5 Gauss je náš!

Zadání
Cvičení 20. a 21. března, verze ze dne 21. května 2024

Cíle cvičení: Tentokrát oceníme Gaussovu větu a zhluboka si zapřemýšlíme nad ireducibilními rozklady polynomů nad Gaussovými obory. Vyzkoušíme si rovněž Eisensteinovo kritérium ireducibility a elementární postup pro hledání racionálních kořenů, což se nám pro nalezení rozkladů může hodit.

Budeme bez důkazu předpokládat, že kromě oborů $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}[i]$, o nichž to bylo dokázáno na přednášce, jsou eukleidovské s obvyklou normou také obory $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Úlohy, které bychom určitě měli umět řešit:

Úloha 5.1. Najděte ireducibilní rozklady v oborech $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ a $(\mathbb{Z}[i])[x]$ polynomů

(a) $6x - 6$,

(b) $2x^2 + 2$,

(c) $7x^3 - 14$.

Úloha 5.2. Spočtěte $\mathrm{NSD}(f, g)$

(a) $f = 6x^3 - 6$, $g = 8x^2 - 8$ v oboru $\mathbb{Z}[x]$,

(b) $f = 6x^2 + 3x - 3$, $g = 6x^2 + 6x$ v oboru $\mathbb{Z}[x]$

(c) $f = 6x^2y$, $g = 15xy^2 + 21x^3y$ v oboru $\mathbb{Z}[x, y]$

Úloha 5.3. Najděte všechny racionální kořeny daných polynomů z $\mathbb{Z}[x]$:
(a) $3x^5 - 2x^2 + x + 1$, (b) $x^3 - 7x^2 + 11x + 3$ (c) $2x^3 - x^2 + 3$.

Úloha 5.4. Rozmyslete si, proč jsou následující polynomy v příslušných oborech ireducibilní:

(a) $x^3 + x^2 + x + 3$ v $\mathbb{Z}[x]$,

(b) $4x^3 - 15x^2 + 60x + 180$ v $\mathbb{Z}[x]$,

(c) $x^5 - 36x^4 + 6x^3 + 30x^2 + 24$ v $\mathbb{Q}[x]$,

(d) $\frac{10}{17}x^8 + 5x^6 + \frac{9}{2}x^5 - 12x^4 + \frac{4}{3}x - 6$ v $\mathbb{Q}[x]$.

A teď něco navíc, abychom se při těšení na další cvičení nenudili:

Úloha 5.5. Rozložte polynom $2x^2 + 2x - 1$ nad eukleidovským oborem $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ na součin ireducibilních prvků.

Úloha 5.6. Najděte ireducibilní rozklady v oborech $\mathbb{Q}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$ a $\mathbb{C}[x, y]$ polynomů

(a) $x^2 - y + 2$,

(b) $x^2 - 2y^2$,

(c) $x^2 + y^2$,

(d) $x^2 + xy + y - 1$,

(e)* $2y^3 + y^2x + yx^2 + x^2 + 7y^2 + 7y - x + 2$.

Úloha 5.7. Spočítejte v $\mathbb{Z}[x, y]$ největší společný dělitel následujících dvou (dechberoucím způsobem přenádherných) polynomů:

$$\begin{aligned} f &= 2xy + 2x^2y + 8xy^2 + 15x^2y^2 + 7x^3y^2 + 8x^2y^3 + 13x^3y^3 + 5x^4y^3 \\ g &= 6y + 6xy + 24y^2 + 39xy^2 + 15x^2y^2. \end{aligned}$$

Úloha 5.8. Rozložte v $\mathbb{Z}[x]$ polynom $x^{16} - 1$ na součin ireducibilních polynomů.

Úloha 5.9. Najděte všechny racionální kořeny polynomu

$$4x^7 - 16x^6 + x^5 + 55x^4 - 35x^3 - 38x^2 + 12x + 8 \in \mathbb{Z}[x].$$

Úloha 5.10. Rozmyslete si, proč je polynom $3x^3 + 2x^2 + (4 - 2i)x + (1 + i)$ v $(\mathbb{Z}[i])[x]$ ireducibilní.

Úloha 5.11. S využitím substituce $x \to x - a$ a tvrzení úlohy 3.8 rozhodněte o (i)reducibilitě následujících polynomů v $\mathbb{Z}[x]$
(a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, (b) $x^3 + 3x^2 + 5x + 5$, (c) $\frac{x^p - 1}{x - 1} = \sum_{i=0}^{p-1} x^i$ pro prvočíslo p.

Úloha 5.12. Ukažte, že je-li primitivní polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ reducibilní a prvočíslo p nedělí vedoucí koeficient f, pak je reducibilní i polynom $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ získaný vzetím koeficientů f modulo p.

Úloha 5.13. S využitím předchozího tvrzení rozhodněte v oboru $\mathbb{Z}[x]$ o (i)reducibilitě polynomu (a) $3x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x + 5$, (b)* $x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 5$.