8. cvičení

1. Buď $\mathbf{G}$ grupa a $\mathbf{H}$ její podgrupa taková, že $[\mathbf{G} : \mathbf{H}] = 2$. Dokažte, že $\mathbf{H}$ je normální.

2. Určete všechny podgrupy grupy $\mathbf{A}_4$.

3. Dokažte, že (a) $\mathbf{A}_5$ je jediná vlastní normální podgrupa $\mathbf{S}_5$, (b) $\mathbf{S}_5$ není řešitelná.

4. Popište pomocí 1. věty o izomorfismu, jak vypadají faktorgrupy

$$\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+, \quad \mathbb{R}^*/\{1, -1\}, \quad \mathbb{C}^*/\mathbf{N},$$

kde $\mathbf{N}$ značí podgrupu čísel s absolutní hodnotou 1.

Řešení:

1. Pro $g \in H$ platí $gHg^{-1} = H$, protože $H \leq G$.

   Pro $g \in G \setminus H$ platí $gH = G \setminus H = Hg$, neboť $G = H \coprod gH = H \coprod Hg$, a proto i tentokrát $gHg^{-1} = H$.

2. Díky Lagrangeově větě řád podgrupy dělí řád grupy, uvažujeme tedy dělitele $|\mathbf{A}_4| = 12$.

   řádu 1: $\{\mathrm{id}\}$, řádu 12: $\mathbf{A}_4$,

   řádu 2: 3 podgrupy $\langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle$, $\langle(1\ 3)(2\ 4)\rangle$, $\langle(1\ 4)(2\ 3)\rangle$,

   řádu 3: 4 podgrupy $\langle(1\ 2\ 3)\rangle$, $\langle(1\ 2\ 4)\rangle$, $\langle(1\ 3\ 4)\rangle$, $\langle(2\ 3\ 4)\rangle$,

   řádu 4: pouze Kleinova $\{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$,

   řádu 6: žádná.

3. (a) Nechť H je normální podgrupa grupy $\mathbf{S}_5$.

   Jestliže $(1\ 2) \in H$, pak i všechny permutace konjugované, tj. všechny transpozice leží v H, a proto $\mathbf{S}_5 = H$.

   Pokud $\sigma = (1\ 2)(3\ 4\ 5) \in H$, potom $\sigma^3 = (1\ 2) \in H$, a proto podle předchozíh úvahy $\mathbf{S}_5 = H$.

   Jestliže $(1\ 2\ 3) \in H$, pak i všechny permutace konjugované, tj. tvaru $(a\ b\ c)$ leží v H, a proto $\mathbf{A}_5 \subseteq H$.

   Pokud $(1\,2)(3\,4) \in H$, pak i konjugovaná $(5\,2)(3\,4) \in H$, proto $(1\,2\,5) = (1\ 2)(3\ 4) \circ (5\ 2)(3\ 4) \in H$ a tudíž díky předchozí úvaze $A_5 \subseteq H$.

   Pokud $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) \in H$, $\sigma^2 = (1\ 3)(2\ 4) \in H$, a proto podle předchozího kroku $A_5 \cup \{(1\ 2\ 3\ 4)\} \subseteq H$, tedy $\mathbf{S}_5 = H$.

   Pokud $(1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in H$, pak i konjugovaná permutace $(1\ 3\ 2\ 4\ 5) \in H$, a proto $(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^{-1} \circ (1\ 3\ 2\ 4\ 5) \in H$, tudíž $A_5 \subseteq H$.

   (b) plyne z (a) protože A_5 není komutativní.

4. $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+ \cong \{1, -1\}, [r] \to \operatorname{sgn} r$,

   $\mathbb{R}^*/\{1, -1\} \cong \mathbb{R}^+, [r] \to |r|$,

   $\mathbb{C}^*/\mathbf{N} \cong \mathbb{R}^+, [c] \to |c|$.