PÍSEMKY Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

Úloha 1. [26.2] Uvažujme endomorfismus φ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^2$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ splňující podmínku $\varphi((3,2)^T) = (0,2)^T$ a $\varphi((6,1)^T) = (1,1)^T$. Dokažte, že je φ izomorfismus a spočítejte matici $[\varphi^{-1}]_{K_2}^{K_2}$.

[28.2]: Napište matici vzhledem ke kanonickým bázím ortogonální projekce reálného vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ se standardním skalárním součinem na rovinu $U = \langle(1,1,1)^T, (0,0,1)^T\rangle$.

Řešení.

[26.2]: Bezprostředně z definice endomorfismus φ dostaneme matici $[\varphi]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ pro bázi $B = ((3,2)^T, (6,1)^T)$. Protože je matice $[\varphi]_{K_2}^B$ regulární, je φ izomorfismus. Nyní můžeme zcela využít Tvrzení 7.15(3):

$$[\varphi^{-1}]_{K_2}^{K_2} = ([\varphi]_{K_2}^{K_2})^{-1} = ([\varphi]_{K_2}^B \cdot [\mathrm{Id}]_B^{K_2})^{-1} =$$

$$= [\mathrm{Id}]_{K_2}^B \cdot ([\varphi]_{K_2}^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že pro součin matice s maticí inverzní můžeme využít například řádkový algoritmus pro transponované matice:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

[28.2]: Snadno určíme ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, (0,0,1)^T$ roviny U a normovaný vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, který je na rovinu U kolmý. Vidíme, že posloupnost $B = (\frac{1}{\sqrt{2}}\langle(1,1,0)^T, (0,0,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T)$ je ortonormální báze $\mathbf{R}^3$, vůči níž má ortogonální projekce p matici $[p]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nyní obvyklým způsobem určíme

$$[p]_{K_3}^{K_3} = [\mathrm{Id}]_{K_3}^B [p]_B^B [\mathrm{Id}]_B^{K_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde jsme využili faktu, že je matice $[\mathrm{Id}]_{K_3}^B$ ortogonální a proto $[\mathrm{Id}]_B^{K_3} = ([\mathrm{Id}]_{K_3}^B)^{-1} = ([\mathrm{Id}]_{K_3}^B)^T$. □

Úloha 2. [5.3] Je-li ψ ortogonální projekce reálného vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ se standardním skalárním součinem na rovinu $U = \langle (1,1,0)^T, (1,0,1)^T \rangle$, spočítejte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory ψ, najděte ortonormální bázi B, aby $[\psi]_B^B$ byla diagonální a určete $[\psi]_B^B$.

[7.3]: Je-li φ lineární operátor na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2, spočítejte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory φ, najděte bázi B, aby $[\varphi]_B^B$ byla diagonální a určete $[\varphi]_B^B$

Řešení.

[5.3] Protože lineární operátor ψ není izomorfismus, je 0 jeho vlastní číslo a příslušné vlastní vektory tvoří právě jádro

$$\mathrm{Ker}\psi = \langle (1,1,0)^T, (1,0,1)^T \rangle^\perp = \langle (-1,1,1)^T \rangle.$$

Protože na rovině U působí ψ jako identita, jedná se o podprostor všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1.

Nyní zbývá ortogonalizovat například posloupnost $(1,1,0)^T, (1,0,1)^T$, tedy fakticky stačí najít generátor například podprostoru $\langle (1,1,0)^T, (-1,1,1)^T \rangle^\perp$, jímž je vektor $(1,-1,2)^T$. Nyní zbývá normalizovat, abychom dostali ortonormální bázi

$$B = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right) \quad \text{a matici} \quad [\psi]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[7.3] Protože je matice $[\varphi]_{K_2}^{K_2}$ dolní trojúhelníková, vidíme všechna vlastní čísla matice i endomorfismu na její diagonále, tedy φ má vlastní čísla $3, 4$. Pro každé vlastní číslo λ najdeme jemu příslušný podprostor vlastních vektorů $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id})$ jako řešení homogení soustavy rovnic s maticí $[\varphi]_{K_2}^{K_2} - \lambda \mathbf{I}_2$:

$$\mathrm{Ker}([\varphi]_{K_2}^{K_2} - 3\mathbf{I}_2) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathrm{Ker}([\varphi]_{K_2}^{K_2} - 4\mathbf{I}_2) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zjistili jsme, že $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle \setminus \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ tvoří množinu všech vlastních vektorů φ a pro bázi složenou z vlastních vektorů $B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$ máme $[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. □

Úloha 3. [12.3] Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je matice nad tělesem $\mathbf{Z}_5$. Najděte všechna její vlastní čísla a vlastní vektory, dokažte, že je diagonalizovatelná, a najděte regulární matici $\mathbf{P}$, aby $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ byla diagonální.

[14.3] Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ je matice nad tělesem $\mathbf{Z}_5$. Najděte všechna její vlastní čísla a vlastní vektory, dokažte, že je diagonalizovatelná, a najděte regulární matici $\mathbf{P}$, aby $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ byla diagonální.

Řešení.

[12.3] Nejprve spočítáme charakteristický polynom $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) =$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-3)((2-\lambda)-1) + (1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) =$$

$$= 3(\lambda - 1) + (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 3) = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda) = (1-\lambda)\lambda(1+\lambda).$$

Zjistili jsme, že $\mathbf{A}$ má právě tři vlastní čísla $0, 1, 4$, tedy je $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná. Nyní hledáme vlastní vektory jako jádra matic $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3$:

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

Hledanou matici $\mathbf{P}$ dostaneme jako matici přechodu od báze složené z vlastních vektorů ke kanonické bázi, tedy například $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[14.3] Nejprve spočítáme charakteristický polynom $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) =$

$$= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & 4 \\ 4 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)[(3-\lambda)(4-\lambda) - 3] - 2[3(4-\lambda) - 1] =$$

$$= -\lambda^3 + 2 + \lambda + 3 = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1).$$

Zjistili jsme, že $\mathbf{A}$ má právě tři vlastní čísla $0, 1, 4$, tedy je $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná a můžeme hledat vlastní vektory jako jádra matic $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3$:

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}_3) = \mathrm{Ker}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 1\mathbf{I}_3) = \mathrm{Ker}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3) = \mathrm{Ker}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

Hledanou matici $\mathbf{P}$ dostaneme jako matici přechodu od báze složené z vlastních vektorů ke kanonické bázi, tedy například $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Úloha 4. [19.3] Je-li φ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^3$ s maticí $[\varphi]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3, najděte všechny invariantní podporostory lineárních operátorů φ a φ^2.

[21.3] Buď φ lineární operátor na racionálním vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$ daný obrazy $\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Najděte všechny invariantní podporostory lineárních operátorů φ a φ^{100}.

Řešení.

[19.3] Nejprve poznamenejme, že $\{\mathbf{0}\}$ a $\mathbf{Z}_7^3$ jsou invariantní podprostory obou endomorfismů φ i φ^2. Zbývá najít všechny invariantní podprostory dimenze 1 a 2.

Snadno přímo z (trojúhelníkové) matice zjistíme, že φ má vlastní čísla $1, 2, 5$, tedy se jedná o diagonalizovatelný endomorfismus. Obvyklým způsobem spočítáme vlastní vektory:

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Tedy φ má právě 3 invariantní přímky a právě 3 invariantní roviny:

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,\ \ \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,\ \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Protože $2^2 = 5^2 = 4$ a $1^2 = 1$ má lineární operátor φ^2 pouze dvě vlastní čísla. Vlastní číslo 4 má ovšem geometrickou naásobnost 2, proto podprostor vlastních vektorů pro něj tvoří $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Proto má φ^2 invariantní přímky (je jich 9)

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{v} \rangle, \text{ kde } \quad \mathbf{v} \in \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

a invariantní roviny (opět je jich 9) φ^2 jsou:

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} \rangle, \text{ kde } \quad \mathbf{v} \in \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

[21.3] Nejprve poznamenejme, že $\{\mathbf{0}\}$ a $\mathbf{Z}_7^3$ jsou invariantní podprostory obou endomorfismů φ a φ^{100}. Zbývá najít všechny invariantní podprostory dimenze 1 a 2.

Nejprve si hned z definice φ všimněme, že báze $B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right)$ sestává z vlastních vektorů a $[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Proto $[\varphi^{100}]_B^B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{100}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Odtud vidíme, že $1, 2, -1$ jsou vlastní čísla endomorfismu φ a $1, 2^{100}$ jsou vlastní čísla endomorfismu φ^{100} Tedy φ má právě 3 invariantní přímky a právě 3 invariantní roviny:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle,\ \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle,\ \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle,\ \ \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle,\ \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle,\ \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Protože vlastní číslo 1 lineární operátor φ^{100} má geometrickou násobnost 2, je množina všech vlastních vektorů φ^{100} tvaru $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle \cup \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Tudíž má φ^{100} nekonečně invariantních přímek

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{v} \rangle, \text{ kde } \quad \mathbf{v} \in \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

a nekonečně invariantních rovin

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{a} \quad \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v} \right\rangle, \text{ kde } \quad \mathbf{v} \in \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

□

Úloha 5. [26.3] Najděte Jordanův kanonický tvar komplexní matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1&-2\\2&5\end{pmatrix}$, spočítejte regulární komplexní matici $\mathbf{P}$, aby $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ byla Jordanova a součin $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ určete.

[28.3] Najděte Jordanův kanonický tvar komplexní matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix}$, určete regulární komplexní matici $\mathbf{P}$, aby $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$ byla Jordanova a rozhodněte, zda jsou matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}^{-1}$ podobné.

Řešení.

[26.3] Nejprve spočítame charaktreristický polynom matice $\mathbf{A}$ a zjistíme, že $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = \lambda^2 - 6\lambda^2 + 9 = (\lambda - 3)^2$. Protože je navíc hodnost matice $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2$ rovna 1, má vlastní číslo 3 algebraickou násobnost 2 a geometrickou násobnost 1. To nutně znamená, že Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$ má na diagonále vlastní číslo 3 geometrické násobnosti 1, tedy Jordanův kanonický tvar představuje právě matice $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Nyní nejprve hledáme vlastní vektor matice $\mathbf{A}$, jímž je například $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, který řeší homogenní soustavu s maticí matice $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ a poté počítáme nehomogenní soustavu rovnic s maticí $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$, kterou řeší například vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Spočítali jsme Jordanův řetízek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, proto je hledaná matice například tvaru $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{K_2}^{(\mathbf{v}_i)} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Konečně ze způsobu, jak jsme matici $\mathbf{P}$ získali, okamžitě plyne rovnost $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

[28.3] Spočítame-li charaktreristický polynom $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_2) = \lambda^2 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda + 1)^2$ matice $\mathbf{B}$, vidíme, že -1 je jediné vlastní číslo $\mathbf{A}$ algebraické násobnosti 2. Protože matice $\mathbf{B}$ není diagonální, jedná se o vlastní číslo geometrické násobnosti 1, tudíž Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$ má na diagonále vlastní číslo -1 geometrické násobnosti 1, proto jím je právě matice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Nyní nejprve hledáme vlastní vektor matice $\mathbf{B}$, jímž je například $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, který řeší homogenní soustavu s maticí matice $\mathbf{B} + 1\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ a poté počítáme nehomogenní soustavu rovnic s maticí $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$, kterou řeší například vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Spočítali jsme Jordanův řetízek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, proto je hledaná matice například tvaru $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{K_2}^{(\mathbf{v}_i)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Protože má matice $\mathbf{B}^{-1}$ opět jediné vlastní číslo $(-1)^{-1} = -1$ algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 1, vidíme, že má matice $\mathbf{B}^{-1}$ stejný Jordanův kanonický tvar jako matice $\mathbf{B}$, a proto jsou obě matice podobné. $\square$

Úloha 6. [2.4] Buď $M = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ báze vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ a φ endomorfismus V daný vztahy $\varphi(\mathbf{v}_1) = 2\,\mathbf{v}_1$, $\varphi(\mathbf{v}_2) = 6\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2$, $\varphi(\mathbf{v}_3) = 2\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_3$ a $\varphi(\mathbf{v}_4) = 5\,\mathbf{v}_2 + 6\,\mathbf{v}_3 + 2\,\mathbf{v}_4$. Najděte Jordanovu matici $\mathbf{J}$, pro kterou existuje báze N splňující rovnost $\mathbf{J} = [\varphi]_N^N$.

[4.4] Rozhodněte, zda jsou matice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ podobné nad tělesem reálných čísel.

Řešení. [2.4] Nejprve určíme matici $[\varphi]_M^M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Nyní vidíme, že má matice $[\varphi]_M^M$ jediné vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 4 a snadno spočítáme,

$$\operatorname{rank}([\varphi]_M^M - 2\mathbf{I}_4) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

proto je geometrická násobnost vlastní číslo rovna 2. To znamená, že má matice $[\varphi]_M^M$ jeden z následujících Jordanových kanonických tvarů:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ nebo } \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Protože $(\mathbf{J}_1 - 2\mathbf{I}_4)^2 \neq \mathbf{0}$, zatímco $(\mathbf{J}_2 - 2\mathbf{I}_4)^2 = \mathbf{0}$, potřebujeme rozhodnot, zda $([\varphi]_M^M - 2\mathbf{I}_4)^2$ je či není nulová matice. Spočítáme

$$([\varphi]_M^M - 2\mathbf{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

proto má matice $[\varphi]_M^M$ Jordanůn kanonický tvar $\mathbf{J}_2$, tedy existuje báze N, pro kterou $[\varphi]_N^N = \mathbf{J}_2$.

[4.4] Okamžitě ze zadání vidíme, že má matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ jediné vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 4 a snadno spočítáme, že je jeho geometrická násobnost 2. Navíc protože $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_4)^2 = \mathbf{0}$, vidíme, že má matice $\mathbf{A}$ Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pro matici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nyní stačí jen ověřit, zda $\operatorname{rank}(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}_4) = 2$ a zda $(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}_4)^2 = \mathbf{0}$. Kdyby tomu tak nebylo, neměly by matice stejný Jordanův kanonický tvar, a proto by nemohly být podobné. Naopak, v případě, že by druhá podmínka byla splněna, musela by mít jediné vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 4, z první podmínky by plynulo, že je jeho geometrická násobnost rovna dvěma a konečně znovu druhá podmínka by řekla, že je $\mathbf{B}$ Jordanův kanonický tvar roven rovněž $\mathbf{J}_A$. Tedy počítáme:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že jsou matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ podobné. □

Úloha 7. [9.4] Ukažte, že je matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ unitárně diagonalizovatelná, najděte reálnou ortogonální matici $\mathbf{U}$, pro níž je $\mathbf{U}^T\mathbf{AU}$ diagonální a součin $\mathbf{U}^T\mathbf{AU}$ určete.

[11.4.] Uvažujme endomorfismus $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$ na reálného vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Najděte ortonormální bázi B, aby byla matice $[\varphi]_B^B$ diagonální a tuto matici najděte.

Řešení. [9.4] Matice $\mathbf{A}$ je zjevně symetrická, proto normální a tedy unitárně diagonalizovatelná. Matice je navíc singulární, proto je 0 její vlastní číslo, tedy vektor $(1,1,1)^T$ je kolmý na dvoudimenzionální podprostor vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 0, tedy se jedná o vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $(7,7,7)\cdot(1,1,1)^T = 21$. Snadno také najdeme kolmé vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 0 nejprve najdeme jeden nenulový vektor kolmý na vektor $(1,1,1)^T$, tedy jedno netriviální řešení homogení soustavy s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, jímž je například vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a poté hledáme nenulový vektor kolmý na nalezené dva vlastní vektory, tedy jedno netriviální řešení homogení soustavy s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, jímž je například vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Nyní zbývá nalezené ortogonální vlastní vektory normovat a sestavit do sloupců matice $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Zbývá určit dagonální matici s vlastními čísly na diagonále

$$\mathbf{U}^T\mathbf{AU} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[11.4] Nejprve určíme matici $[\varphi]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, pro níž snadno najdeme vlastní čísla 0 a -3. Nejprve najdeme normovaný vlastní vektor $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ příslušný vlastnímu číslu 0. Podprostor vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu -3, tedy prostor $\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je zřejmě dvoudimenzionální, budeme tedy hledat dva kolmé normované vlastní vektory. Nejprve snadno najdeme jeden, například vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ a poté druhý, například $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ jako řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$. Našli jsme ortonormální bázi

$$B=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right),$$

pro niž $[\varphi]_B^B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ □

Úloha 8. [16.4.] Najděte nad tělesem reálných čísel horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{T}$ a ortogonální matici $\mathbf{U}$, aby $\begin{pmatrix}1&-3\\3&7\end{pmatrix}=\mathbf{UTU}^T$.

[18.4.] Najděte nad tělesem reálných čísel horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{T}=(t_{ij})$ a ortogonální matici $\mathbf{U}$, aby $\begin{pmatrix}4&1\\6&5\end{pmatrix}=\mathbf{UTU}^T$ a $t_{11}\geq t_{22}$.

[16.4.] Nejprve určíme charakteristický polynom $(\lambda-4)^2$ matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-3\\3&7\end{pmatrix}$. Dále pro jediné vlastní číslo 4 najdeme normovaný vlastní vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ a snadno ho doplníme vektorem $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ na ortonormální bázi $\mathbf{R}^2$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu. Vezmeme-li nyní matici přechodu od této ortonormální báze k bázi kanonické $\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ zbývá dopočítat hodnotu v prvním řádku a druhém sloupci matice $\mathbf{T}$, tedy $-6=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})\mathbf{A}(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. Spočítali jsme, že

$$\mathbf{T}=\mathbf{U}^T\mathbf{AU}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-3\\3&7\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6\\0&4\end{pmatrix}.$$

Nyní už vidíme, že $\mathbf{A}=\mathbf{UU}^T\mathbf{AUU}^T=\mathbf{UTU}^T$.

[18.4.] Nejprve spočítáme charakteristický polynom $\lambda^2-9\lambda+14=(\lambda-2)(\lambda-7)$ matice $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4&1\\6&5\end{pmatrix}$. Máme tedy vlastní čísla $7\geq 2$. Pro větší z nich najdeme normovaný vlastní vektor $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ a snadno ho doplníme vektorem $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ na ortonormální bázi $\mathbf{R}^2$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu. Nyní vezmeme matici přechodu od této ortonormální báze k bázi kanonické $\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}$ a zbývá dopočítat hodnotu v prvním řádku a druhém sloupci matice $\mathbf{T}$, tedy číslo $(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}})\mathbf{B}(\frac{-3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}})^T=-5$. Víme, že na diagonále horní trojúhelníkovou matice máme vlastní čísla, proto

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 1\\ 6 & 5\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -5\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Tím jsme ukázali, že $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^T$. □

Úloha 9. [23.4.] Buď f bilineární forma

$$f((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) = x_1y_2 + 3x_1y_3 + 6x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_3$$

na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^3$. Určete matice f, f_s a f_a vzhledem ke kanonické bázi a k bázi $B = (\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix})$, kde f_s je symetrická a f_a antisymetrická bilineární forma, pro něž $f = f_s + f_a$.

[25.4.] Buď $B = (\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix})$ báze a g bilineární forma

$$g((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) = x_1y_2 + 3x_1y_3 + 6x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + 3x_3y_3$$

na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^3$. Určete matice f, f_s a f_a vzhledem k bázi B, kde f_s je symetrická a f_a antisymetrická bilineární forma, pro něž $f = f_s + f_a$. Spočítejte radikál f_s.

[23.4.] Nejprve seřadíme koeficenty polynomu určujícího analytické vyjádření bilineární formy do matice vzhledem ke kanonické bázi $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 6 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Dále snadno určíme matici přechodu $[\mathrm{Id}]^B_{K_3} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}$ a poté spočítáme matici f vzhledem k bázi B díky vztahu: $[f]_B = ([\mathrm{Id}]^B_{K_3})^T \cdot [f]_{K_3} \cdot [\mathrm{Id}]^B_{K_3} =$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 6 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 4 & 4\\ 4 & 6 & 5\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Nyní určíme matice symetrické a antisymetrické části:

$$[f_s]_{K_3} = \frac{1}{2}([f]_{K_3} + [f]^T_{K_3}) = 4(\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 6 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 6 & 0\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0 & 4 & 6\\ 4 & 6 & 1\\ 6 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

$$[f_a]_{K_3} = [f]_{K_3} - [f_s]_{K_3} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 6 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 4 & 6\\ 4 & 6 & 1\\ 6 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 4 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 3 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

$$[f_s]_B = \frac{1}{2}([f]_{K_3} + [f]^T_{K_3}) = 4(\begin{pmatrix}4 & 4 & 4\\ 4 & 6 & 5\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 4 & 3\\ 4 & 6 & 0\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}4 & 4 & 0\\ 4 & 6 & 6\\ 0 & 6 & 3\end{pmatrix},$$

$$[f_a]_B = [f]_B - [f_s]_B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[25.4.] Nejprve seřadíme koeficenty polynomu určujícího analytické vyjádření bilineární formy do matice vzhledem ke kanonické bázi $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, dále obvyklým způsobem Dále snadno určíme matici přechodu $[\mathrm{Id}]^B_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ a poté určíme matici g vzhledem k bázi B díky vztahu: $[g]_B = ([\mathrm{Id}]^B_{K_3})^T \cdot [f]_{K_3} \cdot [\mathrm{Id}]^B_{K_3} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme matice symetrické a antisymetrické části:

$$[g_s]_B = \frac{1}{2}([f]_{K_3} + [f]^T_{K_3}) = 4(\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$[g_a]_B = [f]_B - [f_s]_B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Konečně protože

$$[g_s]_B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

je $\mathrm{rad}(g_s) = \{(0,0,0)^T\}$. □

Úloha 10. [30.4.] Mějme kvadratickou formu f_2 na $\mathbf{Z}_5^3$ danou analytickým vyjádřením $f_2((x_1,x_2,x_3)^T) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 + 2x_3^2$ vzhledem ke kanonické bázi. Najděte matici symetrické bilineární formy f, která vytváří f_2, spočítejte bázi radikálu f, najděte nějakou ortogonální bázi B formy f a určete $[f]_B$.

[2.5.] Mějme kvadratickou formu g_2 na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ danou analytickým vyjádřením $g_2((x_1,x_2,x_3)^T) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ vzhledem ke kanonické bázi. Najděte nějakou ortogonální bázi B symetrické bilineární formy g, která vytváří g_2, určete signaturu g a rozhodněte, zda existuje vektor $\mathbf{v}$, aby $g_2(\mathbf{v}) < 0$.

[30.4.] Zcela přímočaře (tj. „rozpůlením"koeficientů u členů x_iy_j pro $i \neq j$) spočítáme matici hledané symetrické bilineární formy f vzhledem ke kanonické bázi $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Protože $\mathrm{rad}(f) = \mathrm{Ker}[f]_{K_3}$, hledáme bázi řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[f]_{K_3}$: Snadno zjistíme

$$[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

proto bázi radikálu tvoří například vektor $\mathbf{b}_1 = (2,4,1)^T$. K radikálu, tedy podprostoru $\langle \mathbf{b}_1 \rangle$ snadno najdeme doplněk, například podpropstor $U = \langle \mathbf{e}_1, e_2 \rangle$ generovaný prvními dvěma vektory kanonické báze, na němž už je bilineární forma regulární, vidíme, že matice $[f]_M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ pro bázi $M = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ podprostoru U.

Nyní můžeme zvolit vektor $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1$, protože $f_2(\mathbf{e}_1) = 1$ a hledáme vektor $\mathbf{b}_3 \in \langle \mathbf{b}_2 \rangle^{\perp_f} \cap U$, tedy řešíme rovnici s maticí $[\mathbf{b}_2]_M^T [f]_M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$. Snadno spočítáme souřadnicivý vektor $[\mathbf{b}_3]_M = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, proto $\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (2,1,0)^T$. Našli jsme ortogonální bázi

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \text{ pro níž } [f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

protože $f_2(\mathbf{b}_3) = 1$.

[2.5.] Přímočaře určíme matici hledané symetrické bilineární formy g vzhledem ke kanonické bázi $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nejprve spočítáme $\mathrm{rad}(g) = \mathrm{Ker}[g]_{K_3}$, tedy vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí Snadno zjistíme

$$[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

proto bázi radikálu tvoří například vektor $\mathbf{b}_1 = (-1,1,1)^T$. K radikálu, tedy podprostoru $\langle \mathbf{b}_1 \rangle$ snadno najdeme doplněk, například podprostor $U = \langle \mathbf{e}_2, e_3 \rangle$ generovaný posledními dvěma vektory kanonické báze $M = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, na němž už je bilineární forma g regulární, vidíme, že matice $[g]_M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nyní můžeme zvolit vektor $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2$, protože $f_2(\mathbf{e}_2) = 2$ a hledáme vektor $\mathbf{b}_3 \in \langle \mathbf{b}_2 \rangle^{\perp_g} \cap U$. Vyřešíme-li rovnici s maticí $[\mathbf{b}_2]_M^T [g]_M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$. Snadno spočítáme souřadnicivý vektor $[\mathbf{b}_3]_M = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, proto $\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 = (0,-1,2)^T$. Našli jsme ortogonální bázi $B = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. Protože $g_2(\mathbf{b}_1) = 0$, $g_2(\mathbf{b}_2) = 2$ a $g_2(\mathbf{b}_3) = 1$, je (1,2,0) signatura formy g, a proto $\mathbf{v} \geq 0$ pro všechny vektory. Tudíž neexistuje žádný vektor $\mathbf{v}$, pro který $g_2(\mathbf{v}) < 0$. $\square$

Úloha 11. [7.5.] Najděte bázi B vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, která je ortogonální vzhledem k bilineární formě g na $\mathbf{R}^3$ s maticí $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a zároveň vzhledem ke standardnnímu skalárnímu součinu f, víte-li, že má matice $[g]_{K_3}$ vlastní číslo -1. Určete matice $[f]_B$ a $[g]_B$.

[9.5.] Najděte bázi C vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, která je ortogonální vzhledem k bilineární formě g na $\mathbf{R}^3$ s maticí $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a zároveň vzhledem ke standardnnímu skalárnímu součinu f. Určete matici $[g]_C$ a rozhodněte, zda se jedná o skalární součin.

[7.5.] Nejprve zjistíme, že $[g]_{K_3} - (-1)\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ má hodnost 1, a snadno spočítáme f-ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jádra $\operatorname{Ker}([g]_{K_3} + \mathbf{I}_3)$. Zbývající normalizovaný vlastní vektor je f-ortogonální na oba tyto vektory, tedy se jedná například o vektor $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Snadno spočítáme, že poslední vlastní vektor přísluší vlastnímu číslu 5. Proto pro hledanou bázi $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ máme matice $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $[g]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

[9.5.] Nejprve si všimněme, že má matice $[g]_{K_3}$ vlastní čísla 1 a 4. Spočítáme nejprve dva normalizované f-ortogonální vlastní vektory příslušné vlastnímu 1: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ a okamžitě vidíme, že zbývající normalizovaný f-ortogonální vektor je vektor $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Spočítali jsme tedy bázi

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ a matici } [g]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

odkud vidíme, že je g pozitivně definitní reálná symetrická bilineární forma, tedy skalární součin. □