Domácí úlohy z Algebraických křivek

Z každé série je třeba získat aspoň 5 bodů.

1. série (doporučený termín odevzdání konec března):

1. Dokažte elementárními prostředky (bez použití faktorizace), že ideál
$$(x^{n-1}, x^{n-2}y, x^{n-3}y^2, \dots, xy^{n-2}, y^{n-1})$$
okruhu $\mathbb{R}[x,y]$ je generován nejméně n generátory.

3 body

2. Je-li $\mathbb{F}_q$ konečné těleso řádu $q \in \mathbb{N}$, dokažte, že $I(A^n(\mathbb{F}_q)) = (x_1^q - x_1, \dots x_n^q - x_n)$ (je možné bez důkazu využít vše, co se ukázalo na cvičení).

2 body

3. Popište nějaký automorfismus $\varphi : \mathbb{R}[x,y,z] \to \mathbb{R}[x,y,z]$, aby $\varphi((x-y-1, x+z-2)) = (x,y)$. (Ukažte, jak vypadá na všech prvcích okruhu a ověřte, že jde o automorfismus splňující uvedenou podmínku).

3 body

4. Dokažte, že množina $\{(t, \cos(t), \sin(t)) |\ t \in \mathbb{R}\}$ není algebraická v afinním prostoru $A^3(\mathbb{R})$.

4 body

2. série (doporučený termín odevzdání během dubna):

5. Rozložte množinu $V(x^2 - y^4, x^3 - xy^2 + x^2y^2 - y^4)$ v afinním prostoru $A^2(\mathbb{C})$ na variety.

4 body

6. Nechť $p, q \in T[x,y]$. Dokažte, že $V(p,q)$ je konečná množina, právě když je $V(NSD(p,q))$ konečná.

3 body

7. Rozložte množinu $V((x^2 + xy - y + 1)(x^2 + xy - y^2))$ v afinním prostoru $A^2(\mathbb{R})$ na variety.

5 bodů

3. série (doporučený termín odevzdání během května):

8. Ukažte, že je $V(x^2 - y^3)$ varieta v afinním prostoru $A^2(\mathbb{C})$ a najděte bijektivní polynomiální zobrazení variety $A^1(\mathbb{C})$ na $V(x^2 - y^3)$ a prostý homomorfismus souřadnicového okruhu variety $V(x^2 - y^3)$ do polynomiálního oboru $\mathbb{C}[t]$. Jsou tato zobrazení izomorfismy? (Vše nezapomeňte dokázat.)

4 body

9. Je-li $J = ((x - y^2)^3, (z - y^3)^4) \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$, rozhodněte, zda je $V(J)$ varieta v afinním prostoru $A^3(\mathbb{C})$ a najděte množinu prvoideálů $\mathcal{P}$, aby $IV(J) = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} P$.

3 body

10. Nechť $J = (X^2 + XY + YZ) \subseteq \mathbb{C}[X, Y, Z]$ a $I = (x^2 + xy + y) \subseteq \mathbb{C}[x, y]$. Dokažte, že $J = I^*$, rozhodněte, zda je $V_p(J)$ projektivní varietou v projektivním prostoru $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ a popište $V_p(J) \cap U_3$ a $V_p(J) \cap H_\infty$.

5 bodů