Ukázka zápočtové písemky z komutativních okruhů:

(1) Je $151\mathbf{Z}$ prvoideál okruhu celých čísel $\mathbf{Z}$? Označme $R = \mathbf{Z}(\mathbf{Z} \setminus 5\mathbf{Z})^{-1}$ lokalizaci okruhu $\mathbf{Z}$ v prvoideálu $5\mathbf{Z}$ Rozhodněte, zda a) $1 \in 27R$, b) $100R = 60R$, c) $35R \subseteq 880R$

5 bodů

(2) Spočítejte generátor odmocniny ideálu $\sqrt{(x^2-1)(x+1)\mathbf{R}[x]}$ okruhu reálných polynomů $\mathbf{R}[x]$. Jedná se o prvoideál?

5 bodů

(3) Určete torzní část modulu $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ nad okruhem celých čísel $\mathbf{Z}$.

5 bodů

(4) Dokažte, že racionální čísla $\mathbf{Q}$ nejsou volným modulem nad okruhem celých čísel $\mathbf{Z}$.

5 bodů

(5) Napište modul $\mathbf{Z}_8 \times \mathbf{Z}_{12}$ nad okruhem celých čísel $\mathbf{Z}$ a) jako direktní sumu nerozložitelných modulů b) jako direktní sumu modulů $\mathbf{Z}/I_i$ pro ideály $I_i \supseteq I_{i+1}$.

5 bodů

(6) Spočítejte stupeň separability rozšíření $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}[\sqrt{7}]$ a rozhodněte, zda jde o Galoisovo rozšíření.

5 bodů

Na zápočtovou písemku bude k dispozici 40 minut a k úspěšnému napsání je třeba získat aspoň 15 bodů (z 30 možných). Počet pokusů není omezen, ovšem úspěšné zvládnutí zápočtové písemky je předpokladem připuštění ke zkoušce.

Další (pětibodové) příklady:

- Spočítejte generátor odmocniny ideálu $\sqrt{(x^4-4x^2+4)\mathbf{Q}[x]}$ okruhu racionálních polynomů $\mathbf{Q}[x]$. Jedná se o prvoideál?
- Najděte $x \in \mathbf{Z}_{360}$, aby $x \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 5)$, $x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 8)$ a $x \equiv 6 (\mathrm{mod}\ 9)$.
- Kolik ideálů a kolik prvodideálů má okruh (hlavních ideálů) $\mathbf{Z}_5^3$ se sčítáním a násobením po složkách.
- Jak vypadá torzní část modulu nad tělesem?
- Jak vypadá torzní část modulu R^2 nad oborem integrity R?
- Určete torzní část modulu $\prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbf{Z}_p$ nad okruhem celých čísel $\mathbf{Z}$, je-li $\mathbb{P}$ množina všech prvočísel.
- Spočítejte $(8\mathbf{Z} : 28\mathbf{Z})$ v okruhu celých čísel $\mathbf{Z}$.
- Napište modul $\mathbf{Z}_{50}$ nad okruhem celých čísel $\mathbf{Z}$ a) jako direktní sumu nerozložitelných modulů b) jako direktní sumu modulů $\mathbf{Z}/I_i$ pro ideály $I_i \supseteq I_{i+1}$.
- Dokažte, že podílové těleso okruhu polynomů $\mathbf{Z}_2[x]$ není perfektní.
- Je-li T rozkladové nadtěleso polynomu $x^7 - 1$ nad tělesem $\mathbf{Q}$, spočítejte Galoisovu grupu rozšíření $\mathbf{Q} \subseteq T$. Kolik má T podtěles?
- Spočítejte stupeň transcendence rozšíření $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}, \pi)$.
- Najděte aspoň tři transcendentní prvky (podílového) tělesa $\mathbf{C}(x)$ nad tělesem $\mathbf{R}$.
- Najděte maximální ideály $I_1, \dots, I_k$ okruhu $\mathbf{C}[x,y,z]$, aby

$$\{g(x,y,z) \in \mathbf{C}[x,y,z] |\ g(1,i,0) = g(1,0,1) = g(i,-i,1) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{k} I_i.$$