4. cvičení

1. Najděte všechny homomorfismy
(a) $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$,
(b) $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ a $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$,
(c) $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_{15}, +, -, 0)$ a $(\mathbb{Z}_{15}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0)$,
(d) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$ do $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$ a $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$,
(e) $(\mathbb{Z}_2, +, -, 0)$ do $(\mathbf{S}_n, \circ, ^{-1}, \mathrm{id})$,

2. Dokažte, že jsou navzájem izomorfní všechny tři grupy

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_8^*, \quad K = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \leq \mathbf{S}_4.$$

3. Dokažte, že grupy $\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbf{A}_4$ a $\mathbb{Z}_{12}$ jsou po dvou neizomorfní.

Řešení:

1. (a) zobrazení $x \to zx$ pro libovolné $z \in \mathbb{Z}$,

   (b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$: zobrazení $x \to (zx) \bmod n$ pro libovolné $z \in \mathbb{Z}_n$,

   $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$: pouze zobrazení $x \to 0$.

   (c) $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{15}$: $x \to (zx) \bmod 15$ pro $z \in \{0, 5, 10\}$

   $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$: $x \to (zx) \bmod 6$ pro $z \in \{0, 2, 4\}$

   (d) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$: nulový homomorfismus, a tři nenulové:

   1) $(1, 0), (1, 1) \to 2$, $(0, 1), (0, 0) \to 0$,

   2) $(0, 1), (1, 1) \to 2$, $(1, 0), (0, 0) \to 0$ a

   3) $(1, 0), (0, 1) \to 2$, $(1, 1), (0, 0) \to 0$

   (e) nulový a všechna zobrazení $0 \to 0$, $1 \to \sigma$ pro permutace σ řádu 2.

2. Například zobrazení $(0, 0) \to 1$, $(1, 0) \to 3$, $(0, 1) \to 5$, $(1, 1) \to 7$ je izomorfismus $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_8^*$,

   zobrazení $1 \to \mathrm{id}$, $3 \to (1\ 2)(3\ 4)$, $5 \to (1\ 3)(2\ 4)$ a $7 \to (1\ 4)(2\ 3)$ je izomorfismus $\mathbb{Z}_8^* \to K$,

   jejich složení je izomorfismus $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to A$

3. Grupa $\mathbb{Z}_{12}$ je komutativní, zatímco obě grupy $\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$ a $\mathbf{A}_4$ nejsou komutativní, proto $\mathbb{Z}_{12} \ncong \mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_{12} \ncong \mathbf{A}_4$.

   Grupa $\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$ obsahuje prvek $((123), 1)$ řádu 6, zatímco $\mathbf{A}_4$ žádný prvek řádu 6 neobsahuje, proto i $\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_2 \ncong \mathbf{A}_4$.