CVIČENÍ Z ÚVODU DO TEORIE GRUP

Opakování:

(1) Popište až na izomorfismus všechny abelovské grupy řádu (a) 81, (b) 200.
(2) Proč je každá grupa řádu 8 izomorfní právě jedné z grup $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2^3$, D_8 nebo $\mathcal{Q}$?
(3) Které z výše uvedených grup je izomorfní grupa horních trojúhelníkových matic 3×3 nad tělesem $\mathbb{F}_2$?

10. Malé grupy

10.1. **Grupy řádu 12.**

10.1. Dokažte pomocí Sylowových vět, že pro grupu $\mathcal{G}$ řádu 12 leží v $Syl_2 \cup Syl_3$ leží aspoň jedna normální podgrupa $\mathcal{G}$.

10.2. Dokažte, že je každá neabelovská grupa řádu 12 izomorfní některému ze semidirektních součinů $\mathbb{Z}_2^2 \rtimes \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$.

10.3. Dokažte, že

(a) existují právě 3 neizomorfní neabelovské grupy řádu 12,
(b) žádná dvojice grup A_4, D_{12} a $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$ není izomorfní,
(c) grupa řádu 12 je izomorfní právě jedné z grup $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, A_4, D_{12} nebo nekomutativní grupě $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$.

10.2. **Kompoziční řady.**

10.4. Určete nějakou kompoziční řadu grupy (a) $\mathbb{Z}_{30}$, (b) $\mathbb{Z}_{25}$ (c) $\mathbb{Z}_5^2$. Kolik kompoziční řad těchto grup existuje?

10.5. Spočítejte všechny kompoziční řady symetrických grup S_n pro všechna $n \geq 5$.

Date: 8. prosince 2020.