nechť $[24, 12, 8]_2$ -kód \mathcal{C} splňuje předpoklady tvrzení a zvolme souřadnici i , v níž bude kód propíchnovat. Protože jsou váhy \mathcal{C} sudé platí, že $\mathbf{1} \cdot \mathbf{v} = 0$ pro každé $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$, máme $\mathbf{1} \in \mathcal{C}^\perp = \mathcal{C}$. Podle předpokladu existuje slovo $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ váhy 12, proto $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{1} + \mathbf{u} \in \mathcal{C}$ a $w(\mathbf{u}) = w(\tilde{\mathbf{u}}) = 12$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat (tj. permutujeme souřadnice, případně slova \mathbf{u} a $\tilde{\mathbf{u}}$ vyměníme), že $i = 1$,

$$\mathbf{u} = 000000000000111111111111 \quad \text{a} \quad \tilde{\mathbf{u}} = 111111111111000000000000.$$

Nyní uvážíme propíchnutí $\pi_I : \mathbb{F}_2^{24} \rightarrow \mathbb{F}_2^{12}$ v souřadnicích $I = \{13, \dots, 24\}$. Předpokládáme-li, že $\mathbf{v} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ a $\pi_I(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, dostaneme $w(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + w(\mathbf{v}) = 12$, $w(\mathbf{v}) \geq 8$, a proto $w(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq 4$. Protože je kód vzdálenosti 8, vidíme, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, tudíž $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ a o jádru restrikce $\pi_I|_{\mathcal{C}}$ obsahuje pouze slova $\mathbf{0}, \mathbf{u}$. Protože $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{c} = 0$ pro všechna slova $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ je $\pi_I(\mathcal{C})$ $[12, 11]_2$ -kód s kontrolní maticí $\mathbf{1} \in \mathbb{F}_2^{1 \times 12}$, tedy paritní kód. To znamená, že umíme zkonstruovat generující matici C kódu \mathcal{C} , na jejímž prvním řádku bude slovo \mathbf{u} a levý blok 11×12 pod ním bude tvořit generující matice paritního kódu. První sloupec zbývajících pravého bloku můžeme vzít nulový, protože nulování případných nenulových hodnot přičtením prvního řádku matice nezmění prvních dvanáct sloupců C ani samotný kód \mathcal{C} :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & & 0 & & & \\ \cdot & & I_{11} & & \cdot & & & M \\ 1 & & & & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Vyměníme-li nyní 1. a 13. sloupec matice C dostaneme, generující matici

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & & & M \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & & & \end{pmatrix},$$

permutačně ekvivalentního kódu $\tilde{\mathcal{C}}$. Nyní stačí díky 9.3 ukázat, že je M incidenční matice $2 - (11, 6, 3)$ designu.

Označme řádky matice \tilde{C} po řadě $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_{11}$ a řádky matice M $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{11}$. Protože je \mathcal{C} dvojnásobně sudý kód, 4 dělí $w(\mathbf{c}_i)$ i $w(\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j)$ a $d(\mathcal{C}) = 8$ vidíme, že $w(\mathbf{v}_i), w(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) \in \{6, 10\}$. Ukážeme, že připadá v úvahu pouze hodnota 6.

Kdyby $w(\mathbf{v}_i) = 10$, pak by $w(\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_0) = 2 + 2 = 4$, z čehož plyne spor.

Kdyby $w(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) = 10$, pak by $w(\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j + \mathbf{c}_0) = 2 + 2 = 4$, opět tedy dostáváme spor.

Proto pro $i \neq j$

$$6 = w(\mathbf{v}_i) = w(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) = w(\mathbf{v}_i) + w(\mathbf{v}_j) - 2w(\mathbf{v}_i \cap \mathbf{v}_j),$$

z čehož plyne, že $w(\mathbf{v}_i \cap \mathbf{v}_j) = 3$. Totéž lze dokázat i pro matici M^T , neboť

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & M^T & & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & & & & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

je rovněž je generující matice samoduálního kódu $\tilde{\mathcal{C}}$.

Tedy M je incidenční matice symetrického $2 - (11, 6, 3)$ designu, která je podle 9.3 určena až na permutaci řádků a sloupců jednoznačně. Nyní je už snadné nahlédnout že je původní kód permutačně ekvivalentní kódu \mathcal{E} a jeho propíchnutí v libovolné předem zvolené souřadnici je permutačně ekvivalentní kódu \mathcal{G} . \square

Poznámka 9.7. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^{2^k}$, kde $k = \log_2 |\mathcal{C}|$. Jestliže buď

- (a) \mathcal{C} je samoortogonální nebo
- (b) $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$ a $\mathbf{u} + \mathcal{C}$ je pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ dvojnásobně sudý,

pak je \mathcal{C} samoduální a tedy lineární kód.

Důkaz. Nechť platí (a). Pak $\mathcal{C} \subseteq \text{LO}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}^\perp \subseteq (\text{LO}(\mathcal{C}))^\perp$, proto $2^k = |\mathcal{C}| \leq |\text{LO}(\mathcal{C})|$ a $\dim(\text{LO}(\mathcal{C})) \geq k$. Uvážíme-li, že $\dim((\text{LO}(\mathcal{C}))^\perp) \leq k$, vidíme, že $2^k = |\mathcal{C}| \leq |\text{LO}(\mathcal{C})| \leq |(\text{LO}(\mathcal{C}))^\perp| \leq 2^k$, čímž jsme ověřili, že $\mathcal{C} = \text{LO}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^\perp$.

Předpokládejme, že platí (b), stačí nám ověřit platnost (a).

Všimněme si, že pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ plyne z předpokladů, že 4 dělí všechny tři hodnoty

$$w(\mathbf{u}) = w(\mathbf{0} + \mathbf{u}), \quad w(\mathbf{v}) = w(\mathbf{0} + \mathbf{v}), \quad w(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

Proto 4 dělí i $2w(\mathbf{u} \cap \mathbf{v}) = w(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - w(\mathbf{u}) - w(\mathbf{v})$, tedy váha $w(\mathbf{u} \cap \mathbf{v})$ je sudá a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Ověřili jsme, že je \mathcal{C} samoortogonální. \square

Věta 9.8. Až na permutační ekvivalenci existují jednoznačně určené binární kódy $\tilde{\mathcal{G}}$ a $\tilde{\mathcal{E}}$ velikosti 2^{12} obsahující nulové slovo, první délky 23 a vzdálenosti 7 a druhý délky 24 a vzdálenosti 8. Tyto kódy jsou nutně lineární a platí, že $\tilde{\mathcal{G}}$ je permutačně ekvivalentní \mathcal{G} , $\tilde{\mathcal{E}}$ je permutačně ekvivalentní \mathcal{E} a $f_{\tilde{\mathcal{E}}} = 1 + 759x^8 + 2576x^{12} + 759x^{16} + x^{24}$.

Důkaz. Existence plyne z 9.5 a zbývá dokázat jednoznačnost.

Propíchnutí v i -té souřadnici $\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})$ tvoří kód velikosti 2^{12} obsahující nulové slovo, podle pozorování jde o 3-perfektní kód vzdálenosti 7 s váhovým polynomem $f_{\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})} = 1 + 253x^7 + 506x^8 + 1288x^{11} + 1288x^{12} + 506x^{15} + 253x^{16} + x^{23}$.

Protože pro každé $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{E}} \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ existují $j, k \leq 24$ splňující $w(\pi_j(\mathbf{u})) = w(\pi_k(\mathbf{u})) - 1$. Kód $\tilde{\mathcal{E}}$ neobsahuje slovo váhy 7, tedy všechna slova váhy 7 kódu $\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})$ vznikla ze slov váhy 8. Kdyby $\tilde{\mathcal{E}}$ obsahoval slovo váhy 11, 15 nebo 23, pak by pro vhodné i obsahoval kód $\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})$ slovo o jedna menší váhy, což neplatí. Podobně $\tilde{\mathcal{E}}$ nemůže obsahovat slova váhy 9, 13, ani 17, protože by v opačném případě obsahoval pro vhodné i kód $\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})$ slova téže váhy. Proto $f_{\tilde{\mathcal{E}}} = 1 + 759x^8 + 2576x^{12} + 759x^{16} + x^{24}$, tedy $\tilde{\mathcal{E}}$ je dvojnásobně sudý. Protože $\mathbf{v} + \tilde{\mathcal{E}}$ má stejné parametry jako $\tilde{\mathcal{E}}$, je to dvojnásobně sudý kód pro všechna $\mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{E}}$ a tedy je $\tilde{\mathcal{E}}$ lineární samoduální kód podle 9.7 a $\tilde{\mathcal{E}}$ je permutačně ekvivalentní \mathcal{E} podle 9.6.

Splňuje-li $\tilde{\mathcal{G}}$ předpoklady tvrzení, pak kód $\hat{\mathcal{E}} = \{c_1 \dots c_{23} \sum_i c_i \mid c_1 \dots c_{23} \in \tilde{\mathcal{G}}\}$ má délku 24, je vzdálenosti 8, mohutnosti 2^{12} a obsahuje $\mathbf{0}$. Odtud plyne, že $\hat{\mathcal{E}}$ je permutačně ekvivalentní \mathcal{E} . Protože $\pi_{24}(\hat{\mathcal{E}}) = \tilde{\mathcal{G}}$ je díky 9.6 permutačně ekvivalentní \mathcal{G} .

Zbytek plyne z poznámky 9.5. □

Důsledek 9.9. Je-li \mathcal{C} binární kód velikosti 2^{12} délky 23 a vzdálenosti 7, pak pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ je kód $\mathbf{u} + \mathcal{C}$ permutačně ekvivalentní \mathcal{G} , proto je \mathcal{C} permutačně ekvivalentní $\mathbf{u} + \mathcal{G}$.

Konvoluční kódy

10. KÓDUJME KONVOLUČNÍM KÓDEM!

Zbývající kapitoly budou věnovány odlišnému konceptu kódování, kdy budeme pracovat nikoli s množinou přípustných kódových slov, nýbrž s množinou přípustných posloupností kódových slov, které budou kódovat všechny posloupnosti slov totálního kódu. V úvodní části nastíníme formalizaci problematiky a kromě základních pojmů konvolučního kódu a konvolučního kódovače, zavedeme klíčové nástroje jejich popisu. Na závěr kapitoly si uvědomíme, že naše definice fyzického konvolučního kódovače detailně popisuje jeho technickou realizaci jako elektrického obvodu.

V celé kapitole předpokládáme, že \mathbb{F} je konečné těleso a D neznámá.

T&N. Na množině formálních *Laurentových řad* $\mathbb{F}((D)) = \{\sum_{i \geq r} u_i D^i \mid r \in \mathbb{Z}, u_i \in \mathbb{F}\}$ uvažujme obvyklé operace

$$\sum_{i \geq r} u_i D^i \pm \sum_{i \geq s} v_i D^i = \sum_{i \geq \min(r,s)} (u_i \pm v_i) D^i, \quad \sum_{i \geq r} u_i D^i \cdot \sum_{i \geq s} v_i D^i = \sum_{i \geq r+s} \sum_{k=r}^{i-s} u_k v_{i-k} D^i,$$

kde položíme $u_i = v_j = 0 \forall i < r, j < s$. Dále značme:

$\mathbb{F}[[D]] = \{\sum_{i \geq 0} u_i D^i \mid u_i \in \mathbb{F}\}$ - formální mocninné řady,

$\mathbb{F}[D] = \{\sum_{i \geq 0} u_i D^i \in \mathbb{F}[[D]] \mid \exists n \in \mathbb{N} : u_i = 0 \forall i > n\}$ - polynomy,

Poznámka 10.1. $\mathbb{F}((D))$ tvoří s výše zavedenými operacemi a konstantami 0 a 1 komutativní těleso a $\mathbb{F}[D], \mathbb{F}[[D]]$ jsou jeho podokruhy.

Důkaz. Obdobnými argumenty jako v případě oboru polynomů je snadné nahlédnout, že $\mathbb{F}((D))$ představuje komutativní okruh. Abychom ověřili, že jde o těleso, vezeme nenulový prvek $f \in \mathbb{F}((D))$. Potom existuje celé číslo d , mocninná řada $g \in \mathbb{F}[[D]]$ s nenulovým absolutním členem, pro kterou $f = D^d g$, a mocninná řada $h = \sum h_i D^i$ s koeficienty danými rekurentním vztahem $h_n = -g_0^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} h_i g_{n-i}$ pro počáteční podmínku $h_0 = g_0^{-1}$, která je inverzní k řadě g , a protože $g^{-1} = h$, vidíme, že $f^{-1} = D^{-d} h$.

Důkaz uzavřenost množin $\mathbb{F}[D], \mathbb{F}[[D]]$ na operace je zcela přímočarý a ponecháme ho čtenáři jako snadné cvičení. \square

T&N. Prvkům podílového tělesa $\mathbb{F}(D) = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{F}[D], q \neq 0\}$ oboru $\mathbb{F}[D]$ říkáme *racionální funkce*. Racionální funkce $f \in \mathbb{F}(D)$ je *realizovatelná*, pokud $f = \frac{p}{q}$ pro vhodný polynom p a polynom s nenulovým absolutním členem q .

Pozorování. Uvažujme zobrazení $\nu : \mathbb{F}(D) \rightarrow \mathbb{F}((D))$ dané vztahem $\nu(\frac{p}{q}) = p \cdot q^{-1}$.

- (1) ν je dobře definovaný prostý okruhový homomorfismus,
- (2) $f \in \mathbb{F}(D)$ je realizovatelná, právě když $\nu(f) \in \mathbb{F}[[D]]$.

T&N. Nadále budeme ztotožňovat prvky $\mathbb{F}(D)$ a $\nu(\mathbb{F}(D))$ a prvkům $\nu(\mathbb{F}(D)) \cap \mathbb{F}[[D]]$ budeme říkat *realizovatelné řady*.

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\mathbb{F}^n((D)) = \{\sum_{i \geq r} \mathbf{u}_i D^i \mid r \in \mathbb{Z}, \mathbf{u}_i \in \mathbb{F}^n\}$, kde souřadnice značíme horními indexy $\mathbf{u}_i = u_i^{(1)} \dots u_i^{(n)}$.

Pozorování. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí, že

- (1) zobrazení $\mu(\sum_{i \geq r} \mathbf{u}_i D^i) = (\sum_{i \geq r} u_i^{(1)} D^i, \dots, \sum_{i \geq r} u_i^{(n)} D^i)$ je bijekce $\mathbb{F}^n((D))$ na $\mathbb{F}((D))^n$,
- (2) $\mathbb{F}((D))^n$ představuje aritmetický vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}((D))$ a jeho strukturu můžeme pomocí bijekce μ přenést na množinu $\mathbb{F}^n((D))$, zobrazení μ se tak stane izomorfismem vektorových prostorů.

Na základě předchozího pozorování budeme nadále ztotožňovat prvky prostorů $\mathbb{F}^n((D))$ a $\mathbb{F}((D))^n$ prostřednictvím izomorfismu μ .

Definice. Je-li $B \subset \mathbb{F}(D)^n$, nazveme $\mathcal{C} = LO(B) \subseteq \mathbb{F}((D))^n$ *konvoluční kód* s parametry (n, k) , pokud $\dim_{\mathbb{F}((D))} \mathcal{C} = k$. Každou matici $G \in (\mathbb{F}(D) \cap \mathbb{F}[[D]])^{k \times n}$, jejíž řádky tvoří bázi \mathcal{C} , nazveme *generující maticí* konvolučního kódu \mathcal{C} . Pokud $G \in \mathbb{F}[D]^{k \times n}$ mluvíme o *polynomiální generující matici*.

Poznámka 10.2. Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}((D))^n$ konvoluční kód, pak

- (1) existuje nějaká polynomiální generující matice \mathcal{C} ,
- (2) je-li $G = (g_{ij})$ generující matice \mathcal{C} , pak existují polynomy $p_{ij}, q_i \in \mathbb{F}[D]$, pro něž platí, že $q_i(0) = 1$, $\text{nsd}(p_{i1}, \dots, p_{ic}, q_i) = 1$ a $g_{ij} = \frac{p_{ij}}{q_i}$ pro $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$,
- (3) všechny polynomy z bodu (2) (a tedy i jejich stupně) jsou maticí G určeny jednoznačně.

Důkaz. (1) Nejprve vybereme z generující množiny $B \subseteq \mathbb{F}(D)^n$ předpokládané definicí libovolnou bázi $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$ kódu \mathcal{C} . Pro ni existují polynomy $f_{ij}, q_{ij} \in \mathbb{F}[D]$, $i \leq k$, $j \leq n$ splňující $\mathbf{b}_i = (\frac{f_{i1}}{q_{i1}}, \dots, \frac{f_{in}}{q_{in}})$ pro všechna i a položíme $q = \text{nsn}(q_{ij} \mid i \leq k, j \leq n)$ a

$\mathbf{g}_i = q \cdot \mathbf{b}_i$. Odtud plyne, že $G = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \dots \\ \mathbf{g}_k \end{pmatrix}$ je generující matice konvolučního kódu \mathcal{C} .

(2) Nechť $g_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_{ij}}$ pro nesoudělné f_{ij} a q_{ij} a $q_{ij}(0) \neq 0$, což můžeme předpokládat, pro všechna i, j .

Pro každé i položíme $\tilde{q}_i = \text{nsn}(q_{ij} \mid j \leq n)$, dále $q_i = \frac{\tilde{q}_i}{q_i(0)}$, což znamená, že $q_i(0) = 1$, a $p_{ij} = f_{ij} \frac{q_i}{q_{ij}}$ pro všechna $j = 1, \dots, n$. Ukážeme, že $\text{nsd}(p_{i1}, \dots, p_{in}, q_i) = 1$.

Předpokládejme, že existuje ireducibilní polynom r , který dělí všechny p_{i1}, \dots, p_{in} i q_i . Kdyby $r \mid f_{ij}$ pro všechna j , pak by r nedělilo q_{ij} pro žádné j , a tudíž by r nedělilo q_i , což je ve sporu s předpokladem. Nechť nyní $\emptyset \neq J = \{j \mid r \text{ nedělí } f_{ij}\}$. Potom $r \mid \frac{q_i}{q_{ij}}$, a proto $q_{ij} r \mid q_i$ pro všechna $j \in J$, tudíž r dělí $\frac{q_i}{\text{nsn}(q_{ij} \mid j \in J)}$. Odtud plyne, že existuje $j \notin J$, pro něž r dělí q_{ij} , tudíž r nedělí f_{ij} , což je spor s volbou J .

(3) Stačí nám pro každé i ukázat jednoznačnost volby q_i . Zvolme i, j libovolně. Protože $\frac{f_{ij}}{q_{ij}} = \frac{p_{ij}}{q_i}$, dostáváme, že $q_i = q_{ij} \frac{p_{ij}}{f_{ij}}$, což je polynom, kde f_{ij} a q_{ij} jsou nesoudělné a $\frac{p_{ij}}{f_{ij}}$ je polynom. Tudíž q_i je společný násobek polynomů q_{i1}, \dots, q_{ic} . Budeme-li předpokládat, že existuje polynom r , který dělí $\frac{q_i}{\text{nsn}(q_{i1}, \dots, q_{ic})}$, pak r dělí polynom $\frac{q_i}{q_{ij}} = \frac{p_{ij}}{f_{ij}}$ v oboru $\mathbb{F}[D]$, proto r dělí i p_{ij} pro všechna i, j , což je spor. Tím jsme dokázali, že q_i je až na skalární násobek určen jednoznačně a uvážíme-li konečně, že se absolutní člen polynomů q_i rovná 1, jsou všechny polynomy určeny jednoznačně. \square

T&N. Uvážíme-li vyjádření generující matice $G = \left(\frac{p_{ij}}{q_j}\right)$ konvolučního kódu z 10.2(2), pak definujeme $\nu_i = \max(\deg(p_{i1}), \dots, \deg(p_{ic}), \deg(q_i))$ a hodnotu $\text{extdeg}(G) = \sum_{i=1}^k \nu_i$ nazveme *vnější stupeň* matice G .

Věta 10.3. Jsou-li G a \tilde{G} dvě generující matice konvolučního kódu \mathcal{C} s minimálním vnějším stupněm $\nu = \sum_{i=1}^k \nu_i = \sum_{i=1}^k \tilde{\nu}_i$, kde ν_i a $\tilde{\nu}_i$ jsou zavedeny stejně jako výše a $\nu_1 \leq \dots \leq \nu_k$ a $\tilde{\nu}_1 \leq \dots \leq \tilde{\nu}_k$, pak $\nu_i = \tilde{\nu}_i$ pro všechna $i = 1, \dots, k$.

Důkaz. Označme si řádky generujících matic $G = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \dots \\ \mathbf{g}_k \end{pmatrix}$ a $\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{g}}_1 \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{g}}_k \end{pmatrix}$ a ke sporu

předpokládejme, že existuje i , pro něž $\nu_i \neq \tilde{\nu}_i$. Vezměme nejmenší takové i a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\nu_i < \tilde{\nu}_i$. Doplníme-li nyní bázi $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_i$ na bázi $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_i, \tilde{\mathbf{g}}_{j_1}, \dots, \tilde{\mathbf{g}}_{j_{k-i}}$ konvolučního kódu \mathcal{C} pomocí řádků generující matice \tilde{G} , což nám

umožňuje Steinitzova věta o výměně, potom je matice $\hat{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \dots \\ \mathbf{g}_i \\ \tilde{\mathbf{g}}_{j_1} \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{g}}_{j_{k-i}} \end{pmatrix}$ rovněž generující

maticí konvolučního kódu \mathcal{C} a dostáváme

$$\text{extdeg}(\hat{G}) = \sum_{s=1}^i \nu_s + \sum_{s=1}^{k-i} \tilde{\nu}_{j_s} \leq \sum_{s=1}^i \nu_s + \sum_{s=i+1}^k \tilde{\nu}_s = \nu_i + \sum_{s \neq i} \tilde{\nu}_s < \sum_{s=1}^k \tilde{\nu}_s = \nu,$$

což je spor s minimalitou volby ν . □

Definice. Hodnotám ν_i z předchozí věty pro generující matici G kódu \mathcal{C} s minimálním vnějším stupněm, se říká *Forneyho indexy* kódu a hodnota $\deg \mathcal{C} = \sum_{i=1}^k \nu_i$, tedy minimální vnější stupeň mezi všemi generujícími maticemi, se nazývá *stupeň* konvolučního kódu \mathcal{C} .

Je-li G generující matice konvolučního kódu \mathcal{C} s parametry (n, k) , pak zobrazení $K : \mathbb{F}((D))^k \rightarrow \mathbb{F}((D))^n$ dané podmínkou $K(\mathbf{u}) = \mathbf{u}G$ nazveme *konvoluční kódovač* a dvojici (K, G) *fyzický konvoluční kódovač*.

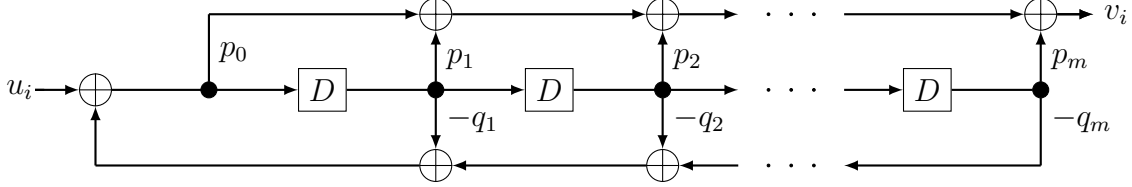
Pozorování. Je-li (K, G) fyzický konvoluční kódovač pro $G = \left(\frac{p_{ij}}{q_i}\right)$ generující matici konvolučního kódu \mathcal{C} s parametry (n, k) a $\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{u}_i D^i \in \mathbb{F}((D))^k$, pak

- (1) $K(\mathbb{F}((D))^k) = \mathcal{C}$ a K je prosté lineární zobrazení,
- (2) $\mathbf{v}^{(j)} = \sum_i \mathbf{v}_i^{(j)} D^i = \sum_{s=1}^k \mathbf{u}^{(s)} \frac{p_{sj}}{q_s}$ pro $\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{v}_i D^i = K(\mathbf{u})$.

V předchozím pozorování jsme si uvědomili, že fyzický konvoluční kódovač umíme vždy vyjádřit jako jistou konečnou posloupnost součtů konvolucí s realizovatelnou racionální funkcí. Následující znázornění konvoluce obvodem nepředstavuje jen formální zápis realizovatelné racionální funkce pomocí schématu, nýbrž ukazuje, jak konvoluční kódovač „fyzicky“ realizovat pomocí elektrického obvodu, do něž vstupuje jistou frekvencí posloupnost signálů hodnoty u_i , symbol \boxed{D} představuje součástku zpožďující výstup proti

vstupu o jednu časovou jednotku a \oplus spolu ohodnocením hrany znamená přičtení násobku hodnoty na vstupu.

T&N. Jestliže $p = \sum_{i=0}^m p_i D^i, q = \sum_{i=0}^m q_i D^i \in \mathbb{F}[D]$, kde $m \geq \max(\deg p, \deg q)$, splňují předpoklady 10.2(2) (a tedy $q_0 = 1$), pak pro $u = \sum_{i \geq z} u_i D^i \in \mathbb{F}((D))$ a $v = \sum_{i \geq z} v_i D^i = u \cdot \frac{p}{q}$ následující schéma znamená, že je konvoluce $u \cdot \frac{p}{q}$ realizována obvodem:

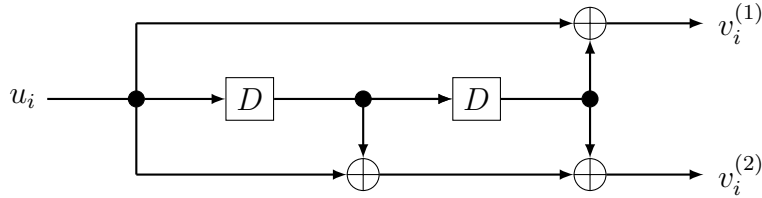


Poznamenejme, že ohodnocení hrany nulou se obvykle znázorňuje vypuštěním hrany představující vodič (a příslušný čítač tak můžeme rovněž vypustit) a ohodnocení hodnotou 1 se vynechává. Pro společné vstupy navíc budeme často shodné části obvodů spojovat do jednoho schématu.

Příklad 10.4. Uvážíme fyzický konvoluční kódovač (K, G) pro generující matici $G = \begin{pmatrix} 1 + D^2 & 1 + D + D^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2[D]^{1 \times 2}$. Pro vstup $u = \sum_i u_i D^i \in \mathbb{F}_2((D))$ tak vyjádříme

$$K(u) = \sum_i u_i D^i \begin{pmatrix} 1 + D^2 & 1 + D + D^2 \end{pmatrix} = \left(\sum_i (u_i + u_{i-2}) D^i, \sum_i (u_i + u_{i-1} + u_{i-2}) D^i \right).$$

Fyzický konvoluční kódovač ještě realizujeme obvodem, v němž chybí „zpětná vazba“ díky triviálnímu jmenovateli a naopak segment obsahující vstup a zpožďovače je pro oba obvody společný (jak by tomu opravdu bylo v případě fyzikální realizace elektrickým obvodem):



11. KONVOLUČNÍ KÓDOVAČ: OBVOD NEBO PŘEKLADAČ?

Rozmyslíme si, že konvoluční kódovač můžeme pojmout jako jistý typ překladače, který nám díky znalosti hodnoty a stavu systému v daném časovém okamžiku umožní algoritmicky určit následující hodnoty a stavy. Vedle toho nahlédneme, jak náš pojem fyzického konvolučního kódovače souvisí s jeho algoritmickým pojetím.

Definice. Pro $n, k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $z \in \mathbb{Z}$ uvážíme čtveřici matic $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $Q \in \mathbb{F}^{k \times m}$, $R \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $S \in \mathbb{F}^{k \times n}$ určujících zobrazení

$$\delta : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^m, \quad \lambda : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$$

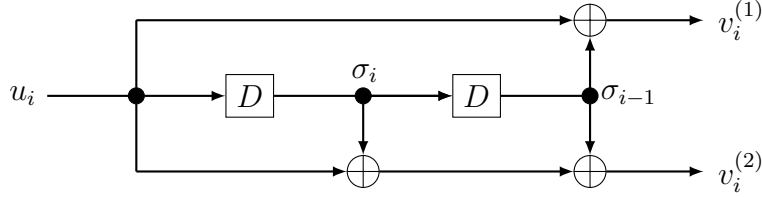
$$\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P + \mathbf{u}Q, \quad \lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R + \mathbf{u}S.$$

Jestliže $u = \sum_{i \geq z} \mathbf{u}_i D^i \in \mathbb{F}((D))^k$ položíme $\mathbf{s}_z = \mathbf{0} \in \mathbb{F}^m$ a dále pro všechna $i \geq z$

$$\mathbf{s}_{i+1} = \delta(\mathbf{s}_i, \mathbf{u}_i), \quad \mathbf{v}_i = \lambda(\mathbf{s}_i, \mathbf{u}_i), \quad K(u) = \sum_{i \geq z} \mathbf{v}_i D^i.$$

Je-li zobrazení K prosté, potom trojici (K, δ, λ) nazveme *abstraktní konvoluční kódovač s přechodovou funkcí δ , výstupní funkcí λ , parametry (n, k, m) a stavovým prostorem \mathbb{F}^m .*

Příklad 11.1. Označíme v obvodu z příkladu 10.4 σ_i a σ_{i-1} hodnoty po prvním a druhém použití zpoždovače \boxed{D} v čase i (tedy v okamžiku, kdy máme na vstupu hodnotu u_i) a dvojici těchto hodnot označíme jako stav $\mathbf{s}_i = (\sigma_i, \sigma_{i-1})$:



Potom $\mathbf{s}_{i+1} = (\sigma_{i+1}, \sigma_i) = (u_i, u_{i-1}) = \mathbf{s}_i P + \mathbf{u}_i Q$ a

$$\mathbf{v}_i = (u_i + u_{i-2}, u_i + u_{i-1} + u_{i-2}) = (\sigma_{i-1}, \sigma_i + \sigma_{i-1}) + (u_i, u_i) = \mathbf{s}_i R + \mathbf{u}_i S$$

pro matice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = (1 \ 0)$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $S = (1 \ 1)$, proto lze konvoluční kódovač K z 10.4 popsat jako abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ) s parametry $(2, 1, 2)$, kde $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P + \mathbf{u}Q$ a $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R + \mathbf{u}S$.

Poznámka 11.2. Nechť pro $m \in \mathbb{N}$, $p = \sum_{i=0}^m p_i D^i \neq 0$, $q = 1 + \sum_{i=1}^m q_i D^i$ a máme zobrazení $K : \mathbb{F}((D)) \rightarrow \mathbb{F}((D))$ určené konvolucí $K(u) = u \cdot \frac{p}{q}$, tedy $(K, (\frac{p}{q}))$ je fyzický konvoluční kódovač. Zobrazení $\delta : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^m$ a $\lambda : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^1$ předpis

$$\delta(\mathbf{s}, t) = (t - \sum_{j=1}^m q_j \mathbf{s}^{(j)}, \mathbf{s}^{(1)}, \dots, \mathbf{s}^{(m-1)}) = \mathbf{s} \cdot \begin{pmatrix} -q_1 & & & \\ \cdot & I_{m-1} & & \\ -q_{m-1} & & & \\ -q_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + u \cdot (1, 0, \dots, 0)$$

$$\lambda(\mathbf{s}, t) = p_0 t + \sum_{j=1}^m (p_j - p_0 q_j) \mathbf{s}^{(j)} = \mathbf{s} \cdot \begin{pmatrix} p_1 - p_0 q_1 \\ \dots \\ p_m - p_0 q_m \end{pmatrix} + u \cdot p_0.$$

Potom je (K, δ, λ) abstraktní konvoluční kódovač.

Důkaz. Pro $u = \sum_{i \geq z} u_i D^i$ položíme $\mathbf{s}_z = \mathbf{0}$, $\mathbf{s}_{i+1} = \delta(\mathbf{s}_i, u_i)$ a $\mathbf{v}_i = \lambda(\mathbf{s}_i, u_i)$ pro každé $i \geq z$. Definujeme-li $\sigma_i = \mathbf{s}_{i+1}^{(1)}$ a $\sigma = \sum_{i \geq z} \sigma_i D^i$ pak vidíme, že $\mathbf{s}_{i+1} = (\sigma_i, \sigma_{i-1}, \dots, \sigma_{i-m+1})$, proto $\sigma_i = u_i - \sum_{j=1}^m q_j \sigma_{i-j}$ a tudíž $u_i = \sigma_i + \sum_{j=1}^m q_j \sigma_{i-j}$. Nyní snadno spočítáme konvoluce $\sigma \cdot q$ a $\sigma \cdot p$:

$$\sigma \cdot q = \sum_{i \geq z} (\sigma_i + \sum_{j=1}^m \sigma_{i-j} q_j) D^i = \sum_{i \geq z} u_i D^i = u,$$

$$\begin{aligned}\sigma \cdot p &= \sum_{i \geq z} \left(\sum_{j=0}^m \sigma_{i-j} p_j \right) D^i = \sum_{i \geq z} \left(p_0(u_i - \sum_{j=1}^m \sigma_{i-j} q_j) + \sum_{j=1}^m p_j \mathbf{s}_i^{(j)} \right) D^i = \\ &= \sum_{i \geq z} \left(p_0 u_i + \sum_{j=1}^m (p_j - p_0 q_j) \mathbf{s}_i^{(j)} \right) D^i = v.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $\frac{v}{p} = \sigma = \frac{u}{q}$, a proto $v = u \frac{p}{q}$ a $K(u) = v$. \square

Věta 11.3. Fyzický konvoluční kódovač lze realizovat jako abstraktní konvoluční kódovač a naopak.

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že (K, G) je fyzický konvoluční kódovač, kde $G = \left(\frac{p_{ij}}{q_i} \right)_{ij} \in (\mathbb{F}(D) \cap \mathbb{F}[[D]])^{k \times n}$ je generující matice ve značení 10.2, pro niž $K(u) = uG$. Označíme $\nu_i = \max(\deg(p_{i1}), \dots, \deg(p_{ic}), \deg(q_i))$, $\nu = \sum_{i=1}^k \nu_i = \text{extdeg}(G)$, koeficienty polynomů $p_{ij} = \sum_{s=0}^{\nu_i} (p_{ij})_s D^s$ a $q_i = \sum_{s=0}^{\nu_i} (q_i)_s D^s$ a definujeme matice

$$P_i = \begin{pmatrix} -(q_i)_1 & & & \\ & I_{\nu_i-1} & & \\ -(q_i)_{\nu_i-1} & & & \\ -(q_i)_{\nu_i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu_i \times \nu_i}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & 0_{\nu_1 \times \nu_2} & \dots & 0_{\nu_1 \times \nu_k} \\ 0_{\nu_2 \times \nu_1} & P_2 & \dots & 0_{\nu_2 \times \nu_k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0_{\nu_k \times \nu_1} & 0_{\nu_k \times \nu_2} & \dots & P_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu},$$

$$\mathbf{e}_{\nu_i} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^{\nu_i}, \quad Q = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\nu_1} & 0_{1 \times \nu_2} & \dots & 0_{1 \times \nu_k} \\ 0_{1 \times \nu_1} & \mathbf{e}_{\nu_1} & \dots & 0_{1 \times \nu_k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0_{1 \times \nu_1} & 0_{1 \times \nu_2} & \dots & \mathbf{e}_{\nu_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times \nu},$$

$$R_i = \begin{pmatrix} (p_{i1})_1 - (p_{i1})_0(q_i)_1 & \dots & (p_{in})_1 - (p_{in})_0(q_i)_1 \\ (p_{i1})_2 - (p_{i1})_0(q_i)_2 & \dots & (p_{in})_2 - (p_{in})_0(q_i)_2 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ (p_{i1})_{\nu_i} - (p_{i1})_0(q_i)_{\nu_i} & \dots & (p_{in})_{\nu_i} - (p_{in})_0(q_i)_{\nu_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu_i \times n}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ R_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times n}$$

$$\text{a } S = \begin{pmatrix} (p_{11})_0 & \dots & (p_{1n})_0 \\ (p_{21})_0 & \dots & (p_{2n})_0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ (p_{k1})_0 & \dots & (p_{kn})_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times n}. \text{ Díky předchozímu popisu realizace konvoluce}$$

a s použitím definice násobení matic dostáváme, že (K, δ, λ) je pro $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P + \mathbf{u}Q$ a $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R + \mathbf{u}S$ abstraktní konvoluční kódovač.

Nyní předpokládejme, že (K, δ, λ) je abstraktní konvoluční s parametry (n, k, m) kódovač daný maticemi P, Q, R, S , tedy $\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{s}_i P + \mathbf{u}_i Q$ a $\mathbf{v}_i = \mathbf{s}_i R + \mathbf{u}_i S$ pro $u = \sum_{i \geq z} \mathbf{u}_i D^i$, všechna $i \geq z$ a $\mathbf{s}_z = \mathbf{0}$. Položíme-li $s = \sum_{i \geq z} \mathbf{s}_i D^i$ a $v = \sum_{i \geq z} \mathbf{v}_i D^i$, pak

$$D^{-1}s = \sum_{i \geq z} \mathbf{s}_{i+1} D^i = \sum_{i \geq z} \mathbf{s}_i D^i P + \sum_{i \geq z} \mathbf{u}_i D^i Q = sP + uQ.$$

To snadno upravíme na $uQ = sD^{-1}(I_m - DP)$, proto $s = uQ(I_m - DP)^{-1}D$, kde snadno spočítáme, že $(I_m - DP)^{-1} = \sum_{i \geq 0} P^i D^i$ je dobře definovaná matice, jejíž prvky jsou

(3) Pro polynomiální matici $G = \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 0 & 1+D+D^2 & D^2 & 1 \end{pmatrix}$ nad \mathbb{F}_2 určíme $\text{extdeg } G = 2+2 = 4$ a opět z důkazu předchozí věty spočítáme matice určující abstraktní konvoluční kódovač pro fyzický kódovač $K(u) = uG$:

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ proto } P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Pro generující matici $\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 1 & 0 & 1 & D \end{pmatrix}$ nad \mathbb{F}_2 téhož konvolučního kódu jako v (2) opět spočítáme $\text{extdeg } \tilde{G} = 2+1 = 3$ a matice určující abstraktní konvoluční kódovač pro $\tilde{K}(u) = u\tilde{G}$:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. POLYNOMIÁLNÍ GENERUJÍCÍ MATICE

V této sekci se budeme věnovat hledání popisu minimálních kódování konvolučního kódu pomocí algebraických vlastností generující matice. Polynomiální generující matici daného kódu, která bude disponovat těmito vlastnostmi, budeme říkat kanonická matice. Odpovídající fyzický i abstraktní konvoluční kódovač, budeme navíc s to efektivně konstruovat.

V následujícím bude \mathbb{F} značit konečné těleso a k a n přirozená čísla.

T&N. Nechť $A \in \mathbb{F}[D]^{n \times n}$, $C, M \in \mathbb{F}[D]^{k \times n}$. Řekneme, že je matice A unimodulární, pokud $\exists A^{-1} \in \mathbb{F}[D]^{n \times n}$. Jsou-li $L \in \mathbb{F}[D]^{k \times k}$ a $P \in \mathbb{F}[D]^{n \times n}$ unimodulární a $M =$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \delta_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ pro monické nebo nulové polynomy } \delta_i \in \mathbb{F}[D] \text{ splňující}$$

podmínku $\delta_i | \delta_{i+1}$ pro všechna $i = 1, \dots, k-1$, pak $C = LMP$ nazveme *Smithův rozklad* matice C a M je *Smithova normální forma* (SNF) matice C .

Pozorování. Je-li $A \in \mathbb{F}[D]^{n \times n}$ a $p \in \mathbb{F}[D]$, pak

- (1) A je unimodulární $\Leftrightarrow \det A \in \mathbb{F}^*$,
- (2) elementární matice přičtení p násobku řádku k jinému je unimodulární,

(3) jsou-li $a, b \in \mathbb{F}[D]$ nesoudělné, a proto existuje $u, v \in \mathbb{F}[D]$, pro něž $ua + bv = 1$, je matice $\begin{pmatrix} a & -v \\ b & u \end{pmatrix}$ unimodulární.

Důkaz následujícího tvrzení, který je založen na myšlence Gaussovy eliminace nad okruhem polynomů s využitím Eukleidova algoritmu a Bezoutových koeficientů, vynecháme.

Fakt 12.1. Polynomiální matice má nějaký Smithův rozklad a její SNF je určen jednoznačně.

Zkusíme v jednoduchých příkladech pomocí pozorování najít SNF polynomiální matice, třebaže nebudeme formálně algoritmus jeho hledání nebudeme formulovat.

Příklad 12.2. (1) Pro $A = \begin{pmatrix} 1+D & -D \\ D & 1-D \end{pmatrix} \in \mathbb{F}[D]^{2 \times 2}$ je $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-D & D \\ -D & 1+D \end{pmatrix}$, tedy se jedná o unimodulární matici s determinantem $\det A = 1$. Potom SNF matice C je I_2 a její Smithův rozklad je například tvaru $A = A \cdot I_2 \cdot I_2 = I_2 \cdot I_2 \cdot A$.

(2) Hledáme-li Smithův rozklad matice $G = \begin{pmatrix} 1+D^2 & 1+D^3 & D+D^2 \\ 1+D & 1+D^2 & 1+D \end{pmatrix}$ nad \mathbb{F}_2 , nejprve přehodíme dva řádky a $(1+D)$ násobek nového prvního řádku přičteme k druhému a poté upravujeme pomocí sloupcových úprav:

$$G \sim \begin{pmatrix} 1+D & 1+D^2 & 1+D \\ 0 & D+D^2 & 1+D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+D & 0 & 0 \\ 0 & 1+D & D+D^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+D & 0 & 0 \\ 0 & 1+D & 0 \end{pmatrix}.$$

Snadno zaznamenejme inverzní úpravy k provedeným řádkovým a sloupcovým úpravám do matic

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+D & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+D & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+D \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+D & 1 \\ 0 & D & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pro něž dostáváme Smithův rozklad

$$G = \begin{pmatrix} 1+D & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+D & 0 & 0 \\ 0 & 1+D & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1+D & 1 \\ 0 & D & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V následujícím uvažujme $G = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \dots \\ \mathbf{g}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}[D]^{k \times n}$ pro $\mathbf{g}_i = (g_{i1}, \dots, g_{in}) \in \mathbb{F}[D]^n$ generující matici konvolučního kódu \mathcal{C} , tedy matici hodnosti k , kde $\nu_i = \deg \mathbf{g}_i := \max(\deg g_{i1}, \dots, \deg g_{ic})$.

T&N. Vnitřní stupeň matice G je hodnota

$$\text{intdeg } G = \max\{\deg \det(M) \mid M \in \mathbb{F}[D]^{k \times k} \text{ vznikne vypuštěním } n - k \text{ sloupců z } G\}.$$

Pro $\tilde{G} \in \mathbb{F}[D]^{k \times n}$ platí, že $\tilde{G} \sim G$, pokud existuje $T \in \mathbb{F}(D)^{k \times k}$ invertibilní, pro kterou $TG = \tilde{G}$. Řekneme, že generující matice G je *základní*, pokud

$$\text{intdeg } G = \min\{\text{intdeg } \tilde{G} \mid \tilde{G} \in \mathbb{F}[D]^{k \times n}, \tilde{G} \sim G\}.$$

Pozorování. Je-li $T \in \mathbb{F}[D]^{k \times k}$ a $\det(T) \neq 0$, pak

- (1) $\text{intdeg } TG = \deg \det(T) + \text{intdeg } G$,
- (2) $\text{intdeg } G \leq \text{intdeg } TG$,
- (3) $\text{intdeg } G = \text{intdeg } TG \Leftrightarrow \deg \det(T) = 0 \Leftrightarrow T$ je unimodulární,
- (4) $\text{intdeg } G \leq \text{extdeg } G$, protože existuje podmatice $M = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \dots \\ \mathbf{m}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}[D]^{k \times k}$ složená ze sloupců matice G , pro niž $\text{intdeg } G = \deg \det(M) =$

$$= \deg \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn} \sigma \prod_i \mathbf{m}_i^{(\sigma(i))} \leq \max_{\sigma \in S_k} \left(\sum_i \deg \mathbf{m}_i^{(\sigma(i))} \right) \leq \sum_i \nu_i = \text{extdeg } G.$$

Následující charakterizace je užitečná pro konstrukce základních maticí.

Poznámka 12.3. Následující je pro matici G ekvivalentní:

- (1) G je základní,
- (2) SNF matice G je tvaru $(I_k \mid \mathbf{0})$,
- (3) G lze doplnit $n - k$ polynomiálními řádky na unimodulární matici,
- (4) $\exists R \in \mathbb{F}[D]^{n \times k}$, pro niž $GR = I_k$.

Důkaz. (1) \Rightarrow (2) Nechť $G = L(S \mid \mathbf{0})R$ je Smithův rozklad, kde $S = \text{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_k) \in \mathbb{F}[D]^{k \times k}$ je diagonální čtvercová matice. Potom $G = LSR_1$ pro matici R_1 , která vznikne z R vypuštěním posledních $n - k$ řádků, a proto podle pozorování (1) platí, že

$$\text{intdeg } G = \deg(\det(LS)) + \text{intdeg } R_1 = \deg \det L + \deg \det S + \text{intdeg } R_1.$$

Protože je G základní a $G \sim R_1$, dostáváme, že $\deg \det L = \deg \det S = 0$, což znamená, že $\delta_i = 1$ pro všechna $i = 1, \dots, k$, neboť je matice S hodnosti k .

(2) \Rightarrow (3) Podle předpokladu existují matice $L \in \mathbb{F}[D]^{k \times k}$, $R_1 \in \mathbb{F}[D]^{k \times n}$ a $R_2 \in \mathbb{F}[D]^{(n-k) \times n}$, pro něž $G = L(I_k \mid \mathbf{0}) \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$. Nyní vidíme, že $\begin{pmatrix} G \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ je unimodulární matice.

(3) \Rightarrow (4) Je-li $C \in \mathbb{F}[D]^{(n-k) \times n}$ matice, pro niž je $\begin{pmatrix} G \\ C \end{pmatrix}$ unimodulární, pak existují matice $H_1 \in \mathbb{F}[D]^{n \times k}$ a $H_2 \in \mathbb{F}[D]^{n \times (n-k)}$, pro které platí, že $\begin{pmatrix} G \\ C \end{pmatrix} (H_1 \mid H_2) = I_n$. Potom $GH_1 = I_k$.

(4) \Rightarrow (1) Nechť $GR = I_k$ pro nějakou matici $R \in \mathbb{F}[D]^{n \times k}$. Zvolme $T \in \mathbb{F}(D)^{k \times k}$, pro kterou $TG \in \mathbb{F}[D]^{k \times n}$. Potom i $T = TGR \in \mathbb{F}[D]^{k \times n}$ a proto podle pozorování (2) platí, že $\text{intdeg } G \leq \text{intdeg } TG$, proto je G základní. \square

T&N. Řekneme, že je G redukovaná, pokud

$$\text{extdeg } G = \min\{\text{extdeg } TG \mid T \in \mathbb{F}[D]^{k \times k} \text{ je unimodulární}\}.$$

Označíme-li \bar{g}_{ij} koeficient termu D^{ν_i} polynomu $\mathbf{g}_i^{(j)}$ v G , pak $\bar{G} = (\bar{g}_{ij})_{ij} \in \mathbb{F}^{k \times n}$ se nazývá matice nejvyšších koeficientů.

Poznámka 12.4. Následující je pro matici G ekvivalentní:

- (1) G je redukovaná,

- (2) $\text{rank } \overline{G} = k$,
(3) $\text{intdeg } G = \text{extdeg } G$.

Důkaz. (1) \Rightarrow (2) Tvzení dokážeme nepřímou a budeme předpokládat, že $\text{rank } \overline{G} < k$, což znamená, že existuje nenulový vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{F}^k$, pro který $\mathbf{y}\overline{G} = \mathbf{0}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_k$, zvolíme $s \leq k$ největší takové, že $\mathbf{y}^{(s)} \neq 0$ a definujeme polynom $\tilde{\mathbf{g}}_s = \sum_{j=1}^s \mathbf{y}^{(j)} D^{\nu_s - \nu_j} \mathbf{g}_j$. Protože mají všechny sčítance stupeň právě ν_s a koeficienty termu D^{ν_s} polynomiálního vektoru $\tilde{\mathbf{g}}_s$ se vynulují, dostáváme, že $\text{deg } \tilde{\mathbf{g}}_s < \nu_s$. Vytvoříme-li nyní matici T z jednotkové matice stupně k tak, že nahradíme její s -tý řádek řádkem $(\mathbf{y}^{(1)} D^{\nu_s - \nu_1}, \mathbf{y}^{(2)} D^{\nu_s - \nu_2}, \dots, \mathbf{y}^{(s)} D^{\nu_s - \nu_s}, 0, \dots, 0)$, platí, že $\det T = \mathbf{y}^{(s)} \in \mathbb{F}^*$, a tudíž jde o unimodulární matici. Protože matice TG vznikne z G právě nahrazením s -tého řádku vektorem $\tilde{\mathbf{g}}_s$, vidíme, že

$$\text{extdeg } TG = \text{deg } \tilde{\mathbf{g}}_s + \sum_{j \neq s} \nu_j < \sum_{j=1}^k \nu_j = \text{extdeg } G,$$

proto matice G není redukovaná.

(2) \Rightarrow (3) Protože $\text{rank } \overline{G} = k$, existuje čtvercová matice $M \in \mathbb{F}[D]^{k \times k}$ vzniklá vypuštěním vhodných $n - k$ sloupců G tak, aby platilo, že $\det \tilde{M} \neq 0$ pro matici \tilde{M} , která vznikne z matice \overline{G} vypuštěním týchž sloupců jako u matice M . Protože

$$\text{intdeg } M \leq \text{extdeg } M \leq \text{extdeg } G$$

a $\det \tilde{M}$ je nenulový koeficient u $D^{\text{extdeg } G}$, vidíme, že

$$\text{extdeg } G \leq \text{intdeg } M \leq \text{intdeg } G,$$

tudíž $\text{extdeg } G = \text{intdeg } G$.

(3) \Rightarrow (1) Pro každou unimodulární matici T platí, že $\text{intdeg } G = \text{intdeg } TG$ díky pozorování (2), proto

$$\text{extdeg } G = \text{intdeg } G = \text{intdeg } TG \leq \text{extdeg } TG,$$

odkud už podle definice plyne, že je G je redukovaná. \square

Definice. Řekneme, že je G *kanonická*, je-li základní a redukovaná.

Věta 12.5. Generující matice G konvolučního kódu \mathcal{C} je kanonická právě tehdy, když $\text{extdeg } G = \text{deg } \mathcal{C}$.

Důkaz. Zvolme dvě takové polynomiální matice \hat{G}, G' , že \hat{G} je nejmenšího možného vnitřního stupně splňující $G \sim \hat{G}$ a G' je nejmenšího možného vnějšího stupně splňující $G \sim G'$. Poznamenejme, že díky 10.2 můžeme vzít matici minimálního vnějšího stupně polynomiální, proto $\text{extdeg } G' = \text{deg } \mathcal{C}$. Protože podle pozorování (4)

$$\text{intdeg } G' \leq \text{extdeg } G' = \text{deg } \mathcal{C},$$

plyne z minimality volby $\text{intdeg } \hat{G}$, že rovněž $\text{intdeg } \hat{G} \leq \text{deg } \mathcal{C}$. Protože existuje unimodulární matice $T \in \mathbb{F}[D]^{k \times k}$, pro niž má matice $T\hat{G}$ nejmenší možný vnější stupeň, tedy se jedná o redukovanou matici, platí díky pozorování (2), že

$$\text{intdeg } T\hat{G} = \text{intdeg } \hat{G} \leq \text{deg } \mathcal{C} \leq \text{extdeg } T\hat{G}.$$

Protože je $T\hat{G}$ redukovaná, díky 12.4 platí, že $\text{intdeg } T\hat{G} = \text{extdeg } T\hat{G} = \text{deg } \mathcal{C}$. Tudíž z předchozí nerovnosti dostáváme, že $\text{extdeg } \hat{G} = \text{deg } \mathcal{C}$, a proto

$$\text{deg } \mathcal{C} = \text{intdeg } \hat{G} \leq \text{intdeg } G \leq \text{extdeg } G.$$

Odtud vidíme, že $\text{deg } \mathcal{C} = \text{extdeg } G$, právě když jsou všude v předchozí nerovnosti rovnosti. Nyní si stačí všimnout, že $\text{deg } \mathcal{C} = \text{intdeg } G$, právě když je G základní přímo z definice a $\text{intdeg } G = \text{extdeg } G$, právě když je G redukovaná podle 12.4. \square

Příklad 12.6. (1) Matice $G = (D \ 1 + D^2)$ má SNF tvaru $(1 \ 0)$, neboť D a $1 + D^2$ jsou nesoudělné, proto je G podle 12.3 základní. Dále $\bar{G} = (0 \ 1)$, proto je G podle 12.4 redukovaná, tudíž je kanonická.

(2) Čtvercová matice je základní, právě když je unimodulární.

Čtvercová matice G je kanonická, právě když je G unimodulární a $\text{extdeg } G = \text{intdeg } G$, což nastává právě tehdy, když $G \in \mathbb{F}^{k \times k}$ je regulární.

O stupni konvolučního kódu (a tedy vnějším i vnitřním stupni každé jeho kanonické generující matice) se dá dále dokázat, že se rovná dimenzi takzvaného prostoru abstraktních stavů, která je nejmenší možnou dimenzí stavového prostoru pro jakoukoli jeho realizaci abstraktním konvolučním kódovačem.

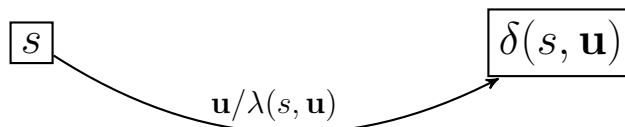
To znamená, že stavový prostor abstraktního konvolučního kódovače, který sestrojíme pomocí kanonické matice a věty 11.3 nabývá minimální možné dimenze.

13. VITERBIHO DEKÓDOVÁNÍ

Na závěr nabídneme dvě těsně související prezentace abstraktního konvolučního kódovače pomocí multigrafů. Postupné procházení jejich cest po vrstvách odpovídajícím jednotlivým časovým okamžikům kódování nám poskytne velmi přirozený a efektivní dekódovací algoritmus, který najde vstupní posloupnost s nejvyšší pravděpodobností podmíněnou předpokladem přijetí konkrétní chybové posloupnosti, tedy tu, jejíž zakódování je v Hammingově metrice nejbližší přijaté posloupnosti.

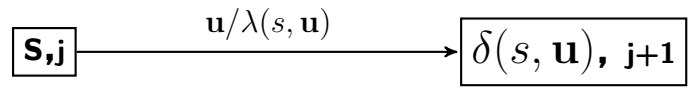
V celé kapitole uvažujeme abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ) se stavovým prostorem $S = \mathbb{F}^m$ a konvolučním kódovačem $K : \mathbb{F}((D))^k \rightarrow \mathbb{F}((D))^n$. Dále označme $q = |\mathbb{F}|$, tedy $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$.

T&N. *Multigrafem konvolučního kódovače (K, δ, λ) budeme rozumět orientovaný ohodnocený multigraf (což je přímočaré zobecnění pojmu graf připouštějící více hran mezi stejnými vrcholy) s vrcholy danými množinou S , jehož ohodnocené hrany jsou právě tvaru*



pro všechna $s \in S$ a $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^k$.

Mřížoví (trellis diagram) konvolučního kódovače (K, δ, λ) je nekonečný ohodnocený orientovaný multigraf s vrcholy $\{(\mathbf{0}, 0)\} \cup S \times \mathbb{N}$, jehož ohodnocené hrany jsou právě tvaru

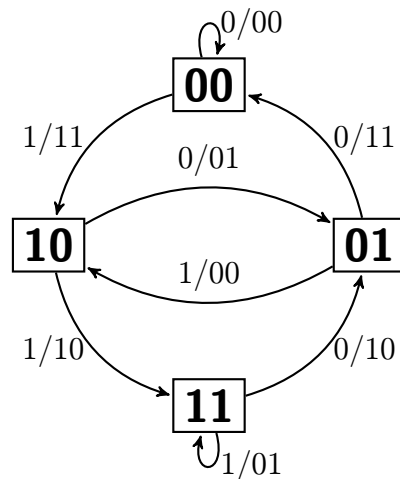


pokud do vrcholu (s, j) vede nějaká hrana nebo $(s, j) = (\mathbf{0}, 0)$. Je-li $j \geq 0$, pak se úplný podmultigraf mřížoví sestávající z hran začínajících ve vrcholech (s, j) pro libovolné $s \in S$ nazývá j -tou vrstvou mřížoví.

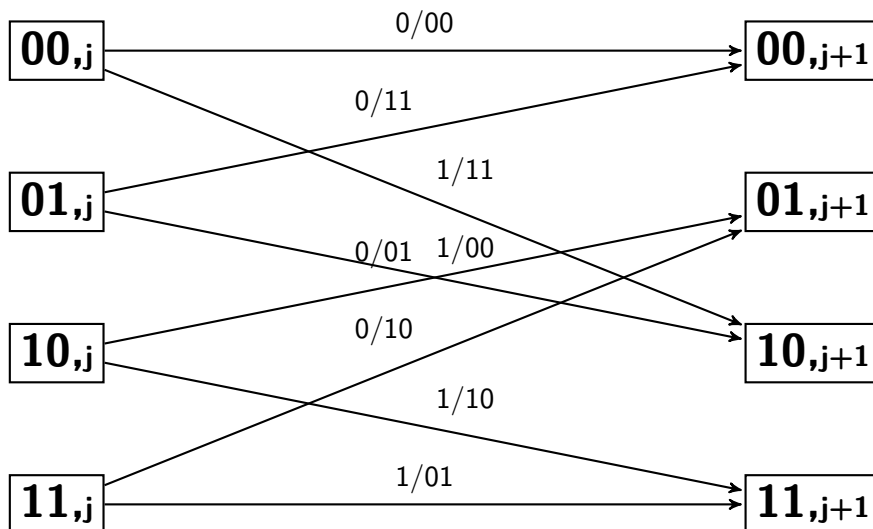
Příklad 13.1. Konvoluční kódovač z příkladů 10.4, 11.1 a 11.5(1), kde pro $S = \mathbb{F}_2^2$ máme

$$\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

popíšeme následujícím multigrafem



Příklad 13.2. Pro konvoluční kódovač z předchozího příkladu máme j -tou vrstvou mřížoví pro každé $j > 1$ ve tvaru

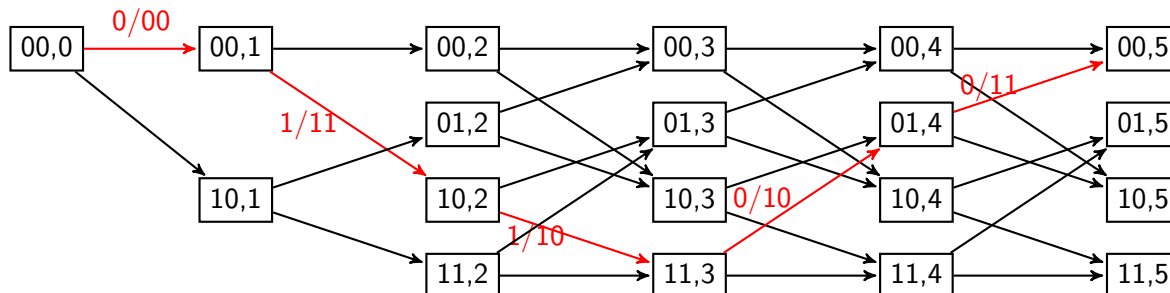


$$\begin{aligned} \text{Nyní zakódujme polynom } \mathbf{u} = D + D^2 \text{ a obdržíme } \mathbf{v} = K(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}(1 + D^2, 1 + D + D^2) = \\ &= (D + D^2 + D^3 + D^4, D + D^4) \sim 00D^0 + 11D^1 + 10D^2 + 10D^3 + 11D^4, \end{aligned}$$

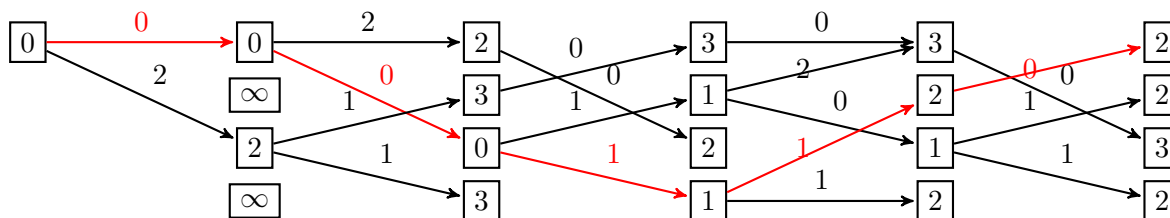
kteřé reprezentuje posloupnost (00, 11, 10, 10, 11). Přejmeme-li posloupnost s dvěma bitovými chybami $\mathbf{y} = (00, 11, 11, 00, 11)$, která odpovídá polynomu

$$y = 00D^0 + 11D^1 + 11D^2 + 00D^3 + 11D^4,$$

snažíme se ji aproximovat „nejbližší“ ohodnocenou cestou v mřížoví tj. hledáme takové $\hat{\mathbf{u}}$, aby $P[\mathbf{y} | K(\hat{\mathbf{u}})]$ byla minimální, tj. aby byl minimální součet $\sum d(\mathbf{y}_i, K(\mathbf{u}_i))$:



Zapišeme si do grafu součet vzdáleností přijaté dvojice bitů a dvojici z kódové posloupnosti, což je myšlenka dekódovacího algoritmu, který následně popíšeme. V každém stavu v každé vrstvě vybereme ty hrany, které prodlužují dosavadní minimální cestu, která do tohoto stavu vede, tak, aby byla cesta opět minimální:



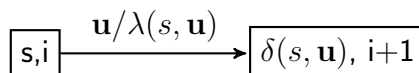
Ačkoli do vrcholů v čase 5 vedou tři cesty s váhou 2, vybereme tu, která končí ve stavu 00, neboť ta reprezentuje polynom stupně 4, což je parametr polynomu, o němž víme, že ho máme přijmout, ostatní cesty totiž reprezentují polynom vyššího stupně a vyšší váhy.

Nadále bude značit $\mathcal{M} = (\{(\mathbf{0}, 0)\} \cup S \times \mathbb{N}, H)$, kde H představuje množinu hran, mřížoví konvolučního kódovače (K, δ, λ) .

Pozorování. Pro \mathcal{M} platí, že

- (1) vrstva mřížoví (K, δ, λ) je bipartitní ohodnocený orientovaný multigraf, který obsahuje nejvýše $|S| = |\mathbb{F}_q^m| = q^m$ počátečních i koncových vrcholů a nejvýše $|S| \cdot |\mathbb{F}_q^k| = q^{m+k}$ hran,
- (2) orientovaná cesta $h_0 h_1 h_2 \dots$ s ohodnocením hrany h_i tvaru $\mathbf{u}_i / \mathbf{v}_i$ reprezentuje kódování $\sum_{i \geq 0} \mathbf{v}_i D^i = K(\sum_{i \geq 0} \mathbf{u}_i D^i)$.

T&N. Nechť $s \in S$, $l \in \mathbb{N}$, $P = h_1 \dots h_l \in \mathcal{P}_l(\mathcal{M})$, kde $h_i \in H$ a $\mathcal{P}_l(\mathcal{M})$ značí množinu všech orientovaných cest délky l . Označme $i(P)$ počáteční vrchol a $t(P)$ koncový vrchol. Pro $y = \sum \mathbf{y}_i D^i \in \mathbb{F}^n[[D]]$ definujme hodnotu $\mu_y(P) = \sum_{i=1}^l \mu_y(h_i)$, kde $\mu_y(h_i) = d(\mathbf{y}_i, \lambda(s, \mathbf{u}))$ je Hammingova vzdálenost pro hranu h_i tvaru



Konečně řekneme, že je cesta P *minimální pro y* , pokud

$$\mu_y(P) = \min\{\mu_y(Q) \mid Q \in \mathcal{P}_l(\mathcal{M}) : i(Q) = i(P), t(Q) = t(P)\}.$$

Nyní už máme zavedeny všechny nástroje, abychom mohli formalizovat postup dekódování z příkladu 13.2.

VITERBIHO ALGORITMUS

Vstup: $f \in \mathbb{N}$, $z \in S$, $y \in \mathbb{F}^n[[D]]$

Výstup: $P \in \mathcal{P}_f(\mathcal{M})$ minimální cesta pro y , kde $i(P) = (\mathbf{0}, 0)$ a $t(P) = (z, f)$

0. for $j = 0$ to f & for all $s \in S$ polož $\mu(s, j) := \infty$;
1. $\mu(\mathbf{0}, 0) := 0$; $P(\mathbf{0}, 0) :=$ prázdná cesta;
2. for $j = 1$ to f do
 - for $h \in H$ & $s \in S$ splňující $\mu(s, j-1) < \infty$ & $i(h) = (s, j-1)$ do
 - if $\mu_y(h) + \mu(s, j-1) < \mu(t(h))$ then
 - $\{P(t(h)) := P(s, j-1)h; \mu(t(h)) := \mu_y(h) + \mu(s, j-1)\}$
3. return $P(z, f)$

Dekódování

Pro přijatou (poškozenou) posloupnost slov, kterou interpretujeme jako polynom $y = \sum_{j=0}^{f-1} \mathbf{y}_j$ najdeme Viterbiho algoritmem orientovanou cestu $P = h_1 \dots h_{f-1}$ s hranou h_i ohodnocenou dvojicí $\mathbf{u}_i/\mathbf{v}_i$ pro $i = 0, \dots, f-1$, která splňuje, že $t(P) = (z, f)$ pro vhodný stav $z \in S$ (ne nutně musí jít o stav $\mathbf{0}$, především v situaci kódování se zpětnou vazbou, otázkou volby vhodného stavu se zde ovšem zabývat nebudeme). Hledaný vzor $u = \sum_{i=0}^{f-1} \mathbf{u}_i$, který přečteme z ohodnocení hran nalezené cesty P , minimalizuje vzdálenost $\sum_{j=0}^{f-1} d(\mathbf{y}_j, \mathbf{v}_j)$ pro polynom $v = \sum_{i=0}^{f-1} \mathbf{v}_i$, obsahující prvních f členů mocninné řady $K(u)$.

Na závěr si rozmyslíme, že Viterbiho algoritmus skutečně najde v Hammingově smyslu nejbližší cestu (a následné dekódování je tak ML-schématem).

Pozorování. Nechť $l, r \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{F}^n[[D]]$, $P \in \mathcal{P}_l(\mathcal{M})$, $Q \in \mathcal{P}_r(\mathcal{M})$ a $i(Q) = t(P)$.

- (1) Pokud $i(P) = (s, j)$, pak existuje $\tilde{s} \in S$, pro které $t(P) = (\tilde{s}, j+l)$,
- (2) $\mu_y(PQ) = \mu_y(P) + \mu_y(Q)$,
- (3) je-li PQ minimální cesta pro y , pak P i Q jsou minimální cesty pro y .

Poznámka 13.3. Nechť $y \in \mathbb{F}^n[[D]]$, $l \in \mathbb{N}$ a $s \in S$. Označme pro každé $z \in S$ minimální cestu $P_z \in \mathcal{P}_l(\mathcal{M})$ pro y splňující $i(P_z) = (\mathbf{0}, 0)$ a $t(P_z) = (z, l)$, dále seřaďme $h_1, \dots, h_r \in H$ všechny ohodnocené hrany splňující $t(h_j) = (s, l-1)$ a $i(h_j) = (s_j, l)$ pro nějaké $s_j \in S$. Pokud $i = \arg \min_j (\mu_y(P_{s_j}) + \mu_y(h_j))$, pak je $P_{s_i}h_i$ minimální cesta pro y .

Důkaz. Vezměme cestu $P \in \mathcal{P}_{l+1}(\mathcal{M})$, která splňuje $i(P) = (\mathbf{0}, 0)$ a $t(P) = (s, l+1)$. Potom existuje j a cesta $Q \in \mathcal{P}_l(\mathcal{M})$, pro něž platí $i(Q) = (\mathbf{0}, 0)$, $t(Q) = (s_j, l)$ a $P = Qh_j$. Z pozorování (2) potom plyne, že

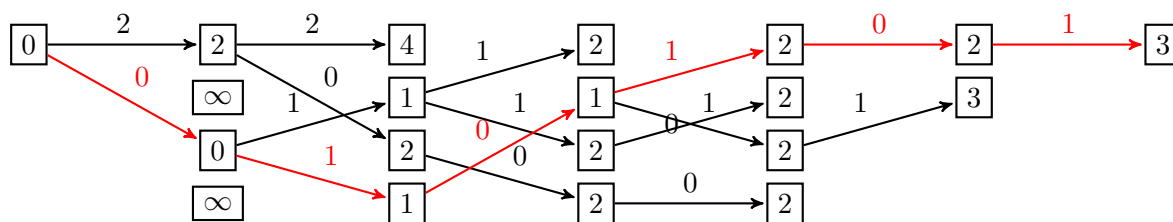
$$\mu_y(P) = \mu_y(Q) + \mu_y(h_j) \geq \mu_y(P_{s_j}) + \mu_y(h_j) \geq \mu_y(P_{s_i}) + \mu_y(h_i) = \mu_y(P_{s_i}h_i),$$

což znamená, že $\mu_y(P_{s_i}h_i)$ je minimální možné a to jsme potřebovali dokázat. \square

Věta 13.4. Viterbiho algoritmus pracuje správně v čase $O(fq^{m+k})$ operací v \mathbb{Z} .

Důkaz. Korektnost plyne z 13.3 a časový odhad dostáváme aplikací pozorování o počtu vrcholů a hran jedné vrstvy. \square

Příklad 13.5. Pro konvoluční kódovač z příkladů 13.1 a 13.2 uvažujme přijatou posloupnost popsanou polynomelem $y = 11D^0 + 11D^1 + 10D^2 + 01D^3 + 00D^4 + 01D^5$, o němž předpokládáme, že vznikl (omezeným) poškozením polynomu v stupně nejvýše 3 a budeme Viterbiho algoritmem hledat polynom $v = K(u)$ i původní zprávu u tak, abychom v čase 5 skončili ve stavu $\mathbf{0}$. Za využití 13.2 budeme průběh Viterbiho algoritmu zapisovat do následujícího multigrafu:



Vyznačená cesta odpovídá kódovému polynomu

$$v = 11D^0 + 10D^1 + 10D^2 + 11D^3 + 00D^4 + 00D^5,$$

který je obrazem zdrojového polynomu $u = 1D^0 + 1D^1 + 0D^2 + 0D^3$.