## 1. Ideály okruhů polynomů

Připomeňme, že je-li $(R, +, -, \cdot, 0, 1)$ komutativní okruh, nazveme množinu $I \subseteq R$ ideálem, jestliže

(1) I je podgrupou grupy $(R, +, -, 0)$ a
(2) $i \cdot r \in I$ pro všechna $i \in I$ a $r \in R$.

Ideál generovaný množinou prvků $a_1, \dots, a_n$ budeme značit $(a_1, \dots, a_n)$

Komutativní okruh $(R, +, -, 0, \cdot, 1)$ nazveme *oborem integrity*, platí-li pro každou dvojici nenulových prvků $a, b \in R$, že $a \cdot b \neq 0$. O oboru integrity hlavních ideálů mluvíme v případě, že jsou všechny jeho ideály hlavní, tj. tvaru $iR = \{i \cdot r | \ r \in R\}$. Dobře známým příkladem oboru integrity hlavních ideálů jsou okruhy polynomů o jedné neznámé nad libovolným komutativním tělesem

**1.1.** Je-li $R$ obor hlavních ideálů a $I \neq 0$ jeho ideál, dokažte, že jsou následující body ekvivalentní

(1) $I$ je prvoideál,
(2) $I$ je maximální ideál,
(3) existuje prvočintel $p$, pro který $I = (p)$.

(2)⇒(1) Snadný důsledek definic (navíc platný v jakémkoli komutativním oboru).

(1)⇒(3) V oboru hlavních ideálů existuje $p \in I$, pro něž $I = (p)$. Zbývá nahlédnout, že je $p$ prvočintel. Nechť $p/a \cdot b$, pak $a \cdot b \in (p) = I$. Protože je $I$ prvoideál, máme buď $a \in (p)$ a tudíž $p/a$ nebo $b \in (p)$ a tudíž $p/b$. Tím jsme ověřili, že je $p$ prvočintel.

(3)⇒(2) Jestliže $I = (p) \subsetneq (j)$ pro nějaký prvek $j \in R$ ($R$ je totiž obor hlavních ideálů), pak $p/j$, ovšem prvek $p$ není s $j$ asociován. Protože je $p$ prvočintel, musí být nutně $j$ invertibilní, tedy $(j) = R$. □

**1.2.** Je-li $T$ těleso, ověřte, že $T[x, y]$ není oborem hlavních ideálů.

Stačí uvážit ideál $(x, y) \neq T[x, y]$. Kdyby nějaký polynom $p \in T[x, y]$ generoval ideál $(x, y)$, muselo by se jednat o polynom dělitelný polynomy $x$ i $y$, tedy o invertibilní prvek, což je ve sporu s faktem $(x, y) \neq T[x, y]$. □

**1.3.** Dokažte pro každé $n$, že je ideál $I = (x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \dots, xy^{n-1}, y^n)$ okruhu $T[x, y]$ je generován nejméně $n + 1$ generátory.

Vezměme si ideál $J = (x^{n-1}, x^{n-2}y, x^{n-3}y^2, \dots, xy^{n-2}, y^{n-1})$ a uvážíme, že ideál $I/J$ faktorového okruhu $T[x, y]/J$ má strukturu modulu nad faktorokruhem $T[x, y]/(x, y)$. Okruh $T[x, y]/(x, y) \cong T$ je ovšem komutativní těleso a modul nad komutativním tělesem je právě vektorový prostor. Protože není těžké ověřit, že bázi tohoto vektorového prostoru tvoří množina $\{x^n + J, x^{n-1}y + J, \dots, y^n + J\}$, jedná se o vektorový prostor dimenze $n+1$. Kdyby byla v ideálu $I$ přítomna generující množina $G$ o nejvýše $n$ prvcích, pak by množina $\{g + J, g \in G\}$ generovala celý vektorvý prostor $T[x, y]/J$. To by ovšem bylo ve sporu s hodnotou jeho dimenze. □

**1.4.** Najděte ideál $I$ oboru $\mathbb{R}[x, y]$, pro který

(1) $V(I) = \{(2, -1)\}$,
(2) $V(I) = \{(2, -1), (1, 0)\}$,
(3) $V(I)$ je právě jednotková kružnice se středem v bodě $(0, 0) \in A^2(\mathbb{R})$,

(4) $V(I)$ je právě jednotková kružnice se středem v bodě $(-1,4) \in A^2(\mathbb{R})$,

Nejprve stačí použít pozorování z přednášky, abychom dostali:

(1) $V((x-2,y+1)) = \{(2,-1)\}$, a proto $I = (x-2,y+1)$.
(2) $V((x-2,y+1)(x-1,y)) = V((x-2,y+1)) \cup V((x-1,y)) = \{(2,-1)\} \cup \{(1,0)\} = \{(2,-1),(1,0)\}$, a proto $I = (x-2,y+1)(x-1,y)$.
(3) Protože je jednotková kružnice se středem v počátku právě množina bodů $(x,y) \in A^2(\mathbb{R})$ splňující rovnost $x^2+y^2=1$, je hledaným ideálem $I = (x^2+y^2-1)$.
(4) Tentokrát máme množinu bodů $(x,y) \in A^2(\mathbb{R})$ splňující rovnost
$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 1,$$
je hledaným ideálem $I = ((x+1)^2 + (y-4)^2 - 1) = (x^2+2x+y^2-8y+16)$. $\square$

**1.5.** Najděte ideál $I$ oboru $\mathbb{R}[x,y,z]$, aby $V(I) = (1,0,0) + \langle(2,3,4)\rangle$ (přímka se směrem $(2,3,4)$ procházející bodem $(1,0,0)$)

Stačí najít soustavu lineárních rovnic, jejímž řešením je uvedená přímka, například
$$3x - 2y = 1$$
$$4x - 3z = 0$$
a vzít příslušné polynomy $3x-2y-1$ a $4x-3z$ jako generátory hledaného ideálu. Nyní už je snadné nahlédnout, že pro $I = (3x-2y-1, 4x-3z)$ dostáváme právě $V(I) = (1,0,0) + \langle(2,3,4)\rangle$. $\square$

*24.2.*

**1.6.** Je-li $\mathbb{F}_q$ konečné těleso řádu $q$, dokažte, že

(1) $V(x^q - x) = A^1(\mathbb{F}_q)$,
(2) $I(A^1(\mathbb{F}_q)) = (x^q - x)$,
(3) $V(x_1^q - x_1, \dots x_n^q - x_n) = A^n(\mathbb{F}_q)$,
(4) $(x_1^q - x_1, \dots x_n^q - x_n) \subseteq I(A^n(\mathbb{F}_q))$.

(1) Stačí si připomenout, že $x^q = x$ pro každý prvek $x \in \mathbb{F}_q$.
(2) Buď můžeme argumentovat, že je každá konečná množina algebraická a že $x^q - x = \prod_{a\in\mathbb{F}_q}(x-a)$ nebo si uvědomíme, že $(x^q - x) \subseteq I(A^1(\mathbb{F}_q))$ a pro každý prvek $f \in I(A^1(\mathbb{F}_q))$ platí, že ho dělí $\prod_{a\in\mathbb{F}_q}(x-a) = x^q - x$.
(3) a (4) I tentokrát funguje argument, že $x^q - x = 0$ pro každý prvek $x \in \mathbb{F}_q$. $\square$

**1.7.** Popište ideály oboru $\mathbb{R}[x,y]$:

(1) $I(\{(0,0)\})$,
(2) $I(\{(0,0),(1,1)\})$,
(3) $I(\{(0,0),(1,1),\dots,(n,n)\})$ pro libovolné přirozené $n$.

Dle tvrzení z přednášky okamžitě dostáváme:

(1) $I(\{(0,0)\}) = (x,y)$,
(2) $I(\{(0,0),(1,1)\}) = (x,y)(x-1,y-1) = (x^2-x, xy-x, xy-y, y^2-y)$,
(3) $I(\{(0,0),(1,1),\dots,(n,n)\}) = \prod_{i=0}^n (x-i, y-i)$. $\square$

**1.8.** Dokažte v oboru $\mathbb{R}[x,y]$, že

(1) $I(\{(i,i), i \in \mathbb{N}\}) = (x-y)$,
(2) $(x-y) = \bigcap_n \prod_{i=0}^n (x-i, y-i)$.

(1) Okamžitě vidíme, že $(x-y) \subseteq I(\{(i,i), i \in \mathbb{N}\})$.

Abychom ověřili obrácenou inkluzi, vydělíme libovolný polynom $f \in I(\{(i,i), i \in \mathbb{N}\})$ se zbytkem polynomem $(x-y)$. To můžeme udělat, protože na všechny polynomy oboru $\mathbb{R}[x,y]$ můžeme nahlížet jako na polynomy jedné neurčité $x$ s koeficienty v oboru $\mathbb{R}[y]$ a vedoucí koeficient polynomu $(x-y)$ je v takovém případě jistě invertibilní.

Tedy víme, že existují polynomy $q, r \in \mathbb{R}[x,y]$, pro něž $f = q(x-y) + r$. Navíc $\deg(r) < \deg_x(x-y) = 1$, proto $r \in \mathbb{R}[y]$. Proto $r = f - q(x-y) \in I(\{(i,i), i \in \mathbb{N}\})$. To ovšem znamená, že jsou všechna $i \in \mathbb{N}$ kořenem polynomu $r \in \mathbb{R}[y]$, a tudíž je $r = 0$.

(2) Protože $\{(i,i), i \leq n\} \subseteq \{(i,i), i \in \mathbb{N}\}$ pro každé $n$, snadno nahlédneme, že $(x-y) = I(\{(i,i), i \in \mathbb{N}\}) \subseteq I(\{(i,i), i \leq n\}) = (x-i, y-i)$. Abychom ověřili obrácenou inkluzi, přejdeme k faktorovému okruhu $\mathbb{R}[x,y]/(x-y) \cong \mathbb{R}[X]$. Protože ideály $(x-i+(x-y), y-i+(x-y)) = (x-i+(x-y)) \cong (X-i)$ už jsou ve faktorovém okruhu hlavní, uvažujeme fakticky průnik $\bigcap_n \prod_{i=0}^n (X-i)$ v oboru $\mathbb{R}[X]$. Ten je ovšem zřejmě nulový, a proto $(x-y) = \bigcap_n \prod_{i=0}^n (x-i, y-i)$ □

**1.9.** Dokažte, v oboru $\mathbb{R}[x,y]$ že $I(\{(i,i^2), i \in \mathbb{N}\}) = (x^2 - y)$.

Postupujeme jako v úloze 1.8(1) s tím rozdílem, že nakonec dělíme se zbytkem nad okruhem $\mathbb{R}[y]$, aby byl zbytek polynomem jedné neurčité $x$. I v takovém případě je zbytek polynom s nekonečně mnoha kořeny. □

*3.3.*

**1.10.** Ověřte v oboru $\mathbb{R}[x,y]$, že $I(\{(i,i^2), i \in \mathbb{N}\}) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I(\{(j,j^2) |\ j \leq i\})$.

Vše se ukáže obdobně jako 1.8(2) za použití výsledku předchozí úlohy. □

**1.11.** Ověřte, že existuje automorfismus oboru $\mathbb{R}[x,y]$, pro který platí:

(1) $\varphi(x) = x+1$, $\varphi(y) = y-3$,
(2) $\varphi(x) = 3x+y-1$, $\varphi(y) = x-y+1$,
(3) $\varphi((x+5y)) = (x-y)$, $\varphi((x-y)) = (y)$, $\varphi((x+y)) = (x)$.

(1) Definujme zobrazení $\varphi, \psi : \mathbb{R}[x,y] \to \mathbb{R}[x,y]$ předpisy $\varphi(p(x,y)) = p(x+1, y-3)$ a $\psi(p(x,y)) = p(x-1, y+3)$, zřejmě $\varphi$ splňuje požadavek $\varphi(x) = x+1$, $\varphi(y) = y-3$. Protože se jedná o dosazení, obě zobrazení jsou (dosazovací) homomorfismy. Navíc si uvědomme, že je každý $\mathbb{R}$-homnomorfismus (tj. takový okruhový homomorfismus, který se na konstantách $r \in \mathbb{R}$ chová identicky) oboru $\mathbb{R}[x,y]$ do sebe je jednoznačně určen obrazy monomů $x$ a $y$. Protože $\varphi\psi(x) = x$, $\psi\varphi(x) = x$, $\varphi\psi(y) = y$ a $\psi\varphi(y) = y$, dostáváme, že $\varphi\psi = \psi\varphi = \mathrm{id}$, a proto jsou $\varphi$ a $\psi$ vzájemně inverzní automorfismy oboru $\mathbb{R}[x,y]$.

(2) Postupujeme obdobně jako v předchozí úloze, tentokrát si ovšem všimneme, že požadavek $\varphi(x) = 3x+y-1$, $\varphi(y) = x-y+1$ lze chápat jako afinní transformaci, kterou můžeme zapsat maticově

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Chceme-li potom určit inverzní zobrazení $\psi$ k zobrazení $\varphi$, stačí nám invertovat příslušné afinní zobrazení:

$$\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy definujme-li zobrazení $\varphi, \psi : \mathbb{R}[x,y] \to \mathbb{R}[x,y]$ předpisy

$$\varphi(p(x,y)) = p(3x+y-1, x-y+1), \quad \psi(p(x,y)) = p(\frac{x+y}{4}, \frac{x-y}{4}+1),$$

dostáváme stejnou argumentací jako v (1) závěr.

(3) I tentokrát se jedná o elementární lineárně algebraickou úlohu počítající s afinními prostory. Zobrazení hlavních ideálů, které lze popsat na generátorech, je určeno jednoznačně až na násobek invertibilním prvkem. Snáze se nám bude definovat inverzní zobrazení

$$\psi(x) = a(x+y),\ \psi(y) = b(x-y),\ \psi(x-y) = a(x+y) - b(x-y) = x + 5y,$$

odkud snadno dopočítáme $a = 3$, $b = 2$. Nyní snadno dostaneme:

$$\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

a proto $\varphi(p(x,y)) = p(\frac{2x+3y}{12}, \frac{2x-3y}{12})$, $\psi(p(x,y)) = p(3(x+y), 2(x-y))$. □

**1.12.** Dokažte v oboru $\mathbb{R}[x,y]$, že

(1) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \prod_{i<n} (x-2i-1, y-i-1) = (x-2y+3)$,
(2) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \prod_{i<n} (x-a_i) = (y)$ pro každou nekonečnou množinu $\{a_i | i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

V obou úlohách stačí využít okruhového izomorfismu daného afinní transformací (viz předchozí příklad) a tvrzení úlohy 1.8. Konkrétně v (1) uvažujeme bijektivní afinní transformaci, která převede přímku $(1,1) + \langle(2,1)\rangle$ (na níž máme nekonečně mnoho bodů) na přímku $\langle(1,1)\rangle$ (pro niž jsme otázku v 1.8 vyřešili) a v úloze (2) uvažujeme bijektivní afinní transformaci převádějící $\langle(1,0)\rangle$ na $\langle(1,1)\rangle$. □

*10.3.*

## 2. Algebraické množiny

**2.1.** Ověřte, že je množina algebraická a najděte její rozklad na variety:

(1) $\{(1,2,3)\} \subset A^3(\mathbb{R})$,
(2) $\{(0,0,0),(1,2,3),(4,4,4)\} \subset A^3(\mathbb{R})$,
(3) libovolná podmnožina $\subset A^3(F_q)$, kde $F_q$ je konečné těleso.
(4) $\{(t,t^2,t^3) |\ t \in \mathbb{R}\} \subset A^3(\mathbb{R})$,
(5) $\{(\cos t, \sin t) |\ t \in \mathbb{R}\} \subset A^2(\mathbb{R})$.

(1) Víme, že platí $V(x-1, y-2, z-3) = \{(1,2,3)\}$ tedy jde o algebraickou množinu. Zjevně je nerozložitelná.

(2) Protože konečné sjednocení algebraických množin je opět algebraciká množina, jedná se o algebraickou množinu a

$$\{(0,0,0),(1,2,3),(4,4,4)\} = \{(0,0,0)\} \cup \{(1,2,3)\} \cup \{(4,4,4)\}$$

je její rozklad na variety.

(3) Protože je každá podmnožina konečné množiny $\subset A^3(F_q)$ konečná, jde opět o algebraickou množinu, jejíž rozklad na variety sestává z jednoprvkových podmnožin.

(4) Snadno spočítáme, že $A_4 = \{(t,t^2,t^3) |\ t \in \mathbb{R}\} = V(x^2-y, x^3-z)$. Je-li $f \in I(A_4)$ můžeme postupně vydělit se zbytkem nejprve nad okruhem $(\mathbb{R}[x,z])[y]$ polynomem $x^2-y$ a poté zbytek, který už je jen polynomem z oboru $\mathbb{R}[x,z]$ nad okruhem $(\mathbb{R}[x])[z]$ polynomem $x^3-z$ a dostaneme $f = q_1(x^2-y) + q_2(x^3-z) + r$, kde $r \in \mathbb{R}[x]$. Protože $r \in I(A_4)$, je $r(t) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, tedy $r = 0$. Zjistili jsme, že $I(A_4) = (x^2-y, x^3-z)$

a dokážeme-li, že $(x^2 - y, x^3 - z)$ je prvoideál, budeme vědět, že $A_4$ je dokonce varieta. K tomu si ovšem stačí všimnout, že $(x^2-y, x^3-z)$ je právě jádro dosazovacího homomorfismu $\Omega : \mathbb{R}[x,y,z] \to \mathbb{R}[x]$, kde $\Omega(p(x,y,z)) = p(x, x^2, x^3)$, protože $\mathbb{R}[x,y,z]/\mathrm{Ker}\Omega \cong \mathbb{R}[x]$ je obor integrity.

(5) Snadno usoudíme, že $A_5 = \{(\cos t, \sin t) |\ t \in \mathbb{R}\}$ obsahuje právě všechny body jednotkové kružnice se středem v bodě $(0,0)$. To znamená, že $A_5 = V(x^2+y^2-1)$ a jedná se tudíž o algebraickou množinu. Dále nahlédneme, že $IV(x^2+y^2-1) = (x^2+y^2-1)$. Jestliže $f \in IV(x^2+y^2-1)$, pak můžeme $f$ vydělit se zbytkem nad okruhem $(\mathbb{R}[x])[y]$ polynomem $x^2+y^2-1$, který tedy chápeme jako polynom v proměnné $y$ a dostaneme, že $f = q(x^2+y^2-1) + ay + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}[x]$. Všimněme si, že

$$a(\cos(t))\sin(t) + b(\cos(t)) = a(\cos(-t))\sin(-t) + b(\cos(-t)) = -a(\cos(t))\sin(t) + b(\cos(t)),$$

proto $a(\cos(t)) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, tedy $a = 0$. To znamená, že i $b(\cos(t)) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a tím máme dokázáno, že $IV(x^2+y^2-1) = (x^2+y^2-1)$.

Konečně, ověříme-li tedy, že je polynom $x^2+y^2-1$ ireducibilní, bude $(x^2+y^2-1)$ prvoideál, a tudíž podle tvrzení z přednášky bude $A_5$ varieta. Nechť tedy $x^2+y^2-1 = a \cdot b$ a chápejme $x^2+y^2-1$ jako na polynom (například) v proměnné $x$ s s koeficienty v oboru $\mathbb{R}[y]$. Kdyby $\deg_x(a) = 2$, pak $\deg_x(b) = 0$ a není težké nahlédnout, že už nutně musí být $b$ invertibilní. Kdyby $\deg_x(a) = 1$, pak by v $\mathbb{R}[y]$ musel existovat polynom $q$ splňující $q^2 = 1 - y^2$, což neplatí, a proto je $x^2+y^2-1$ ireducibilní. □

**2.2.** Ověřte, že množina $B = \{(t, \cos t), t \in \mathbb{R}\}$ není v $A^2(\mathbb{R})$ algebraická.

Označme pro každé $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ množinu

$$B_c = \{(2k\pi + c, \cos 2k\pi + c), k \in \mathbb{Z}\} = \{(2k\pi + c, \cos c), k \in \mathbb{Z}\}$$

a všimněme si, že $B_c \subseteq B$, a proto $I(B_c) \supseteq I(B)$ a $VI(B_c) \subseteq VI(B)$. Navíc obdobně jako v úloze 1.12(2) zjistíme, že $I(B_c) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \prod_{i<n} (x - 2i\pi + c, y - \cos c) = (y - \cos c)$. To znamená, že $\{(t, \cos c) |\ t \in \mathbb{R}\} = V(y - \cos c) = VI(B_c)$. Tedy vidíme, že $VI(B) \neq B$, tudíž množina $B$ nemůže být algebraická. □

*17.3.*

**2.3.** Je-li $T$ nekonečné těleso a $p \in T[x]$, dokažte, že je $\{(t, p(t)), t \in T\}$ varieta.

Nejprve si všimněme, že $A = \{(t, p(t)), t \in T\}$ je právě množina všech řešení polynomiální rovnice $p(x) = y$, což znamená, že $A = V(p(x) - y)$. Proto zřejmě $(p(x) - y) \subseteq I(A)$.

Vydělíme-li nyní libovolný polynom $f \in I(A)$ se zbytkem polynomem $p(x) - y$ v okruhu $(T[x])[y]$ (tj. na $f$ nahlížíme jako na polynom v proměnné $y$ s koeficienty v $T[x]$) dostaneme $f = q(p(x) - y) + r$, kde $\deg_y(r) < \deg_y(p(x) - y) = 1$, tj. $r \in T[x]$. Protože $r(t) = 0$ pro všechna $t \in T$, vidíme, že $I(A) = (p(x) - y)$.

Nechť $p(x) - y = a \cdot b$ v oboru $(T[x])[y]$, pak bez újmy na obecnosti dostáváme, že $a \in T[x]$ a $b = cy + d$ pro $c, d \in T[x]$. To ovšem znamená, že $c \cdot a = -1$, proto je polynom $p(x) - y$ v oboru $T[x, y]$ ireducibilní a tudíž $(p(x) - y)$ prvoideál. Tvrzení z přednášky potom implikuje, že je $A$ varieta. □

**2.4.** Napište rozklad množiny $V(x + y^3)$ na variety nad libovolným tělesem $T$.

Je-li $T$ nekonečné těleso, pak snadnou aplikací předchozího příkladu (spolu s přehozením souřadnic) dostáváme, že je sama množina $V(x + y^3) = \{(-t^3, t), t \in T\}$ varieta.

Je-li $T$ konečné těleso, pak podle 2.1(3) dostáváme rozklad na jednoprvkové variety $V(x+y^3) = \{(-t^3,t), t\in T\} = \bigcup_{t\in T}\{(-t^3,t)\}$ $\square$

**2.5.** Uvažujme spojitou reálnou funkci $f$ na celém $\mathbb{R}$ a dvě nekonečné posloupnosti reálných čísel $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, pro které $x_n \to +\infty$ a $y_n \to +\infty$. Jestliže pro každé $n$ platí, že $f(x_n) = f(x_{n+1}) < f(y_n) = f(y_{n+1})$, dokažte, že množina $\{(t, f(t)), t \in T\}$ není algebraická.

Úvaha zobecňuje 2.2. Označíme $a = f(x_1)$ a $b = f(y_1)$ Nejprve si uvědomíme, že pro každé $c \in (a,b)$ existuje posloupnost $z_{c,n}$, pro níž $f(z_{c,n}) = c$, $n \in \mathbb{N}$ a poté opět definujeme množinu

$$B_c = \{(z_{c,n}, f(z_{c,n})), n \in \mathbb{N}\} = \{(z_{c,n}, c), n \in \mathbb{N}\}.$$

Stejnou argumentací jako v úloze 2.2 dostaneme, že

$$\{(t,c)|\ t \in \mathbb{R}\} = V(y-c) = VI(B_c),$$

tudíž $VI(B) \neq B$, a proto $B$ nemůže být algebraickou množinou. $\square$

**2.6.** Dokažte, že množina $V(xz-y^2, z^3-x^5)$ není v $A^3(\mathbb{C})$ varietou.

Nejprve z druhého polynomu $z^3 - x^5$ zjistíme, že

$$V(xz-y^2, z^3-x^5) = \{(t^3, b, t^5)|\ t \in \mathbb{C}, t^8 - b^2 = 0\} =$$

$$= \{(t^3, t^4, t^5)|\ t \in \mathbb{C}\} \cup \{(t^3, -t^4, t^5)|\ t \in \mathbb{C}\}.$$

Protože snadno spočítáme, že

$$\{(t^3, t^4, t^5)|\ t \in \mathbb{C}\} = V(xz-y^2, z^3-x^5, y^3-x^4)$$

a

$$\{(t^3, -t^4, t^5)|\ t \in \mathbb{C}\} = V(xz-y^2, z^3-x^5, y^3+x^4),$$

vidíme, že je $V(xz-y^2, z^3-x^5)$ sjednocením dvou vlastních algebraických podmnožin, tedy nemůže jít o varietu. $\square$

**2.7.** Ukažte, že $P = (x^2 + y^2(y-1)^2)$ je prvoideál oboru oboru $\mathbb{R}[x,y]$ a že algebraická množina $V(P)$ není v $A^2(\mathbb{R})$ varietou.

Nejprve poznamenejme, že nahlížíme-li na $x^2+y^2(y-1)^2$ jako na polynom v proměnné $x$ s koeficienty v oboru $\mathbb{R}[y]$, pak snadno zjistíme, že $x^2 + y^2(y-1)^2$ je ireducibilní, v opačném případě by v $\mathbb{R}[y]$ musel existovat polynom $q$ splňující $q^2 = -y^2(y-1)^2$, což zřejmě nad tělesem reálných čísel neplatí. Protože je polynom $x^2+y^2(y-1)^2$ ireducibilní, je $(x^2+y^2(y-1)^2)$ prvoideál.

Protože $x^2 \geq 0$ $y^2(y-1)^2 \geq 0$ pro všechna reálná čísla $x, y \in \mathbb{R}$, snadno nyní dopočítáme, že $V(P) = \{(0,0),(0,1)\}$, tedy $V(P) = \{(0,0)\} \cup \{(0,1)\}$ je rozklad množiny na dvojici variet. $\square$

*24.3.*

**2.8.** Najděte rozklad na variety algebraických množin v prostoru $A^2(\mathbb{C})$ a $A^2(\mathbb{R})$:

(1) $V(x^3 + x - x^2y - y)$,
(2) $V(x^3 + y^2 - x^2y - xy)$,
(3) $V(y^2 - x(x-1)(x-\lambda))$ pro $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

(1) Stačí uvážit, že $x^3 + x - x^2y - y = (x-y)(x^2+1) = (x-y)(x+i)(x-i)$, proto

$$V(x^3 + x - x^2y - y) = V(x-y) \cup V(x^2+1) =$$
$$= \{(t,t) |\ t \in \mathbb{C}\} \cup \{(i,t) |\ t \in \mathbb{C}\} \cup \{(-i,t) |\ t \in \mathbb{C}\}$$

je rozklad na variety v komplexním oboru. Nad reálnými čísly je $V(x^3 + x - x^2y - y) = \{(t,t) |\ t \in \mathbb{R}\}$ už varietou, protože $V(x^2+1) = \emptyset$.

(2) Obdobně jako v (1) máme $x^3 + y^2 - x^2y - xy = (x-y)(x^2-y)$, a proto

$$V(x^3 + y^2 - x^2y - xy) = V(x-y) \cup V(x^2-y) = \{(t,t) |\ t \in T\} \cup \{(t,t^2) |\ t \in T\}$$

je rozklad na variety pro $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{C}$.

(3) Uvažujme $T = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Nejprve obvyklým způsobem nahlédneme, že je polynom $p = y^2 - x(x-1)(x-\lambda)$ ireducibilní. Stačí k tomu chápat $p$ jako polynom v proměnné $y$ a rozmyslet si, že rozklad na součin polynomů stupně 1 by vedl na úlohu odmocnit $x(x-1)(x-\lambda)$ v oboru $T[x]$ a rozklad na součin polynomu z $T[x]$ a polynomu nad $y$ (s koeficienty v $T[x]$) stupně 2.

Nyní stačí, abychom ověřili, že $IV(y^2 - x(x-1)(x-\lambda)) = (y^2 - x(x-1)(x-\lambda))$. To můžeme buď provést podobně jako v předchozích úlohách provést přímo dělením se zbytkem v oboru $(T[x])[y]$ nebo využijeme výsledek následující úlohy 2.12.

Zjistili jsme, že je $V(y^2 - x(x-1)(x-\lambda))$ varieta. □

**2.9.** Jak bude vypadat rozklad na variety algebraických množin z předchozí úlohy v prostoru $A^2(T)$ pro

(1) $T$ konečné těleso,
(2) $T$ nekonečné těleso charakteristiky různé od 2,
(3) $T$ nekonečné těleso charakteristiky 2.

(1) Nad konečným tělesem jsou variety právě jednoprvkové, tedy stačí vzít rozklad na jednobodové množiny

(2) Jestliže existuje nějaký kořen $a \in T$ polynomu $x^2+1$, potom jsou řešení stejná jako v 2.8 pro komplexní čísla. V opačném případě má řešení tvar stejný jako v reálném případě.

(3) Pro těleso charakteristiky 2 zřejmě platí, že má polynom $x^2+1 = (x+1)(x+1)$ právě jeden kořen 1, proto se algebraická množina v úloze 2.8(1) rozpadá na sjednocení dvou variet

$$V(x^3 + x - x^2y - y) = V(x-y) \cup V(x^2+1) = \{(t,t) |\ t \in \mathbb{C}\} \cup \{(1,t) |\ t \in \mathbb{C}\}.$$

Řešení ostatních úlohy už je stejné jako v 2.8. □

**2.10.** Rozhodněte, zda je varietou algebraická množina v $A^2(T)$ pro nekonečné těleso $T$:

(1) $V(x^7 - x^3 - x + 1, y^3 - y)$,
(2) $V(p,q)$, kde $p \in T[x]$ a $q \in T[y]$.

(1) Všimněme si, že $V(x^7 - x^3 + 3, y^3 - y) = \{(a,b) |\ a^7 - a^3 + 3 = 0 = b^3 - b\}$, což je zřejmě konečná množina. Navíc $(1,0), (1,1) \in V(x^7 - x^3 + 3, y^3 - y)$, tedy nemůže jít o varietu.

(2) Opět nahlédneme, že $V(p,q) = \{(a,b) |\ p(a) = 0 = q(b)\}$, tedy jde zřejmě o konečnou množinu, která je varietou, právě když je nejvýše jednoprvková. Tedy $V(p,q)$ je varieta právě když existuje nejvýše jeden kořen polynomu $p$ i polynomu $q$. □

**2.11.** Nechť $p, q \in T[x,y]$ jsou dva nesoudělné polynomy. Dokažte, že $V(p,q)$ je konečná množina.

Na polynomy $p, q$ můžeme nahlížet jako na prvky oboru $T(x)[y]$, kde $T(x)$ značí podílové těleso oboru $T[x]$, tedy obor racionálních lomených funkcí v jedné neurčité $x$. Tento obor je Eukleidův, proto musí existovat $u, v \in T(x)[y]$, pro něž $up + vq = 1$. Vezmeme-li nějakého společného jmenovatele $h \in T[x]$ všech koeficientů polynomů $u, v$, pak $hup + hvq = h$, kde už $hu, hv \in T[x, y]$. Protože je $h$ nenulový, existuje jen konečně mnoho kořenů $K_x$ polynomu $h$. Nyní stejnou úvahou pro obor $T(y)[x]$ najdeme polynomy $g \in T[y]$ a $r, s \in T[x, y]$, pro něž $rp + sq = g$. Označíme-li $K_y$ všechny kořeny polynomu $g$, pak vidíme, že

$$V(p, q) \subseteq V(g, h) = K_x \times K_y.$$

Tedy $V(p, q)$ je konečná množina. □

*31.3.*

**2.12.** Je-li $g \in T[x, y]$ ireducibilní polynom a $V(g)$ nekonečné, dokažte, že $IV(g) = (g)$, a že je $V(g)$ varieta.

Víme, že $(g) \subseteq IV(g)$. Předpokládejme $f \in IV(g) \setminus (g)$. Protože je $g$ ireducibilní a $g$ nedělí $f$, jsou polynomy $f$ a $g$ v $T[x, y]$ nesoudělné. Dále $V(g) = VIV(g) \subseteq V(f, g)$, neboť $(f, g) \subseteq IV(g)$. Ovšem $V(f, g)$ je podle 2.11 je konečné, což je ve sporu s předpokladem, že $V(g)$ je nekonečná množina. Závěr, že je $V(g)$ varieta okamžitě plyne z faktu, že $IV(g) = (g)$ je prvoideál. □

**2.13.** Dokažte, že je $V(x^2 + xy + y) \subseteq A^2(\mathbb{C})$ varieta.

Využijeme 2.12, a proto stačí, abychom nahlédli, že je polynom $x^2 + xy + y$ ireducibilní a $V(x^2 + xy + y)$ nekonečné. Přímým výpočtem dostaneme

$$\{(t, -\frac{t^2}{t+1} | \; t \in \mathbb{C} \setminus \{-1\})\} \subseteq V(x^2 + xy + y),$$

tudíž druhá podmínka zřejmě platí. Protože je v proměnné $y$ polynom $x^2 + xy + y$ stupně 1 a v proměnné $x$ stupně 2 a navíc tento polynom zjevně není součinem polynomu stupně 0 nad $x$ a polynomu stupně 0 nad $y$ (tj. jednoho prvku oboru $\mathbb{C}[x]$ a jednoho prvku oboru $\mathbb{C}[y]$), znamenala by jeho reducibilita, že by byl tvaru $(x - \alpha)(x - \beta)$ pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[y]$, což nenastává. □

## 3. Souřadnicové okruhy

**3.1.** Popište souřadnicový okruh $\Gamma(A)$ pro varietu $A = V(x^2 + xy + y) \subseteq A^2(\mathbb{C})$. Rozhodněte, zda je $\Gamma(A)$ těleso, případně, zda se jedná o $C$-algebru s jedním generátorem.

Připomeňme, že

$$\Gamma(A) = \mathbb{C}[x, y]/I(A) \cong \{f : A \to \mathbb{C} | \; (\exists p \in \mathbb{C}[x, y])(\forall (\mathbf{a}) \in A) : f(\mathbf{a}) = p(\mathbf{a})\}.$$

V předchozí úloze jsme zjistili, že $I(A) = (x^2 + xy + y)$, proto $\Gamma(A) = \mathbb{C}[x, y]/(x^2 + xy + y)$. Snadno nahlédneme, že hlavní ideál $(x^2 + xy + y)$ není maximální (například proto že $(x^2 + xy + y) \subsetneq (x, y)$), tudíž $\Gamma(A)$ není těleso.

Nyní ukážeme, že $\Gamma(A)$ není ani jednogenerovanou $C$-algebrou. Budeme ke sporu předpokládat, že existuje nějaký $C$-homomorfismus $\varphi : \mathbb{C}[t] \to \Gamma(A)$, který je na celé $\Gamma(A)$. Protože je obor $\mathbb{C}[t]$ Eukleidův, existuje polynom $p \in \mathbb{C}[t]$, pro který $\mathrm{Ker}\varphi = (p)$. Poznamenejme, že podle 1.věty o izomorfismu $\mathbb{C}[t]/\mathrm{Ker}\varphi \cong \Gamma(A)$. Kdyby by byl polynom $p$ nenulový, pak by musel být ireducibilní, což by znamenalo, že $\mathbb{C}[t]/\mathrm{Ker}\varphi \cong \Gamma(A) \cong \mathbb{C}$ To už jsme ovšem vyloučili v první úvaze. Zbývá možnost, že $p = 0$, a proto $\mathbb{C}[t] \cong \Gamma(A)$.

Tuto variantu můžeme buď vyloučit přímočarou úvahou o vlastnostech generátoru $\varphi(t)$ nebo použijeme následující obecnější tvrzení. $\square$

*7.4.*

**3.2.** Ukažte, že pro varietu $A = V(x^2 + xy + y) \subseteq A^2(\mathbb{C})$ neexistuje žádný prostý homomorfismus souřadnicového okruhu $\Gamma(A)$ do $\mathbb{C}[t]$ .

Uvažujme nějaký homomorfismus $\varphi : \Gamma(A) \to \mathbb{C}[t]$. Nejprve si všimněme, že také $\mathbb{C}[t]$ je souřadnicový okruh, tentokrát variety $A^1(\mathbb{C})$, kde $I(A^1(\mathbb{C})) = (0)$, a tudíž mmáme izomorfismus $\mathbb{C}[t]/I(A^1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}[t]$. To znamená, že musí existovat polynomiální zobrazení $f : \mathbb{C}[t] \to A$, pro které $f^* = \varphi$. Označme si $p_1(t), p_2(t) \in \mathbb{C}[t]$, pro něž $f(t) = (p_1(t), p_2(t))$. Potom nutně $p_1^2 + p_1p_2 + p_2 = 0$, a proto $p_2 = -\frac{p_1^2}{p_1+1}$. Zřejmě $\gcd(p_1^2, p_1 + 1) = 1$, a proto $p_1$ a tudíž i $p_2$ musí být konstantní, Odtud okamžitě vidíme, že $\varphi$ nemůže být prosté zobrazení (dokonce $\mathrm{Ker}\varphi$ je nutně maximální) $\square$

V následujících dvou úlohách použijeme výsledků úloh 2.1(4) a 2.3.

**3.3.** Najděte souřadnicový okruh $\Gamma(V)$ variety $V = \{(t, t^2, t^3) |\ t \in \mathbb{R}\} \subseteq A^3(\mathbb{R})$ a dokažte, že $V \cong A^1(\mathbb{R})$ a $\Gamma(V) \cong \mathbb{R}[t]$.

V úloze 2.1(4) jsme zjistili, že $I(V) = (x^2 - y, x^3 - z)$ a že pro polynomiální zobrazení $f : A^1(\mathbb{R}) \to V$ dané vztahem $f(t) = (t, t^2, t^3)$ je indukované zobrazení $f^* : \Gamma(V) = \mathbb{R}[x, y, z]/I(V) \to \mathbb{R}[t]$ okruhový izomorfismus. Tudíž je izomorfismem variet i zobrazení $f$, všimněme si, že inverzní polynomiální zobrazení $g : V \to A^1(\mathbb{R})$ je dáno právě předpisem $g(x, y, z) = x$. $\square$

**3.4.** Ověřte, že je pro varietu $V = V(x - y^2) \subseteq A^2(\mathbb{R})$ zobrazení $\psi : \Gamma(V) \to \mathbb{R}[t]$ dané vztahem $\psi(p + I(V)) = p(t^2, t)$ okruhovým izomorfismem.

Protože z úlohy 2.3 snadno dostaneme, že $V(x - y^2) = \{(t^2, t) |\ t \in \mathbb{R}\}$, zobrazení $\psi$ mezi souřadnicovými okruhy je tvaru $\psi = f^*$ pro polynomiální zobrazení odpovídajících variet $f : A^1(\mathbb{R}) \to V$ dané vztahem $f(t) = (t^2, t)$. Nyní stačí ověřit, že je $f$ izomorfismus variet. Vidíme, že pro $g : V \to A^1(\mathbb{R})$ dané $g(x, y) = (y)$ dostáváme, že $fg = \mathrm{id}_V$ a $gf = \mathrm{id}_{A^1(\mathbb{R})}$, tedy $f$ je izomorfismus variet a $\psi = f^*$ izomorfismus okruhů. $\square$

Uvážíme polynomiální zobrazení $f : V_1 \to V_2$ dvou variet a jím indukovaný homomorfismus příslušných souřadnicových okruhů $f^* : \Gamma(V_2) \to \Gamma(V_1)$. Připomeňme, že jeli $f$ na, pak pro každý polynom $p$ určující rozkladovou třídu v okruhu $\Gamma(V_2)$ platí, že $p(f(V_1)) = p(V_2)$, tedy jestliže $p(f) \in I(V_1)$, pak $p \in I(V_2)$. Tedy předpoklad $f$ je na implikuje, že $f^*$ je prosté.

**3.5.** Uvažujme množinu $V = V(y^2 - x^2(x + 1)) \subseteq A^2(\mathbb{R})$ a definujme zobrazení $\varphi : \mathbb{R}[x, y]/I(V) \to \mathbb{R}[t]$ předpisem $\varphi(p + I(V)) = p(t^2 - 1, t(t^2 - 1))$.

(1) Dokažte, že $V$ je varieta, a ukažte $\mathbb{R}[x, y]/I(V)$ její souřadnicový okruh.
(2) Ověřte, že je $\varphi$ dobře definovaný okruhový homomorfismus.
(3) Najděte (jednoznačně určené) polynomiální zobrazení $f : A^1(\mathbb{R}) \to V$, aby $\varphi = f^*$.
(4) Dokažte, že je $f$ na a $\varphi$ prosté.

(1) Stačí, abychom obvyklým způsobem nahlédli, že je $V$ nekonečná (stačí pro každé $x > -1$ vzít $y = |x|\sqrt{(x + 1)}$, aby $(x, y) \in V$) a že je polynom $y^2 - x^2(x + 1)$ ireducibilní

(viz 2.8). Pak díky 2.12 $I(V) = (y^2 - x^2(x+1))$ a $V$ je varietou a se souřadnicovým okruhem $\Gamma(V) = \mathbb{R}[x,y]/(y^2 - x^2(x+1))$.

(2) Je-li zobrazení korektní, zřejmě jde o homomorfismus, neboť na něj můžeme nahlížet jako na dosazovací homomorfismus. Ukážeme, že je zobrazení $\varphi$ dobře definované, tedy, že pro dva reprezentanty $a, b \in \mathbb{R}[x,y]$ stejné rozkladové třídy, tj. jestliže $a+I(V) = b+I(V)$, platí, že

$$a(t^2-1, t(t^2-1)) = b(t^2-1, t(t^2-1)).$$

Protože $a - b \in I(V) = (y^2 - x^2(x+1))$, stačí ověřit, že $p(t^2-1, t(t^2-1)) = 0$ pro generátor $p = y^2 - x^2(x+1)$ ideálu $I(V)$ , zřejmě tedy

$$p(t^2-1, t(t^2-1)) = (t(t^2-1))^2 - (t^2-1)^2(t^2-1+1) = 0.$$

(3) Uvědomíme-li si, že $\mathbb{R}[t] \cong \mathbb{R}[t]/(0)$ je souřadnicovým okruhem variety $A^1(\mathbb{R})$, kde $I(A^1(\mathbb{R})) = 0$, a připomeneme-li, že máme vzájemně jednoznačnou přirozenou korespondenci (tj. zachovávající skládání) mezi systémem polynomiálních funcí variet a homomorfismy jim odpovídajících souřadnicových okruhů, stačí nám vzít obrazy

$$\varphi(x + I(V)) = t^2 - 1, \quad \varphi(y + I(V)) = t(t^2-1),$$

které určují hledané polynomiální zobrazení $f(t) = (t^2-1, t(t^2-1))$.

(4) Všimněme si, že $(0,0)$ je jediný prvek variety $V$ s nulovou první souřadnicí a definujme nejprve zobrazení $g : V' = V \setminus \{(0,0)\} \to A^1(\mathbb{R})$ předpisem $g(x,y) = \frac{y}{x}$. Ukážeme, že $fg(V') = V'$. Vezměme $(x,y) \in V'$ a označme $t = g(x,y) = \frac{y}{x}$. Protože $(x,y) \in V$, platí, že $(y^2 - x^2(x+1) = 0$, a proto $x + 1 = (\frac{y}{x})^2 = t^2$. Nyní snadno spočítáme, že

$$fg(x,y) = (t^2-1, t(t^2-1)) = (x+1-1, \frac{y}{x}(x+1-1)) = (x,y).$$

Navíc $f(1) = f(-1) = (0,0)$. Zjistili jsme, že $f(A^1(\mathbb{R})) = V$, proto je $f$ zobrazení na celé $V$ a tedy $\varphi = f^*$ je podle úvahy před úlohou prostý homomorfismus. $\square$

*14.4.*

**3.6.** Nechť $V \subseteq A^n(T)$ a $W \subseteq A^m(T)$ jsou dvě variety nad tělesem $T$ a buď $f : V \to W$ polynomiální zobrazení. Je-li $f(V)$ algebraická množina, dokažte, že je $f(V)$ ireducibilní.

Uvážíme (dosazovací) homomorfimus $\widehat{f} : T[x_1, \ldots, x_m] \to \Gamma(V)$ daný vztahem $\widehat{f}(p) = p(t) + I(V)$, kde $\Gamma(V) = T[y_1, \ldots, y_n]/I(V)$ označuje souřadnicový okruh variety $V$. Všimněme si, že $\widehat{f}$ dostaneme jako složení přirozené projekce

$$\pi : T[x_1, \ldots, x_m] \to \Gamma(W) = T[x_1, \ldots, x_m]/I(W)$$

a indukovaného homomorfismu $f^* : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$, tj $\widehat{f} = f^*\pi$. Nyní spočítáme jádro homomorfismu $\widehat{f}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\widehat{f} &= \{p \in T[x_1, \ldots, x_m] |\ \widehat{f}(p) = 0 + I(V)\} = \\ &= \{p \in T[x_1, \ldots, x_m] |\ p(f) + I(V) = 0 + I(V)\} = \\ &= \{p \in T[x_1, \ldots, x_m] |\ p(f) \in I(V)\} = \\ &= \{p \in T[x_1, \ldots, x_m] |\ p(f(V)) = 0\} = I(f(V)). \end{aligned}$$

Protože $T[x_1, \ldots, x_m]/\mathrm{Ker}\widehat{f}$ je izomorfní podokruhu oboru integrity $\Gamma(V)$, jde rovněž o obor integrity, a tudíž je $\mathrm{Ker}\widehat{f} = I(f(V))$ prvoideálem. Nyní už víme, že je algebraická množina $f(V)$ ireducibilní. $\square$

Vrátíme se znovu k příkladu 2.6.

**3.7.** Najděte rozklad na variety algebraické množiny $V(xz-y^2, z^3-x^5)$ v $A^3(\mathbb{C})$.

Připomeňme, že jsme 2.6 dokázali

$$V(xz-y^2, z^3-x^5) = \{(t^3,t^4,t^5)|\ t\in\mathbb{C}\} \cup \{(t^3,-t^4,t^5)|\ t\in\mathbb{C}\}.$$

Navíc víme, že obě množiny $V_1 = \{(t^3,t^4,t^5)|\ t\in\mathbb{C}\}$ a $V_2 = \{(t^3,-t^4,t^5)|\ t\in\mathbb{C}\}$ jsou algebraické, zbývá tedy nahlédnout, že jsou ireducibilní. K tomu stačí využít polynomiálních zobrazení $f_i : A^1(\mathbb{C}) \to A^3(\mathbb{C})$, $f_i(t) = (t^3, (-1)^{i-1}t^4, t^5)$, kde $i = 1, 2$. Protože $f_i(A^1(\mathbb{C})) = V_i$, obdržíme jejich ireducibilitu použitím tvrzení úlohy 3.6. □

V následujících úlohách budeme používat značení

$$V_1 = \{(t^3,t^4,t^5)|\ t\in\mathbb{C}\},\quad V_2 = \{(t^3,-t^4,t^5)|\ t\in\mathbb{C}\}$$

pro příslušné variety v afinním prostoru $A^3(\mathbb{C})$.

**3.8.** Rozhodněte, zda jsou variety $V_1$ a $V_2$ izomorfní.

Najdeme dvojici polynomiálních zobrazení $p : V_1 \to V_2$ a $q : V_2 \to V_1$, aby $pq = \mathrm{id}_{V_2}$ a $qp = \mathrm{id}_{V_1}$. Stačí zřejmě vzít polynomiální zobrazení daná předisem $p(x,y,z) = q(x,y,z) = (x,-y,z)$. □

**3.9.** Rozhodněte, zda jsou souřadnicové okruhy variet $V_1$ a $V_2$ izomorfní.

Protože je polynomiální zobrazení $p : V_1 \to V_2$ z předchozí úlohy izomorfismem, indukuje izomorfimus souřadnicových okruhů $p^* : \Gamma(V_2) \to \Gamma(V_1)$. Poznamenejme, že $\mathrm{id}_{\Gamma(V_2)} = (pq)^* = q^*p^*$ a $\mathrm{id}_{\Gamma(V_1)} = (qp)^* = p^*q^*$. □

**3.10.** Popište souřadnicový okruh variety $V_1$.

Strukturu souřadnicového okruh variety $V_1$ nám odhalí homomorfimsus $g^* : \Gamma(V_1) \to \Gamma(A^1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}[t]$ indukovaný polynomiálním zobrazením $g : A^1(\mathbb{C}) \to V_1$, $g_1(t) = (t^3,t^4,t^5)$ (všimněme si, že jde o polynomiální zobrazení definované stejným předpisem jako $f_1$, ale s omezeným oborem hodnot). Protože se jedná o zobrazení na varietu $V_1$, víme, že je homomorfismus $g^*$ prostý, a proto je $\Gamma(V_1) \cong g^*(\Gamma(V_1))$, což je podalgebra $\mathbb{C}$-algebry $\mathbb{C}[t]$. Ukážeme, že

$$g^*(\Gamma(V_1)) = \{c + t^3 \cdot h|\ c\in\mathbb{C}, h\in\mathbb{C}[t]\} = \{\sum_i h_i t^i \in \mathbb{C}[t]|\ h_1 = h_2 = 0\}.$$

Poznamenejme, že druhá rovnost je zřejmá a označme $S = \{c + t^3 \cdot h|\ c\in\mathbb{C}, h\in\mathbb{C}[t]\}$. Protože

$$g^*(x + I(V_1)) = t^3,\quad g^*(y + I(V_1)) = t^4,\quad g^*(z + I(V_1)) = t^5 \in S,$$

kde $x + I(V_1)$, $y + I(V_1)$, $z + I(V_1)$ jsou generátory $\mathbb{C}$-algebry $\Gamma(V_1)$, dostáváme inkluzi $g^*(\Gamma(V_1)) \subseteq S$. Naopak, zřejmě $\mathbb{C} \subseteq g^*(\Gamma(V_1))$ a zbývá dokázat, že $t^i \in g^*(x + I(V_1))$ pro všechna $i \geq 3$, což vidíme okamžitě ze vztahů:

$$g^*(x^j + I(V_1)) = t^{3j},\quad g^*(x^j y + I(V_1)) = t^{3j+4},\quad g^*(x^j z + I(V_1)) = t^{3j+5},\quad j \geq 0.$$

□

**3.11.** Rozhodněte, zda jsou variety $A^1(\mathbb{C})$ a $V_1$ izomorfní a zda jsou jako $\mathbb{C}$-algebry izomorfní souřadnicové okruhy variet $A^1(\mathbb{C})$ a $V_1$.

Samozřejmě stačí, abychom rozhodli jednu z ekvivalentních otázek. Vzhledem k tomu, že je souřadnicový okruh $\Gamma(A^1(\mathbb{C}))$ izomorfní $\mathbb{C}[t]$ a že jsme v předchozím příkladu popsali souřadnicový okruh $\Gamma(V_1) \cong S = \{\sum_i h_i t^i \in \mathbb{C}[t] \mid h_1 = h_2 = 0\}$, stačí dokázat, že $S$ není algebra nad $\mathbb{C}$ s jedním generátorem.

Předpokládejme ke sporu, že $v \in S$ generuje $\mathbb{C}$-algebru $S$. Kvůli stupňům polynomů v $S$ musí být nutně $\deg(v) = 3$, tedy $v = at^3 + b$ pro $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. V takovém případě ovšem pro každé $p(u) \in S$ platí, že $\deg_t(p(u)) = 3\deg_u(p(u))$, tedy $t^4 \notin \mathbb{C}[v]$ a dostáváme spor s předpokladem $S = \mathbb{C}[v]$. Tím jsme ověřili, že $\Gamma(V_1) \ncong \Gamma(A^1(\mathbb{C}))$, a tudíž $A^1(\mathbb{C}) \ncong V_1$. $\square$

*28.4.*

**3.12.** Spočítejte $V(I)$, $I(V(I))$ a $\dim_{\mathbb{C}}(R/I)$, jestliže

(1) $I = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ je ideál oboru $R = \mathbb{C}[x, y]$
(2) $I = (x_1, x_2^2, \dots, x_n^n)$ je ideál oboru $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$,
(3) $I = ((x-2)^6, (x+y)^5, (z^2+1)^3)$ je ideál oboru $R = \mathbb{C}[x, y, z]$.

(1) Nejprve ověříme, že $I = (x^2, y^2)$. Zřejmě $I \subseteq (x^2, y^2)$ a naopak

$$x^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x^2 - y^2), y^2 = x^2 + y^2 - x^2 \in I,$$

proto $(x^2, y^2) = I$. Nyní snadno dokážeme, že $1 + I, x + I, y + I, xy + I$ tvoří bázi $\mathbb{C}[x, y]/I$ jako vektorového prostoru nad tělesem $\mathbb{C}$. Nejprve si všimneme, že máme-li lineární kombinaci

$$a + bx + cy + dxy + I = a(1 + I) + b(x + I) + c(y + I) + d(xy + I) = 0 + I$$

pro $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, pak $a + bx + cy + dxy \in I$ Proto $a = b = c = d = 0$, tedy posloupnost $1 + I, x + I, y + I, xy + I$ je lineárně nezávislá. Uvážíme-li libovolný polynom $p \in \mathbb{C}[x, y]$, pak pomocí dělení se zbytkem, vyjádříme $p$ nejprve jako $p = qx^2 + \alpha x + \beta$, kde $q \in \mathbb{C}[x, y]$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[y]$ a poté koeficienty $\alpha = sy^2 + dy + b$ a $\beta = ty^2 + cy + a$, kde $s, t \in \mathbb{C}[y]$ a $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, což znamená, že

$$p + I = a + bx + cy + dxy + qx^2 + (sx + t)y^2 = a + bx + cy + dxy + I.$$

To znamená, že $1 + I, x + I, y + I, xy + I$ je báze $\mathbb{C}[x, y]/I$ nad tělesem $\mathbb{C}$, a proto $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x, y]/I) = 4$.

Dále máme $x, y \in \sqrt{I}$, neboť $x^2, y^2 \in I$ a podle Hilbertovy věty o nulách platí, že $\sqrt{I} = I(V(I))$. Tudíž $I \subseteq (x, y) \subseteq \sqrt{I}$, kde $(x, y)$ je maximální ideál. Protože je každý maximální ideál prvoideálem, $I \subseteq (x, y)$ a platí, že

$$\sqrt{I} = \bigcap \{P \subseteq \mathbb{C}[x, y] \mid I \subseteq P, P \text{ je prvoideál}\},$$

dostáváme rovnost $I(V(I)) = \sqrt{I} = (x, y)$. Konečně, nyní víme, že $V(I) = V(I(V(I))) = V(x, y)$, odkud okamžitě plyne, že $V(I) = \{(0, 0)\}$.

(2) Podobně jako v (1) vidíme, že $I \subseteq (x_1, x_2, \dots, x_n) \subseteq \sqrt{I}$, kde $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je maximální ideál, proto

$$I(V(I)) = \sqrt{I} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{a} \quad V(I) = V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{(0, \dots, 0)\}.$$

Indukční variantou úvahy z (1) zjistíme, že bázi $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ tentokrát tvoří množina $B = \{\prod_{i \le n} x_i^{j_i} + I \mid j_i < i\}$, proto $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I) = |B| = (n-1)!$.

(3) Díky afinní transformaci existuje okruhový $\mathbb{C}$-automorfismus $\varphi$, pro který $\widehat{I} = \varphi(I) = (x^6, y^5, (z^2+1)^3)$. Budeme pracovat s ideálem $\widehat{I}$. I tentokrát dostáváme inkluzi $(x, y, (z^2+1)) \subseteq \sqrt{\widehat{I}}$ navíc nám aplikace Hilbertovy věty o nulách dává $I(V(\widehat{I})) = \sqrt{\widehat{I}} =$

$$= \sqrt{(x^6, y^5, (z^2+1)^3)} \subseteq (x, y, (z-i)) \cap (x, y, (z+i)) = I(\{(0,0,i)\}) \cap I(\{(0,0,-i)\}).$$

Protože oba ideály $(x, y, (z-i))$ $(x, y, (z+i))$ jsou maximální a například pomocí dělení se zbytkem monomy $x$ a $y$ není těžké nahlédnout, že

$$(x, y, (z-i)) \cap (x, y, (z+i)) = (x, y, (z^2+1)) \subseteq \sqrt{(x^6, y^5, (z^2+1)^3)},$$

dostáváme rovnosti

$$V(\widehat{I}) = \{(0,0,i), (0,0,-i)\} \quad \text{a} \quad I(V(\widehat{I})) = (x, y, z^2+1).$$

Nyní inverzní afinní transformací zjistíme, že

$$V(I) = \{(2,-2,i), (2,-2,-i)\},\ I(V(I)) = (x-2, x+y, z^2+1) = (x-2, y+2, z^2+1).$$

Konečně obdobnou úvahou jako v (1) a (2) spočítáme, že množina

$$C = \{x^i y^j z^k \mid i < 6, j < 5, k < 6\}$$

tvoří reprezentanty báze vektorového prostoru $\mathbb{C}[x,y,z]/\widehat{I} \cong \mathbb{C}[x,y,z]/I$ nad tělesem $\mathbb{C}$, a tudíž $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x,y,z]/I) = |C| = 180$. □

**3.13.** Dokažte, že je $V(I)$ varieta a popište její souřadnicový okruh , jestliže

(1) $I = (x^2+xy+y)^{666}$ v $\mathbb{C}[x,y]$,
(2) $I = ((xz-y^2)^3, (z^3-x^5)^7, y^3+x^4)$ v $\mathbb{C}[x,y,z]$.

(1) Připomeňme, že jsme v 2.13 dokázali, že $V(x^2+xy+y)$ je varietou, protože $x^2+xy+y$ je ireducibilní polynom. Nyní můžeme přímo využít tohoto faktu nebo znovu zužitkovat Hilbertovu větu o nulách.

Protože je těleso $\mathbb{C}$ algebraicky uzavřené, víme díky přímému odmocnění polynomu $(x^2+xy+y)^{666}$ a Hilbertově větě o nulách, že $(x^2+xy+y) \subseteq \sqrt{I} = I(V(I))$. Zřejmě $I = (x^2+xy+y)^{666} \subseteq (x^2+xy+y)$, kde $(x^2+xy+y)$ je prvoideál, a proto $I(V(I)) = (x^2+xy+y)$ a tudíž souřadnicový okruh této variety je ve shodě s 3.1 tvaru $\Gamma(V(I)) = \mathbb{C}[x,y]/(x^2+xy+y)$.

(2) Nejprve si všimněme, že $I \subseteq (xz-y^2, z^3-x^5, y^3+x^4)$, proto

$$\sqrt{I} \subseteq \sqrt{(xz-y^2, z^3-x^5, y^3+x^4)},$$

a naopak, protože $(xz-y^2, z^3-x^5, y^3+x^4) \subseteq \sqrt{I}$, dostáváme obrácenou inkluzi

$$\sqrt{(xz-y^2, z^3-x^5, y^3+x^4)} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}.$$

I tentokrát použijeme Hilbertovy věty o nulách a dostaneme

$$I(V(I)) = \sqrt{I} = \sqrt{(xz-y^2, z^3-x^5, y^3+x^4)} = I(V((xz-y^2, z^3-x^5, y^3+x^4))).$$

V úlohách 2.6 a 3.7 jsme zjistili, že $V((xz-y^2, z^3-x^5, y^3+x^4)) = \{(t^3, -t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{C}\}$ je varieta, proto je $V(I) = \{(t^3, -t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{C}\}$ tatáž varieta s týmž souřadnicovým okruhem

$$\mathbb{C}[x,y,z]/I(\{(t^3, -t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{C}\}) \cong \{\sum_i h_i t^i \in \mathbb{C}[t] \mid h_1 = h_2 = 0\} \subseteq \mathbb{C}[t],$$

kde v izomorfním popisu souřadnicového okruhu využíváme 3.10. □

**3.14.** Nechť $I = (x^2 - y^3, y^2 - z^3) \subseteq \mathbb{C}[x,y,z]$, položme $A = V(I)$ a definujme polynomiální zobrazení $f : A^1(\mathbb{C}) \to A^3(\mathbb{C})$ předpisem $f(t) = (t^9, t^6, t^4)$. Dokažte, že

(1) $\mathrm{Ker} f^* = I$ a $I(A) = I$,
(2) $A$ je varieta a najděte souřadnicový okruh jako podokruh okruhu $\mathbb{C}[t]$,
(3) variety $A$ a $A^1(\mathbb{C})$ nejsou izomorfní.

(1) Nejprve ukážeme, že každá ekvivalenční třída okruhu $\mathbb{C}[x,y,z]/I$ je právě tvaru $ax + by + cxy + d + I$ pro polynomy $a, b, c, d \in \mathbb{C}[z]$, k čemuž postačí, abychom obdobně jako v 3.12(1) postupně dělili se zbytkem polynomy $x^2 - y^3$ a $y^2 - z^3$. Tedy pro $p + I \in \mathbb{C}[x,y,z]/I$ nejprve najdeme $q \in \mathbb{C}[x,y,z]$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[y,z]$, aby $p = q(x^2 - y^3) + \alpha x + \beta$ a dále $r, s \in \mathbb{C}[y,z]$ a $a, b, c, d \in \mathbb{C}[z]$, aby $\alpha = r(y^2 - z^3) + cy + a$ a $\beta = s(y^2 - z^3) + by + d$. Nyní

$$\begin{aligned} p = q(x^2 - y^3) + \alpha x + \beta \quad &= q(x^2 - y^3) + (r(y^2 - z^3) + cy + a)x + s(y^2 - z^3) + by + d \\ &= ax + by + cxy + d + q(x^2 - y^3) + (rx + s)(y^2 - z^3). \end{aligned}$$

Dále si všimneme, že zřejmě $I \subseteq \mathrm{Ker} f^*$, tedy zbývá nahlédnout, že $f^*(ax+by+cxy+d) = 0$ pro každé $a, b, c, d \in \mathbb{C}[z]$. K tomu stačí porovnat nenulové koeficienty u polynomů okruhu $\mathbb{C}[t]$ polynomu $f^*(ax + by + cxy + d) = a(t^4)t^9 + b(t^4)t^6 + c(t^4)t^{15} + d(t^4) = 0$, vidíme totiž, že:

- polynom $a(t^4)t^9$ může mít nenulové koeficienty jen u monomů $t^{4s+1}$,
- polynom $b(t^4)t^6$ může mít nenulové koeficienty jen u monomů $t^{4s+2}$,
- polynom $c(t^4)t^{15}$ může mít nenulové koeficienty jen u monomů $t^{4s+3}$,
- polynom $d(t^4)$ může mít nenulové koeficienty jen u monomů $t^{4s}$.

Tím jsme dokázali, že $\mathrm{Ker} f^* = I$. Protože je $\mathbb{C}[x,y,z]/I$ izomorfní podokruhu oboru $\mathbb{C}[t]$, je $I$ nutně prvoideál, a proto $IV(I) \subseteq I \subseteq IV(I)$, tedy $I(A) = IV(I) = I$.

(2) Okruhový homomorfismus $f^* : \mathbb{C}[x,y,z] \to \mathbb{C}[t]$ podle (1) indukuje prostý homomorfismus

$$\varphi = \pi_{I(A)} f^* : \Gamma(A) = \mathbb{C}[x,y,z]/I(A) = \mathbb{C}[x,y,z]/I \to \mathbb{C}[t],$$

proto $\mathrm{im}\varphi \cong \Gamma(A)$.

(3) Kdyby variety $A$ a $A^1(\mathbb{C})$ byly izomorfní, musel by existovat okruhový izomorfismus mezi okruhy $\Gamma(A)$ a $\Gamma(A^1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}[z]$. To by znamenalo, že by okruh $\Gamma(A) \cong \{p(t^4, t^6, t^9) |\ p \in \mathbb{C}[x,y,z]\}$ musel být jednogenerovanou algebrou nad tělesem $\mathbb{C}$. To je ovšem snadné vyvrátit obdobnou argumentací jako v úloze 3.11. □

## 4. Projektivní variety

Označme $U_i = \{[a_1 : a_2 : a_3] |\ a_i = 1\}$ a připomeňme, že zobrazení $\varphi_i : A^2(t) \to U_i$ dané vztahem $\varphi_1(a,b) = [1 : a : b]$, $\varphi_2(a,b) = [a : 1 : b]$, $\varphi_3(a,b) = [a : b : 1]$ je bijekce a $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \bigcup_i U_i$.

**4.1.** Popište pro každé $i, j \in \{1, 2.3\}, i \neq j$ podmnožiny $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus (U_i \cup U_j)$ projektivního prostoru $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Uvažujme v projektivním prostoru $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ projektivní bod $P = [a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus (U_i \cup U_j)$. Potom jsou jeho $i$-tá i $j$-tá homogenní souřadnice nulové. Tedy $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus (U_1 \cup U_2)$ obsahuje právě bod $[0 : 0 : 1]$, tedy osu z, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus (U_1 \cup U_3)$ obsahuje právě bod $[0 : 1 : 0]$, tedy osu y a $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus (U_2 \cup U_3)$ obsahuje právě bod $[1 : 0 : 0]$ tedy osu x. □

**4.2.** Uvažujme ideály $I_1 = (x - y + 1)$ a $I_2 = (x - y - 1)$ okruhu $\mathbb{C}[x,y]$.

(1) Popište homogenní ideály $I_1^*$, $I_2^*$ okruhu $\mathbb{C}[X,Y,Z]$.
(2) Určete projektivní uzávěry $V_p(I_1^*)$, $V_p(I_2^*)$ afiních variet $V(I_1)$, $V(I_2)$.
(3) Pro $i=1,2$ spočítejte $V_p(I_i^*)\cap U_3$, $V_p(I_i^*)\cap H_\infty$ a najděte $V_p(I_1^*)\cap V_p(I_2^*)$.

(1) Všimněme si, že $(x-y+1)^* = X-Y+Z$ (závorka, zde neznamená ideál), proto $(X-Y+Z)\subseteq I_1^*$. Naopak, protože je libovolný prvek ideálu $I_1$ tvaru $(x-y+1)a$ pro nějaký polynom $a\in\mathbb{C}[x,y]$ a víme, že platí $((x-y+1)a)^* = (x-y+1)^*a^* = (X-Y+Z)a^*\in(X-Y+Z)$, dostáváme rovnost ideálů $I_1^* = (X-Y+Z)$. Stejnou úvahou zjistíme $I_2^* = (X-Y-Z)$

(2) Přímo z definice vidíme, že projektivní uzávěry tvoří projektivní přímky

$$V_p(I_1^*) = \{[a_1:a_2:a_3] : a_1-a_2+a_3=0\},\quad V_p(I_2^*) = \{[a_1:a_2:a_3] : a_1-a_2-a_3=0\}.$$

(3) Ztotožníme-li afinní prostor $A^2(\mathbb{C})$ s množinou $U_3 = \{[a_1:a_2:1] | (a_1,a_2)\in A^2(\mathbb{C})\}$, pak $V_p(I_1^*)\cap U_3 = V(I_1) = V(x-y+1) = \{(t,t+1) | t\in\mathbb{C}\}$ a podbně $V_p(I_2^*)\cap U_3 = V(I_2) = \{(t,t-1) | t\in\mathbb{C}\}$.

Protože $H_\infty = \{[a_1:a_2:0] | (a_1,a_2)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}\}$, stačí nám v obou případech položit $Z=0$ a dostáváme $V_p(I_1^*)\cap H_\infty = \{[1:1:0]\} = V_p(I_2^*)\cap H_\infty$, odkud okamžitě vidíme, že $V_p(I_1^*)\cap V_p(I_2^*) = \{[1:1:0]\}$. $\square$

*12.5.*

**4.3.** Rozhodněte, zda je projektivní množina $A_p = V_p(XY^4+YZ^4+XZ^4)$ ireducibilní v prostoru $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ a určete průniky $A_p\cap H_\infty$ a $A_p\cap U_Z$, kde $U_Z = \{[a:b:1] | (a,b)\in A^2(\mathbb{C})\}$.

Díky tvrzení z přednášky stačí, abychom našli algebraickou množinu $A$ v afinnním prostoru $A^2(\mathbb{C})$, pro níž platí, že $A^* = A_p$. To znamená, že hledáme ideál $J$ okruhu $\mathbb{C}[x,y]$, pro který platí $J^* = (XY^4+YZ^4+XZ^4)$. Uvážíme-li, že pro polynomy máme

$$XY^4+YZ^4+XZ^4 = [[XY^4+YZ^4+XZ^4]_*]^* = [xy^4+y+z]^*,$$

a položíme-li $J = (xy^4+y+z)$, okamžitě vidíme, že $(XY^4+YZ^4+XZ^4)\subseteq J^*$. Naopak, protože

$$[[xy^4+y+z]g]^* = [xy^4+y+z]^*g^* = [XY^4+YZ^4+XZ^4]g^*\in(XY^4+YZ^4+XZ^4),$$

dostáváme opačnou inkluzi $J^*\subseteq(XY^4+YZ^4+XZ^4)$. Tím jsme ověřili, že

$$A^* = V_p((xy^4+y+z)^*) = V_p(XY^4+YZ^4+XZ^4) = A_p$$

a zbývá najít ireducibilní rozklad afinní algebraické množiny $A$.

Obvyklým způsobem zjistíme, že polynom $xy^4+y+z$ je ireducibilní, tedy $(xy^4+y+z)$ je prvoideál a poté pomocí Hilbertovy věty o nulách nahlédneme, že

$$IV(xy^4+y+z) = \sqrt{(xy^4+y+z)} = (xy^4+y+z),$$

a tudíž je $A = V(xy^4+y+z)$ afinní varietou. To ovšem znamená, že je $A_p = A^*$ projektivní varieta.

Úlohu nalezení $A_p\cap H_\infty$ vyřešíme stejně jako v předchozím příkladu, stačí najít komplexní trojice $(X,Y,Z)$ pro $Z=0$ splňující $0 = XY^4+YZ^4+XZ^4 = XY^4$. Vidíme, že je rovnost splněna právě pro $Y=0$ nebo $X=0$, tedy

$$A_p\cap H_\infty = \{[1:0:0],[0:1:0]\}.$$

Ztotožníme-li obvyklým způsobem množinu $U_Z$ a afinní prostor $A^2(\mathbb{C})$, potom víme, že $A_p\cap U_Z = V(xy^4+y+z) = A$. $\square$

**4.4.** Spočítejte ireducibilní rozklad projektivního uzávěru $A_p$ afinní algebraické množiny $V(x^3 + y^2 - x^2y - xy)$ v prostoru $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ a určete průnik $A_p \cap H_\infty$.

Využijeme výsledku úlohy 2.8(2), kde jsme zjistili, že $x^3+y^2-x^2y-xy = (x-y)(x^2-y)$ a proto $V(x^3 + y^2 - x^2y - xy) = V(x - y) \cup V(x^2 - y) = \{(t,t)|\ t \in \mathbb{C}\} \cup \{(t,t^2)|\ t \in \mathbb{C}\}$ je rozklad na variety. Tvrzení z přednášky nám umožňuje rozložit

$$A_p = V((x-y)^*) \cup V((x^2-y)^*) = V_p(X-Y) \cup V_p(X^2 - YZ),$$

protože stejně jako v předchozí úloze dostaneme, že

$$(X-Y) = ((x-y)^*) \quad \text{a} \quad (X^2 - YZ) = ((x^2-y)^*).$$

Snadno navíc přímo spočítáme, že

$$V_p(X-Y) = \{[t:t:1]|\ t \in \mathbb{C}\} \cup \{[1:1:0]\},$$

$$V_p(X^2 - YZ) = \{[t:t^2:1]|\ t \in \mathbb{C}\} \cup \{[0:1:0]\}.$$

Tím jsme také zjistili, že $A_p \cap H_\infty = \{[1:1,0],[0:1:0]\}$. □

**4.5.** Uvažujme polynomy $f, g \in \mathbb{C}[x,y,z]$, $f = x^2 - y$, $g = x^3 - z$. Připomeňme, že jsme v 2.1 ukázali, že $I(V(f,g)) = (f,g)$. Ověřte, že

(1) $ZU - XY \in I(V^*) \subseteq \mathbb{C}[X,Y,Z,U]$,
(2) $ZU - XY \notin (f^*, g^*) \subseteq \mathbb{C}[X,Y,Z,U]$.

(1) Zřejmě $(xf - g)^* = (z - xy)^* = ZU - XY$.
(2) Stačí prozkoumat obraz ideálu $K = (f^*, g^*) = (X^2 - YU, X^3 - ZU^2)$ ve faktorovém okruhu $\mathbb{C}[X,Y,Y,U]/L$, kde $L = (X^iY^jZ^kU^l|\ i+j+k+l = 3)$. Potom $K + L/L = (X^2 - YU) + L/L$ má strukturu jednodimenzionálního vektorového prostoru nad tělesem $\mathbb{C}$ a zřejmě $ZU - XY + L \notin (X^2 - YU) + L/L$, proto $ZU - XY \notin K$. □

*19.5.*

**4.6.** Popište všechny projektivní přímky, které leží v $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ resp. $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ a procházejí bodem $[0:1:0]$.

Úlohu můžeme řešit nad obecným podtělesem $T$ algebraicky uzavřeného tělesa $\mathbb{C}$. Nejprve si všimněme, že přímka $H_\infty$ samozřejmě danou podmínku splňuje. Tudíž ostatní přímky musí obsahovat nějaký bod, který neleží v nekonečnu (tj., který je mimo $H_\infty$), a proto musí mít průnik $H_\infty$ a přímky obsahující $[0:1:0]$ právě jen bod $[0:1:0]$, tj. všechny ostatní body těchto projektivních přímek leží na původní afiní přímce.

Tím máme fakticky určenu normálový vektor zbývajících přímek v $\mathbb{A}^2(T)$, jíž je právě vektor tvaru $(a,0)$ pro $a \in T \setminus \{0\}$. Analyticky lze úvahu popsat tak, že nás zajímají právě geometrické body splňující rovnici $aX + bY + cZ = 0$, pro něž $b = 0$. Hledané přímky potom tvoří množiny tvaru

$$A_\lambda = \{[\lambda, t, 1]|\ t \in T\} \cup \{[0:1:0]\} \quad \text{pro libovolné } \ \lambda = -\frac{c}{a} \in T.$$

Poznamenejme, že $A_\lambda = V(aX + cZ)$ je právě projektivní uzávěr přímky $V(ax + c) = V(\lambda x - 1)$ v afinním prostoru $\mathbb{A}^2(T)$. □

**4.7.** Najděte v prostoru $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ resp. $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ projektivní uzávěr $A_p$ afinní algebraické křivky $V(y^2 - x(x-1)(x-\lambda))$ a určete průnik $A_p \cap H_\infty$. Jedná se o projektivní varietu?

Pro nalezení projektivního uzávěru $A_p$ afinní algebraické křivky $V(y^2-x(x-1)(x-\lambda))$ nám stačí podobně jako v úlohách 4.3 a 4.4 spočítat

$$(y^2-x(x-1)(x-\lambda))^* = ([y^2-x(x-1)(x-\lambda)]^*) = (Y^2Z - X(X-Z)(X-\lambda Z)),$$

proto $A_p = V_p(Y^2Z - X(X-Z)(X-\lambda Z))$. Pouhým dosazením $Z=0$ zjistíme, že $A_p \cap H_\infty = \{[0:1:0]\}$.

V úloze 2.8(c) jsme zjistili, že je afinní algebraická křivka $V(y^2-x(x-1)(x-\lambda)) =$ ireducibilní, a proto je ireducibilní i projektivní křivka $A_p$. $\square$

**4.8.** Jestliže $[a:b:1] \in A_p = V_p(Y^2Z - X(X-Z)(X-\lambda Z))$ z předchozí úlohy, popište všechny průsečíky $A_p$ s projektivními přímkami určenými body $[0:1:0]$ a $[a:b:1]$.

Předně si uvědomme, že hledané projektivní přímky jsme popsali v úloze 4.6 podle níž se jedná právě o projektivní variety $P = \{[a,t,1] |\ t \in T\} \cup \{[0:1:0]\}$. Přitom snadno nahlédneme, že z předpokladu $b^2 - a(a-1)(a-\lambda) = 0$ samozřejmě plyne, že $(-b)^2 - a(a-1)(a-\lambda) = 0$. Tedy platí-li, že $[a:b:1] \in A_p \cap P$, pak dostáváme, že také $[a:-b:1] \in A_p \cap P$. Jestliže navíc $b \neq 0$, tvoří

$$\{[0:1:0], [a:b:1], [a:-b:1]\}$$

díky Bezoutově větě množinu právě všech průsečíků $A_p \cap P$. Pro $b=0$ snadno ověříme, že projelktivní přímka $P = \{[0,t,1] |\ t \in T\} \cup \{[0:1:0]\}$ tvoří v bodě $\{[0:0:1]\}$ tečnu křivky $A_p$ a tudíž je množina průsečíků v tomto případě pouze dvoubodová. $\square$