12 Minimální polynom – Napoleon Galoisovy teorie

Zadání
Cvičení 9. a 15. května, verze ze dne 7. května 2024.

Cíle cvičení: Dnes budeme počítat minimální polynomy prvků nad tělesem, což se ukáže být ve své podstatě lineárně algebraickou úlohou. Dobře si přitom rozmyslíme lineárně algebraické důsledky našich výpočtů, především ten, který říká, že stupeň minimálního polynomu je právě stupněm rozšíření daného prvkem, tedy dimenzí rozšíření chápaného jako vektorový prostor nad rozšiřovaným tělesem.

Úlohy, které bychom určitě měli umět řešit:

Připomeňme značení $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$.

Úloha 12.1. Spočítejte minimální polynom $m_{a,\mathbb{Q}}$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ a stupeň rozšíření $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ pro komplexní prvky a s hodnotou (a) $\sqrt[3]{2}$, (b) $-1+i$, (c) $\sqrt[4]{6}$, (d) ζ_3, (e) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

Úloha 12.2. Najděte nějaké báze rozšíření $\mathbb{Q}(a)$ tělesa $\mathbb{Q}$ pro hodnoty a z předchozího příkladu.

Úloha 12.3. Spočítejte minimální polynom
(a) prvku $\sqrt{2}i$ nad tělesem $\mathbb{Q}(i)$ (b) prvku $\sqrt[4]{2}$ nad tělesem $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Úloha 12.4. Určete stupeň rozšíření všech kořenových nadtěles polynomu $x^5 - 3x + 3$ nad $\mathbb{Q}$.

Úloha 12.5. Spočtěte stupeň rozšíření $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.

Nakonec ještě pár příkladů pro nadšené dobrovolníky:

Úloha 12.6. Víte-li, že $m_{\sqrt{2}+i,\mathbb{Q}} = x^4 - 2x^2 + 9$, najděte $m_{\sqrt{2}+i+1,\mathbb{Q}}$.

Úloha 12.7. Spočítejte minimální polynom

(a) prvku $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ nad tělesem $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,

(b) prvku $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ nad tělesem $\mathbb{R}$,

(c) prvku ζ_5 nad tělesem $\mathbb{Q}$,

(d) $\zeta_7 + \zeta_7^{-1}$.

Úloha 12.8. Najděte minimální polynom $m_{\sqrt{2},T}$ pro podtěleso $T = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ tělesa reálných čísel.

Úloha 12.9. Nechť $a \in S$ je algebraický prvek nad tělesem T, kde T je podtěleso tělesa S, a nechť $b \in S$ splňuje $m_{a,T}(b) = 0$. Dokažte, že $m_{a,T} = m_{b,T}$.

Úloha 12.10.* Nechť a, b jsou algebraické prvky nad T takové, že jejich minimální polynomy $m_{a,T}$, $m_{b,T}$ mají nesoudělné stupně. Dokažte, že pak $m_{a,T} = m_{a,T(b)}$ a $m_{b,T} = m_{b,T(a)}$.

Úloha 12.11. Spočtěte stupeň rozšíření rozkladového nadtělesa polynomu $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.

Úloha 12.12. Dokažte, že $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2})$.

Úloha 12.13. Nechť $T \leq S$ jsou tělesa taková, že $[S : T]$ je prvočíslo. Dokažte, že pak $S = T(a)$ pro libovolný prvek $a \in S \setminus T$.

Úloha 12.14.* Nechť T je těleso a a algebraický prvek nad T takový, že $[T(a) : T]$ je lichý. Dokažte, že $T(a) = T(a^2)$.