# 8. Algebrou za symetrický svět

## Symetrické polynomy

1. Je polynom $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$ symetrický?

   [ano; stačí si rozmyslet, že libovolná transpozice dvou proměnných výsledný polynom nezmění (jen převede jeden činitel ze zadání na druhý), tudíž ani žádná obecná permutace]

2. Vyjádřete následující symetrické polynomy jako součet součinů elementárních symetrických polynomů:

   (a) $3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2$ [v obou případech postupujme podle Gaussova algoritmu; $3s_1s_3$]

   (b) $x^3(y+z) + y^3(x+z) + z^3(x+y)$. [$s_1^2s_2 - 2s_2^2 - s_1s_3$, ne tak bolestný postup: $l(f) = x^3y = l(s_1^2s_2)$. Všimneme si, že:

   $$f_1 = f = (x^2+y^2+z^2)(xy+yz+xz) - (x^2yz + xy^2z + xyz^2)$$
   $$s_1^2s_2 = (x^2+y^2+z^2)(xy+yz+xz) + 2(xy+xz+yz)^2$$

   Takže

   $$\begin{aligned} f_2 = f_1 - s_1^2s_2 &= -(x^2yz + xy^2z + xyz^2) - 2(xy+yz+xz)^2 \\ &= -(s_1s_3) - 2(s_2)^2. \end{aligned}$$

   a $g_2 = s_1^2s_2$. Nakonec, $g_3 = g_2(s_1s_3) - 2(s_2)^2 = s_1^2s_2 - 2s_2^2 - s_1s_3$ a $f_3 = 0$. ]

## Viètovy vztahy

3. Buďte $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}$. Ukažte, že $u_1^2 + \ldots + u_n^2 + \overline{u_n}^2 + \ldots + \overline{u_1}^2 \in \mathbb{R}$.

   [Jelikož jsou spolu čísla $u_k$ a $\overline{u_k}$ konjugovaná, je množina $\{u_1, \overline{u_1}, \dots, u_n, \overline{u_n}\}$ množinou kořenů reálného polynomu. Pak už stačí využít Důsledek 11.6 ze skript.]

4. Buď $f = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ *(polynom, jehož kořeny, je-li vám život milý, ani nezkoušejte hledat).* Označme $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \in \mathbb{C}$ všechny jeho kořeny. Určete hodnotu $\sum_{i\neq j} u_i^2u_j$.

   [$\sum_{i\neq j} u_i^2u_j = (u_1 + \ldots + u_n)(u_1u_2 + u_1u_3 + \ldots + u_{n-1}u_n) - 3\sum_{i<j<k} u_iu_ju_k = s_1(u_1,\dots,u_n)s_2(u_1,\dots,u_n) - 3s_3(u_1,\dots,u_n) = -2\cdot 3 + 3\cdot 3 = 3$.]

5. Buď $\mathbf{T}$ těleso a $f = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ polynom z $\mathbf{T}[x]$ a $u_1, \dots, u_n$ všechny jeho kořeny v nějakém nadtělese. Vyjádřete součet třetích mocnin jeho kořenů $u_1^3 + \ldots + u_n^3$ pomocí koeficientů $a_0, \dots, a_{n-1}$. [Platí $(x_1+\ldots+x_n)^3 = \sum_i x_i^3 + 3\sum_{i\neq j} x_i^2x_j + 6\sum_{i<j<k} x_ix_jx_k$ a dále taky $\sum_{i\neq j} x_i^2x_j = (x_1+\ldots+x_n)(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n) - 3\sum_{i<j<k} x_ix_jx_k$. Tedy dohromady: $\sum_i x_i^3 = s_1^3 - 3s_1\cdot s_2 + 3s_3 = -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^3 + 3\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_n} - 3\frac{a_{n-3}}{a_n}$.]

6. Označme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ kořeny reálného polynomu $x^3 - x - 1$ a položme $p_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k$. Rozmyslete si, že $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je posloupnost reálných čísel (dokonce celých, jak ukážete v následujícím). Ukažte, že tato posloupnost splňuje

   (a) $p_{-1} = -1$

   (b) $p_0 = 3$

   (c) $p_1 = 0$

   (d)* $p_k = p_{k-2} + p_{k-3}$. *(Nápověda: může pomoci inspirovat se počítáním ve faktorokruzích.)*

## Permutační grupy

7. Zapište následující permutace jako součin cyklů a pro každou určete $\pi^{2020}$:

   [uvědomme si, že veledůležitou vlastností nezávislých cyklů je, že spolu komutují, tj. $c_1c_2 = c_2c_1$, což pro obecné dvojice cyklů, natož permutací, neplatí]

   (a) $\pi_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ [$\pi_a = (1\,4)(2\,3\,5)$, $\pi_a^{2020} = (2\,3\,5)$]

   (b) $\pi_b = (4\,3\,5\,1\,2)$ [$\pi_b = (4\,3\,5\,1\,2)$, $\pi_b^{2020} = id$]

   (c) $\pi_c = (4\,3\,5)(5\,1\,2)$ [$\pi_c = (1\,2\,4\,3\,5)$, $\pi_c^{2020} = id$]

8. Buďte $\pi, \tau \in \mathbb{S}_n$. Ukažte, že je-li v cyklickém zápisu permutace $\pi$ prvek $b$ hned po prvku $a$, pak je v cyklickém zápisu permutace $\sigma = \tau\pi\tau^{-1}$ prvek $\tau(b)$ hned po prvku $\tau(a)$. (Této operaci se říká *konjugace prvku* $\pi$ *prvkem* $\tau$ a prvek $\sigma$ je pak s prvkem $\pi$ *konjugovaný*.)

9. Určete $\pi_a\pi_b\pi_a^{-1}$, resp. $\pi_b\pi_a\pi_b^{-1}$ pro permutace z příkladu 7. [$(1\,5\,2\,4\,3)$, resp. $(2\,3)(4\,5\,1)$]

10. Pro které permutace $\alpha$ na množině $\{1, 2, 3, 4\}$ platí $\alpha \circ (1\,2\,3) \circ \alpha^{-1} = (1\,2\,4)$? Je relace „být konjugovaný s“ ekvivalence? [$(3\,4)$; $(1\,2\,4\,3)$; $(1\,4\,3\,2)$; ano]

11. Určete počet prvků množiny všech permutací v $\mathbb{S}_5$, které jsou konjugované s permutací $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

    Tvoří tato množina podgrupu $\mathbb{S}_5$? [$2 \cdot \binom{5}{3}$; ne]