10. cvičení

1. Buď a) $\omega = e^{2\pi i/6}$, b) $\omega = e^{2\pi i/5}$. Spočtěte dimenzi a najděte nějakou bázi vektorového prostoru $\mathbb{Q}(\omega)$ nad tělesem $\mathbb{Q}$. Najděte ireducibilní polynom $m \in \mathbb{Q}[x]$ splňující $m(\omega) = 0$.

2. Spočtěte minimální polynom $m_{a,\mathbb{Q}}$, kde
(a) $a = 1 + \sqrt{5}$, (b) $a = 1 - \sqrt[3]{2}$, (c) $a = \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

3. Buď $\mathbb{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$ algebraický prvek. Vyjádřete polynom $m_{a^{-1},\mathbb{T}}$ pomocí koeficientů polynomu $m_{a,\mathbb{T}}$.

4. Spočtěte stupeň rozšíření (a) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}]$, (b) kořenového nadtělesa polynomu $x^5 - 3x + 3$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.

Řešení:

1. (a) $(1, i\sqrt{3})$, $\dim = 2$, $x^2 + x + 1$,
   (b) $(1, e^{2\pi i/5}, e^{4\pi i/5}, e^{6\pi i/5})$, $\dim = 4$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
2. (a) $x^2 - 2x - 4$, (b) $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, (c) $x^2 - 10x - 7$,
3. Jestliže $m_{a,\mathbb{T}} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, kde $n = \deg m_{a,\mathbb{T}}$, pak $m_{a^{-1},\mathbb{T}} = a_0^{-1} \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^i$.
4. (a) 6, (b) 5.