

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Použijete-li nějaké netriviální tvrzení z předenášky, uvedte explicitně odkaz.

Časový limit je 90 minut a je třeba získat aspoň 18 z 32 možných bodů.

1. (1 bod) Uveďte definici grupy a nějaký příklad grupy, která není komutativní.

2. (1 bod) Popište pomocí podgrup všechny ekvivalence slučitelné s grupovou operací.

3. (1 bod) Napište aspoň dvě neizomorfní devítiprvkové grupy.

4. (1 bod) Rozhodněte, zda tvoří sudá celá čísla podgrupu grupy $\mathbb{Q}(+)$? Stručně zdůvodněte.

5. (1 bod) Kolik existuje podgrup konečné cyklické grupy?

6. (1 bod) Co znamená, že jsou algebry izomorfní?

7. (1 bod) Je průnik dvou kongruencí na algebře vždy kongruence? Stručně zdůvodněte.

8. (1 bod) Jsou grupy $\mathbb{Q}(+)$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(+)$ izomorfní? Stručně zdůvodněte.

9. (1 bod) Popište všechny ideály okruhu celých čísel.

10. (1 bod) Definujte Booleovu algebru.

11. (2 body) Spočtěte 17^{-1} v monoidu $\mathbb{Z}_{24}(\cdot)$

12. (2 body) Kolik existuje homomorfismů grupy $\mathbf{Z}_2(+)$ do grupy $S_4(\circ)$? Odůvodněte.

13. (2 body) Kolik podgrup a kolik kongruencí má grupa $\mathbb{Z}_{100}(+)$? Odůvodněte.

14. (2 body) Je grupa $\mathbb{Z}_{10}^*(\cdot)$ cyklická? Zdůvodněte.

15. (7 bodů) Dokažte, že aspoň dvouprvkový okruh je (obecně nekomutativní) těleso, právě když obsahuje právě dva levé ideály.

16. (7 bodů) Zformulujte a dokažte větu o homomorfismu a 1. větu o izomorfismu pro grupy.