PÍSEMKY Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

Úloha 1 (16.10)**.** (cvičení od 14:00): Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(cvičení od 17:20): Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Řešení. V obou případech si matici soustavy převedeme pomocí posloupnosti ekvivalentních úprav do odstupňovaného tvaru.

(cvičení od 14:00):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 10 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-1} & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{3} & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vidíme, že pivoty se nachází v prvních dvou sloupcích, proto volná je třetí a čtvrtá proměnná. Položíme tedy $x_3 = s$ a $x_4 = t$, kde $s, t \in \mathbb{R}$, dopočítáme zpětnou substitucí první dvě neznámé x_2 a x_1:

$3x_2 + 5s + t = 3 \Rightarrow x_2 = 1 - \frac{5}{3}s - \frac{1}{3}t$

$-x_1 + x_2 + 2s = 1 \Rightarrow x_1 = -1 + (1 - \frac{5}{3}s - \frac{1}{3}t) + 2s = \frac{1}{3}s - \frac{1}{3}t$. To znamená, že řešení jsou právě tvaru $(\frac{1}{3}s - \frac{1}{3}t, 1 - \frac{5}{3}s - \frac{1}{3}t, s, t)$ pro libovolné $s, t \in \mathbb{R}$. Popíšeme tedy množinu všech řešení parametricky:

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(cvičení od 17:20):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pivoty se nalézají v prvním a třetím sloupci a volná je tudíž druhá a čtvrtá neznámá. Položme $x_2 = s$ a $x_4 = t$ pro $s, t \in \mathbb{R}$ a dopočítejme zpětnou substitucí ostatní neznámé x_3 a x_1:

$x_3 - 11t = -7 \Rightarrow x_3 = -7 + 11t$

$x_1 + s + x_3 + 4t = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - s - x_3 - 4t = 2 - s - (-7 + 11t) - 4t = 9 - s - 15t.$

Spočítali jsme, že řešení jsou právě tvaru $(9-s-15t, s, -7+11t, t)$ pro libovolné $s,t \in \mathbb{R}$ a můžeme množinu všech řešení vyjádřit parametricky:

$$\{\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R}\}.$$

□

Úloha 2 (23.10)**.** (cvičení od 14:00): Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ všechna řešení soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

a určete kolik jich je.

(cvičení od 17:20): Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ všechna řešení soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

a určete kolik jich je.

Řešení.
(cvičení od 14:00):
Nejprve upravíme matici posloupností elementárních úprav na odstupňovanou:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Stačilo tedy přičíst první řádek k druhému a trojnásobek prvního řádku k třetímu. Získali jsme jednu bazickou a tři volné proměnné a nyní najdeme všechna řešení zpětnou substitucí pro volbu $x_2 = r$, $x_3 = s$ a $x_4 = t$. Protože

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 5,$$

dostáváme

$$x_1 = 3^{-1} \cdot (5 - 2r - 6s - t) = 5 \cdot (5 + 5r + s + 6t) = 4 + 4r + 5s + 2t.$$

Zbývá množinu všech řešení parametricky popsat:

$$\{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r,s,t \in \mathbb{Z}_7\}.$$

Vidíme, že řešení je právě $7^3 = 343$. □

(cvičení od 17:20):

Opět upravíme matici posloupností elementárních úprav na odstupňovanou:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & | & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

První řádek jsme nejprve vynásobili prvkem $-1 = 4$, poté přičetli trojnásobek prvního řádku k druhému, dvojnásobek prvního řádku k třetímu a nakonec jsme odečetli dva shodné řádky. Máme tedy jednu bazickou a tři volné proměnné a nyní najdeme všechna řešení zpětnou substitucí pro volbu Položíme $x_2 = s$ a $x_4 = t$ a dopočítáme $x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - t = 1 + 4t$ a

$x_1+4x_2+2x_3+4x_4 = 4 \Rightarrow x_1 = 4-4s-2(1+4t)-4t = 4+s+3+2t+t = 2+s+3t$.

Zbývá množinu všech řešení parametricky popsat:

$$\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5\}.$$

Vidíme, že řešení existuje právě $5^2 = 25$. □

Úloha 3 (30.10)**.** (cvičení od 14:00): Definujme zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ předpisem $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}$. Najděte všechny vektory, pro které

a) $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c) $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(cvičení od 17:20): Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ všechny matice $\mathbf{X}$ splňující maticovou rovnici $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení.

(cvičení od 14:00):

Položme $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Protože vztah $f(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ představuje soustavu lineárních rovnic, budeme pracovat s maticovým zápisem soustav $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ postupně pro vektory pravých stran $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pro všechny tři soustavy stačí matici levých stran $\mathbf{A}$ upravit na odstupňovaný tvar jen jednou. Zároveň s ní upravíme stejnými řádkovými úpravami oba nenulové vektory pravých stran:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & | & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & | & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & | & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní nejprve zpětnou substitucí zjistíme, že množina všech řešení homogenní soustavy a) je tvaru $\{t \cdot (1, 0, 1)^T \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$. Protože víme, že každé řešení nehomogenní soustavy je tvaru jedno řešení + řešení homogenní soustavy, zbývá najít zpětnou substitucí jedno řešení pro obě pravé strany a volbu třetí složky 0. Snadno spočteme, že v případě b) je řešením vektor $(0, 1, 0)^T$ a v případě c) vektor $(0, 2, 0)^T$, proto jsou množiny všech řešení tvaru

$$\text{a) } \{t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{Z}_5\},\ \text{b) } \{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{Z}_5\},\ \text{c) } \{\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{Z}_5\}.$$

(cvičení od 17:20):

Nejprve poznamenejme, že hledaná matice $\mathbf{X}$ musí být typu 2×3. Položíme-li $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&5&4\\5&2&1\end{pmatrix}$, dostáváme pomocí transpozice rovnici $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}^T=\begin{pmatrix}2&5\\1&4\end{pmatrix}$. Tu lze vyjádřit jako dvě soustavy rovnic s vektory neznámých $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{Z}_7^3$ obsažených ve sloupcích matice $\mathbf{X}^T$, tedy $\mathbf{X}=(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Řešíme proto soustavy

$$\mathbf{Ax}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad\text{a}\quad\mathbf{Ay}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix},$$

které můžeme zapsat do jedné matice s oběma vektory pravých stran vpravo a levé strany budeme poté upravovat posloupností elementárních úprav na odstupňovanou matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}3&5&4&2&5\\5&2&1&1&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&4&6&3&4\\5&2&1&1&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&4&6&3&4\\0&3&6&0&5\end{array}\right).$$

Nyní nejprve zpětnou substitucí dopočítáme množinu všech řešení homogenní soustavy s maticí levých stran $\mathbf{A}$, jíž je $\{t\cdot(2,5,1)^T \mid t\in\mathbb{Z}_7\}$. Protože je množina všech řešení nehomogenní soustavy součtem libovolného vybraného řešení a všech řešení homogenní soustavy, zbývá najít zpětnou substitucí jedno řešení pro obě pravé strany a volbu třetí složky 0. Snadno spočteme, že v případě vektoru neznámých $\mathbf{x}$ je partikulárním řešením vektor $(3,0,0)^T$ a v případě vektoru neznámých $\mathbf{y}$ je partikulárním řešením $(2,4,0)^T$. To znamená, že po transponování vidíme, že rovnici splňují právě matice $\mathbf{X}$ z množiny

$$\{\begin{pmatrix}3&0&0\\2&4&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2t&5t&t\\2s&5s&s\end{pmatrix} \mid s,t\in\mathbb{Z}_7\}=\{\begin{pmatrix}3+2t&5t&t\\2+2s&4+5s&s\end{pmatrix} \mid s,t\in\mathbb{Z}_7\}.$$

□

Úloha 4 (13.11)**.** (cvičení od 14:00): Je-li $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2&2&1\\4&3&3\\1&3&0\end{pmatrix}$ najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ matici $\mathbf{X}$, pro niž $\mathbf{M}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{I}_3$.

(cvičení od 17:20): Je-li $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}2&3&4\\4&4&2\\2&1&2\end{pmatrix}$, najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ matici $\mathbf{X}$, pro niž $\mathbf{N}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{I}_3$.

Řešení.
(cvičení od 14:00):
Budeme řešit tři soustavy rovnic se stejnou maticí levých stran

$$\mathbf{M}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{M}\,\mathbf{y} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{M}\,\mathbf{z} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

a hledanou maticí sestavíme ze sloupců $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Všechny soustavy upravujeme společně v jedné rozšířené matici $(\mathbf{M}|\mathbf{I}_3)$ tak, abychom v levé části dostali jednotkovou matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&1&1&0&0\\4&3&3&0&1&0\\1&3&0&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&0&0&1\\4&3&3&0&1&0\\2&2&1&1&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&0&0&1\\0&1&3&0&1&1\\0&1&1&1&0&3\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&0&0&1\\0&1&3&0&1&1\\0&0&3&1&4&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&0&0&1\\0&1&0&4&2&4\\0&0&1&2&3&4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&4&4\\0&1&0&4&2&4\\0&0&1&2&3&4\end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix}3&4&4\\4&2&4\\2&3&4\end{pmatrix}$.

(cvičení od 17:20):
Abychom našli matici $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ splňující rovnici $\mathbf{N} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}_3$, budeme pomocí jediné rozšířené matice $(\mathbf{N}|\mathbf{I}_3)$ řešit tři soustavy rovnic se stejnou maticí levých stran

$$\mathbf{N}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{N}\,\mathbf{y} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{N}\,\mathbf{z} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Posloupností elementárních řádkových úprav převedeme $(\mathbf{N}|\mathbf{I}_3)$ na matici, v jejíž pravé části je jednotková matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&4&1&0&0\\4&4&2&0&1&0\\2&1&2&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&4&2&3&0&0\\0&3&4&3&1&0\\0&3&3&4&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&4&2&3&0&0\\0&3&4&3&1&0\\0&0&4&1&4&1\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&4&0&0&3&2\\0&3&0&2&2&4\\0&0&1&4&1&4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&4&2&0\\0&1&0&4&4&3\\0&0&1&4&1&4\end{array}\right)$$

Spočítali jsme, že $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix}4&2&0\\4&4&3\\4&1&4\end{pmatrix}$. □

Úloha 5 (20.11)**.** (cvičení od 14:00): Ověřte, že je matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0&2&1\\5&3&6\\1&0&5\end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ regulární a napište ji jako součin elementárních matic.

(cvičení od 17:20): Existuje-li, najděte LU rozklad matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

Řešení.
(cvičení od 14:00):
Nejprve převedeme matici $\mathbf{A}$ posloupností elementárních úprav na jednotkovou matici a úpravy vyjádříme pomocí násobení elementární maticí zleva. Upravujeme

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \mathbf{I}_3$$

a dostáváme jednotkou matici jako součin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{A}.$$

Odtud vidíme, že stačí tento součin elementárních matic invertovat, abychom získali hledaný rozklad na elementární matice $\mathbf{A} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(cvičení od 17:20):
Budeme matici $\mathbf{B}$ upravovat posloupností elementárních úprav na odstupňovanou matici. Přípustné je pouze přičítání násobku výše položeného řádku k níže položenému řádku.

$$\mathbf{B} \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odstupňovanou matici $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dostáváme jako součin

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B}.$$

To znamená, že pro matici

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

platí rovnost $\mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$. Našli jsme LU-rozklad $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Úloha 6 (27.11)**.** (cvičení od 14:00): Rozhodněte, zda je lineárně závislá či nezávislá posloupnost vektorů $X = \left(\begin{pmatrix} 3\\2\\3\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\3\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\4\\2\\4 \end{pmatrix} \right)$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

(cvičení od 17:20): Rozhodněte, zda je lineárně závislá či nezávislá posloupnost vektorů $X = \left(\begin{pmatrix} 0\\2\\3\\5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\6\\3\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5\\3\\6\\4 \end{pmatrix} \right)$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

Řešení.

(cvičení od 14:00):

Máme zjistit, zda existuje netriviální lineární kombinace vektorů posloupnosti X, jejímž výsledkem bude nula. Maticově to znamená otázku, zda je hodnost matice, kde tyto vektory sepíšeme do sloupců menší než čtyři. Sestavíme tedy matici a tu řádkově upravujeme

$$\begin{pmatrix} 3&2&4&3\\2&1&1&4\\3&3&1&2\\4&4&1&4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3&2&4&3\\0&3&0&2\\0&1&2&4\\0&3&4&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3&2&4&3\\0&3&0&2\\0&0&2&0\\0&0&4&3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3&2&4&3\\0&3&0&2\\0&0&2&0\\0&0&0&3 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že hodnost matice je 4, neexistuje tudíž žádné netriviální řešení soustavy a posloupnost X je lineárně nezávislá.

(cvičení od 17:20):

Potřebujeme zjistit, zda jedinou lineární kombinací vektorů posloupnosti X, jejímž výsledkem je nula, je kombinace triviální. Maticově to znamená otázku, zda je hodnost matice, kde tyto vektory sepíšeme do sloupců je čtyři. Sestavíme matici a tu řádkově upravujeme

$$\begin{pmatrix} 0&2&5&5\\2&6&1&3\\3&3&0&6\\5&4&1&4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&6&1&3\\0&2&5&5\\0&1&2&5\\0&3&2&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&6&1&3\\0&3&2&0\\0&0&6&5\\0&0&6&5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&6&1&3\\0&3&2&0\\0&0&6&5\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že hodnost matice je 3, tudíž existuje netriviální řešení soustavy a posloupnost X je lineárně závislá.

$\square$

Úloha 7 (4.12)**.** (cvičení od 14:00): Najděte bázi podprostoru

$$U = \langle \begin{pmatrix}5\\2\\4\\6\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\5\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$$

aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^5$ nad nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ a doplňte ji na bázi lineárního prostoru $\mathbb{Z}_7^5$.

(cvičení od 17:20): Uvažujte posloupnost vektorů

$$Y = (\begin{pmatrix}3\\0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\\-4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix})$$

a podprostor $V = \langle Y \rangle$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Q}^5$ nad nad tělesem $\mathbb{Q}$. Určete dimenzi V, vyberte z Y bázi U a doplňte ji na bázi lineárního prostoru $\mathbb{Q}^5$.

Řešení.

(cvičení od 14:00):

Seřadíme si vektory generující podprostor U do řádků matice a tu upravíme na odstupňovanou:

$$\begin{pmatrix}5&2&4&6&1\\6&1&2&3&4\\3&1&2&1&5\\4&4&1&1&4\\3&2&5&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&6&5&4&3\\0&0&0&0&0\\0&4&1&3&3\\0&1&2&6&6\\0&5&4&3&6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&6&5&4&3\\0&1&2&6&6\\0&0&1&1&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Nenulové řádky matice tvoří lineárně nezávislou generující posloupnost, tedy bázi podprostoru U Nahradíme-li nulové řádky čtvrtým a pátým vektorem kanonické báze, pak dostáváme odstupňovanou matici s pěti nenulovými řádky, tedy matici v jejíž řádcích je báze celého $\mathbb{Z}_7^5$. Hledanou bázi proto tvoří například posloupnost $(\begin{pmatrix}1\\6\\5\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\6\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\4\end{pmatrix})$, již posloupnost $(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$ doplňuje na bázi $\mathbb{Z}_7^5$.

(cvičení od 17:20):

Seřadíme vektory posloupnosti Y do očíslovaných řádků matice a tu upravíme na odstupňovanou:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}3&0&2&1&1&i\\2&0&1&-1&2&ii\\3&0&1&-4&5&iii\\2&0&1&1&1&iv\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&2&-1&i\\0&0&-1&-5&4&ii\\0&0&-2&-10&8&iii\\0&0&-1&-3&3&iv\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & i \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & ii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & iii \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & iv \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & i \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & ii \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & iv \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & iii \end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že třetí vektor posloupnosti Y je lineární kombinací prvních dvou a že první třetí a čtvrtý vektor tvoří bázi V, tedy V má dimenzi 3. Přidáme-li do odstupňované matice bez nulového řádku druhý a pátý vektor kanonické báze, vidíme, že po přerovnání řádků dostaneme odstupňovanou matici hodnosti 5, tudíž druhý a pátý vektor kanonické báze doplňují bázi lineárního prostoru V na bázi lineárního prostoru $\mathbb{Q}^5$.

Zjistili jsme, že $\dim V = 3$ a našli vybranou bázi lineárního prostoru V, kterou tvoří například posloupnost

$$\left(\begin{pmatrix}1\\6\\5\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\6\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\4\end{pmatrix}\right), \text{ již posloupnost } \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ doplňuje na bázi } \mathbb{Q}^5. \quad \square$$

Úloha 8 (11.12)**.** (cvičení od 14:00): Ověřte, že jsou posloupnosti

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) \text{ a } C = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)$$

báze aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a najděte matici přechodu $[\mathrm{Id}]^B_C$.

(cvičení od 17:20):

Ověřte, že jsou posloupnosti $B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right)$ a $C = \left(\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right)$ báze aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^2$ nad nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a najděte matice přechodu $[\mathrm{Id}]^B_C$ a $[\mathrm{Id}]^C_B$.

Řešení.

(cvičení od 14:00):

Ve sloupcích matice přechodu od báze B k bázi C se nacházejí právě souřadnicové vektory jednotlivých vektorů báze B vyjádřené vzhledem k bázi C. Potřebujeme-li tyto vektory najít, musíme vyřešit nehomogenní soustavy rovnic se stejnou maticí levých stran $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 0\\1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ a s vektory pravých stran z báze C. Tento systém soustav vyřešíme najednou Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Nyní si všimněme, že je z výpočtu zřejmé, že posloupnost C tvoří bázi a pro posloupnost B rychle spočítáme, že rank $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&0\\4&3&2\end{pmatrix}$ = rank $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$ = 3, tudíž i B tvoří bázi a máme spočteno $[\mathrm{Id}]^B_C = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&2\\3&4&2\end{pmatrix}$.

(cvičení od 17:20):

Obě posloupnosti zřejmě obsahují dvojice vektorů, které nejsou svými násobky, proto jde o dvouprvkové lineárně nezávislé posloupnosti v dvoudimenzionálním prostoru, což jsou nutně báze $\mathbb{Z}_5^2$. Vzhledem k tomu, že potřebujeme najít souřadnice jedné báze vzhledem k druhé, můžeme si úlohy zformulovat maticově:

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}\cdot[\mathrm{Id}]^C_B = \begin{pmatrix}3&4\\3&3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3&4\\3&3\end{pmatrix}\cdot[\mathrm{Id}]^B_C = \begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že

$$[\mathrm{Id}]^C_B = \begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\3&3\end{pmatrix}, \quad [\mathrm{Id}]^B_C = \begin{pmatrix}3&4\\3&3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix} = ([\mathrm{Id}]^C_B)^{-1}.$$

Spočítáme nejprve obvyklou metodou $[\mathrm{Id}]^C_B$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&3&4\\2&4&3&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&3&4\\0&2&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&4\\0&1&1&0\end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že $[\mathrm{Id}]^C_B = \begin{pmatrix}2&4\\1&0\end{pmatrix}$, zbývá dopočítat $[\mathrm{Id}]^B_C = \begin{pmatrix}2&4\\1&0\end{pmatrix}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&4&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&4&1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&4&2\end{array}\right),$$

a proto $[\mathrm{Id}]^B_C = \begin{pmatrix}0&1\\4&2\end{pmatrix}$. □

Úloha 9 (19.12)**.** (cvičení od 14:00): Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ uvažujme podprostory $U = \langle \begin{pmatrix}3\\4\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$ a $V = \langle \begin{pmatrix}1\\3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix} \rangle$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. Spočítejte $\dim(U)$, $\dim(V)$, $\dim(U+V)$ a $\dim(U\cap V)$ a rozhodněte, zda $\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in U+V$.

(cvičení od 17:20): Mějme množiny vektorů $X = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ a $Y = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \}$ a nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ uvažujme podprostory $U = \langle X \rangle$ a $V = \langle Y \rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^3$. Spočítejte $\dim(U)$, $\dim(V)$, $\dim(U+V)$ a $\dim(U \cap V)$ a najděte nějakou bázi $U \cap V$.

Řešení.
(cvičení od 14:00):
Nejprve spočítáme pomocí Gaussovy eliminace dimenze i báze U a V:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože $U = \text{Im } \mathbf{A}$ a $V = \text{Im } \mathbf{B}$, vidíme, že $\dim(U) = \dim(V) = 3$. Dále, protože $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in U+V$ a $\text{Im} A \subseteq U+V$, máme $\mathbb{Z}_5^4 = \text{Im} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \subseteq U+V \subseteq \mathbb{Z}_5^4$. Tedy $U+V = \mathbb{Z}_5^4$, a proto $\dim(U+V) = 4$. Nyní podle Věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů je $\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 3+3-4 = 2$. Konečně $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U+V$, neboť $U+V = \mathbb{Z}_5^4$.

(cvičení od 17:20):
Obvyklým způsobem spočítáme pomocí Gaussovy eliminace dimenze (a vlastně i báze) U a V. Nejprve seřadíme do řádků matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ vektory z množin X a Y, aby $U = \text{Im } \mathbf{A}$ a $V = \text{Im } \mathbf{B}$ a spočítáme jejich hodnost:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že proto $\dim(U) = \text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ a $\dim(V) = \text{rank}(\mathbf{B}) = 2$. Dále

$$\dim(U+V) = \text{rank}(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}) = \text{rank}(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 3$$

podle Věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů je $\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 2+2-3 = 1$.

Nyní popíšeme vektory průniku $\dim(U \cap V)$ pomocí vektorové rovnice

$$x\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix},$$

která po převedení na levou stranu vede na homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix}3&0&6&0\\1&4&4&5\\5&1&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&4&2&5\\0&1&5&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&5&1\\0&0&3&1\end{pmatrix}.$$

Z odstupňované matice okamžitě vidíme, že bázi řešení soustavy tvoří například vektor $(3,3,2,1)^T$, proto je hledaným bazickým vektorem průniku $\dim(U \cap V)$ vektor $3\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$, □

Úloha 10 (8.1)**.** (cvičení od 14:00): Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ dané podmínkami

$$\varphi(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$$

Najděte matici $[\varphi]_{K_2}^{K_3}$ lineárního zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bázím, a spočítejte dimenze podprostorů Kerφ a Imφ.

(cvičení od 17:20): Uvažujme lineární zobrazení $\psi : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ s maticí $[\psi]_C^B = \begin{pmatrix}4&3\\2&2\\1&4\end{pmatrix}$ vzhledem k bázím $B = (\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix})$ a $C = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix})$. Spočítejte matici $[\psi]_{K_3}^{K_2}$ lineárního zobrazení ψ vzhledem ke kanonickým bázím, a dimenze podprostorů Kerφ a Imφ.

Řešení.

(cvičení od 14:00): Nejprve si všimněme, že je posloupnost $M = (\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix})$ báze prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ a že je ze zadání zjevná matice $[\varphi]_{K_2}^M = \begin{pmatrix}3&2&1\\4&1&3\end{pmatrix}$. Užijeme-li větu z přednášky, zjistíme, že

$$[\varphi]_{K_2}^{K_3} = [\varphi]_{K_2}^M \cdot [\mathrm{Id}]_M^{K_3} = [\varphi]_{K_2}^M \cdot ([\mathrm{Id}]_{K_3}^M)^{-1} = \begin{pmatrix}3&2&1\\4&1&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&0\\1&1&2\end{pmatrix}^{-1}$$

Nyní spočítáme transponovaný součin $([\varphi]_{K_2}^{K_3})^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že $[\varphi]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Konečně okamžitě vidíme, že $\operatorname{rank}[\varphi]_{K_2}^{K_3} = 1$, proto $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 3 - 1 = 2$ a $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$.

(cvičení od 17:20): Požijeme-li větu z přednášky, zjistíme, že potřebujeme spočítat

$$[\psi]_{K_3}^{K_2} = [\mathrm{Id}]_{K_3}^{C} \cdot [\psi]_{C}^{B} \cdot [\mathrm{Id}]_{B}^{K_3} = [\mathrm{Id}]_{K_3}^{C} \cdot [\psi]_{C}^{B} \cdot ([\mathrm{Id}]_{K_3}^{B})^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Nyní určíme transponovaný součin $([\psi]_{K_3}^{K_2})^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že $[\psi]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Konečně vidíme, že $\operatorname{rank}[\psi]_{K_3}^{K_2} = 2$, proto $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 2 - 2 = 0$ a $\dim \operatorname{Im}\varphi = 2$.

$\square$