13. cvičení

1. Je polynom $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$ symetrický?

2. Dokažte, že druhá mocnina determinantu Vandermondovy matice

$$V(x_1, \ldots, x_n) = (x_i^{j-1})_{i,j=1,\ldots,n}$$

je symetrický polynom vzhledem k proměnným $x_1, \ldots, x_n$.

3. Vyjádřete symetrické polynomy

$$\text{(a) } 3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2, \quad \text{(b) } x^3(y+z) + y^3(x+z) + z^3(x+y)$$

jako součet součinů elementárních symetrických polynomů.

4. Uvažujme monický polynom $f = \sum a_i x^i \in R[x]$, který se v R rozkládá na lineární činitele $(x - u_1) \cdot \ldots \cdot (x - u_n)$. Vyjádřete součet čtverců jeho kořenů $u_1^2 + \ldots + u_n^2$ pomocí koeficientů $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

Řešení:

1. Ano.
2. $\det V(x_1, \ldots, x_n)^2 = \prod_{i>j}(x_i - x_j)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i \neq j}(x_i - x_j) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i \neq j}(x_\sigma(i) - x_\sigma(i))^2$ pro všechna $\sigma \in S_n$.
3. (a) $3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2 = 3s_1s_3$,

   (b) $x^3(y+z) + y^3(x+z) + z^3(x+y) = s_1^2s_2 - 2s_2^2 - s_1s_3$.
4. $u_1^2 + \ldots + u_n^2 = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}$.