1. Algebraické prvky

Připomeňme, že algebraickým číslem rozumíme každé reálné číslo, které je kořenem nenulového celočíselného polynomu,

1.1. Ověřte, že jsou čísla $\sqrt{3}$ a $\sqrt[3]{2}$ algebraická.

Okamžitě vidíme, že $\sqrt{3}^2 = 3$ a $\sqrt[3]{2}^3 = 2$,a proto je $\sqrt{3}$ kořenem polynomu $x^2 - 3 \in \mathbf{Z}[x]$ a $\sqrt[3]{2}$ je kořenem polynomu $x^3 - 2 \in \mathbf{Z}[x]$. □

1.2. Existuje-li, najděte nenulový polynom ze $\mathbf{Z}[x]$, jehož je číslo $2+5\sqrt{3}$ kořenem.

Snadno nahlédneme, že obor intagrity $\mathbf{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}|\ a, b \in \mathbf{Q}\}$, tedy, že je $\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$ vektorový prostor nejvýše (a dokonce právě) 2 nad tělesem racionálních čísel. Dále víme, že každé tři prvky vektorového prostoru dimenze 2 musí být lineárně závislé, tedy existuje netriviální racionální lineární kombinavce $q_0 + q_1(2 + 5\sqrt{3}) + q_2(2 + 5\sqrt{3})^2 = q_1 + q_2(2 + 5\sqrt{3}) + q_2(79 + 20\sqrt{3}) = 0$. Vyjádřeno v souřadnicích vzhledem k bázi 1, $\sqrt{3}$ řešíme homogenní soustavu lineárních rovnic $q_0 + 2q_1 + 79q_2 = 0$, $5q_1 + 20q_2 = 0$ s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 79 \\ 0 & 5 & 20 \end{pmatrix}$. Tedy řešením je například vektor $(q_0, q_1, q_2) = (-71, -4, 1)$, což znamená, že je algebraický prvek $2 + 5\sqrt{3}$ kořenem polynomu $x^2-4x-71$. Poznamenejme, že kdyby nalezené netriviální řešení soustavy lineárních rovnic nebylo celočíselné, stačilo ho přenásobit nejmenším společným násobkem jmenovatelů, abychom dostali netriviální řešení. □

1.3. Ověřte, že je číslo $\frac{2-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ algebraické a najděte nenulový polynom ze $\mathbf{Z}[x]$, jehož je kořenem.

Budeme uvažovat o prvku $\frac{2-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ podobně jako v předchozí úloze. Nejprve uvážíme, že ho lze vyjádříme v bázi 1, $\sqrt{3}$ nad $\mathbf{Q}$, tedy $\frac{2-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{9-5\sqrt{3}}{6}$ a opět hledáme $q_i \in \mathbf{Q}$, aby $q_0 + q_1\frac{9-5\sqrt{3}}{6} + q_2(\frac{9-5\sqrt{3}}{6})^2 = 0$, tedy $36q_0 + q_1(54 - 30\sqrt{3}) + q_2(156 - 90\sqrt{3}) = 0$. Řešíme proto soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix} 36 & 54 & 156 \\ 0 & -30 & -90 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tedy snadno najdeme řešení $(q_0, q_1, q_2) = (-\frac{1}{6}, -3, 1)$, jemuž odpovídá racionální polynom $m_2 = x^2 - 3x - \frac{1}{6}$ s kořenem $\frac{2-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$. Nyní zbývá polynom přenásobit nejmenším společným násobkem jmenovatelů jednotlivých koeficientů a dostaneme celočíselný polynom $6x^2 - 18x - 1$.

□

1.4. Existuje-li, najděte nenulový polynom ze $\mathbf{Z}[x]$, jehož je číslo $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ kořenem.

Opět budeme pracovat s mocninami prvku $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, jejichž netriviální lineární kombinaci nad tělesem racionálních čísel potřebujeme najít, stačí přitom uvážit, že

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}, \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4 = (5 - 2\sqrt{6})^2 = 49 - 20\sqrt{6}$$

a hledat netriviální trojici $(a, b, c) \in \mathbf{Z}$, pro kterou $a+b(5-2\sqrt{6})+c(49-20\sqrt{6}) = 0$. Tedy řešíme soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 49 \\ 0 & -2 & -20 \end{pmatrix}.$$

Okamžitě vidíme, že soustavu řeší trojice $(a, b, c) = (1, -10, 1)$ a číslo $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ je kořenem polynomu $x^4 - 10x^2 + 1$. □

2. Dělitelnost v $\mathbf{Z}[x]$ a $\mathbf{Q}[x]$

2.1. Rozhodněte, zda $(x^3 + x + 2)/(x^{11} - 3x + 1)$ v oboru $\mathbf{Z}[x]$.

Předpokládejme, že existuje polynom $\sum_i a_i x^i \in \mathbf{Z}[x]$, pro $x^{11} - 3x + 1 = (x^3 + x + 2) \cdot \sum_i a_i x^i$, potom okamžitě podle deginice násobení polynomů vidíme, že $1 = 2 \cdot a_0$, což pro žádné celé a_0 neplatí, proto $(x^3 + x + 2)$ nedělí $(x^{11} - 3x + 1)$ v oboru $\mathbf{Z}[x]$. □

2.2. Rozhodněte, zda $(3x^3 + x + 1)/(x^{11} - 3x^8 + 1)$ v oboru $\mathbf{Z}[x]$.

Opět předpokládejme, že existuje polynom $\sum_i a_i x^i \in \mathbf{Z}[x]$, pro $x^{11} - 3x^8 + 1 = (3x^3+x+1) \cdot \sum_i a_i x^i$, a dostáváme, že $1 = 3 \cdot a_8$, což pro žádné celé a_8 není pravda. $3x^3 + x + 1$ nedělí $x^{11} - 3x^8 + 1$ v oboru $\mathbf{Z}[x]$. □

2.3. Rozhodněte, zda $(3x^3 + x + 1)/(x^{11} - 3x^8 + 1)$ v oboru $\mathbf{Q}[x]$.

Snadno určíme obsahy obou polynomů v oboru $\mathbf{Z}[x]$, tj. největší společné násobky jejich koeficientů nad $\mathbf{Z}$, v obou případech je 1, tedy se jedná o primitivní polynomy v oboru $\mathbf{Z}[x]$. Tedy podle Tvrzení 9.2 $(3x^3 + x + 1)/(x^{11} - 3x^8 + 1)$ v oboru $\mathbf{Q}[x]$, právě když $(3x^3+x+1)/(x^{11}-3x^8+1)$ v oboru $\mathbf{Z}[x]$. V předchozí úloze jsme ovšem zjistili, že $3x^3 + x + 1$ nedělí $x^{11} - 3x^8 + 1$ v oboru $\mathbf{Z}[x]$, tedy se tyto polynomy nedělí ani nad $\mathbf{Q}[x]$. □

2.4. Rozhodněte, zda $(6x^3 + 4x + 2)/(6x^9 - 3x^4 + 3x^4 + 12)$ v oboru $\mathbf{Z}[x]$.

Vidíme, že $ct(6x^3 + 4x + 2) = 2$ a $ct(6x^9 - 3x^4 + 3x^4 + 12) = 3$, proto díky Lemmatu 9.5 vidíme, že největší společný dělitel obou polynomů je primitivní (1 je $\mathrm{NSD}_{\mathbf{Z}}(2, 3)$), tedy opět není pravda, že $(6x^3 + 4x + 2)/(6x^9 - 3x^4 + 3x^4 + 12)$ v oboru $\mathbf{Z}[x]$. □

Poznamenejme, že jsme z úvahy že $ct(6x^3+4x+2)$ nedělí $ct(6x^9-3x^4+3x^4+12)$ nad $\mathbf{Z}$ mohli k témuž závěru dojít přímo bez využití Lemmatu 9.5.

2.5. Rozhodněte, zda $(x^{13} + \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3})/(2x^{27} + \frac{2}{3}x^9 + \frac{2}{9}x^2 - 2)$ v oboru $\mathbf{Q}[x]$.

Původní polynomy přenásobíme vhodným racionálním číslem, abych získali primitivní polynomy z oboru $\mathbf{Z}[x]$ a dostaneme polynomy $15x^{13} + 6x^2 - 5 \in \mathbf{Z}[x]$ a $9x^{27} + 3x^9 + x^2 - 9 \in \mathbf{Z}[x]$. Zřejmě jsou otázky, zda $(x^{13} + \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3})/(2x^{27} + \frac{2}{3}x^9 + \frac{2}{9}x^2 - 2)$ a $(15x^{13}+6x^2-5)/(9x^{27}+3x^9+x^2-9)$ nad $\mathbf{Q}[x]$ ekvivalentní. Protože 15 nad celými čísly nedělí 9, vidíme, že $(15x^{13} + 6x^2 - 5)$ nedělí $(9x^{27} + 3x^9 + x^2 - 9)$ v oboru $\mathbf{Z}[x]$, proto stejnou úvahou jako v 2.3 dostáváme díky Tvrzení 9.2, že $(15x^{13}+6x^2-5)$ nedělí $(9x^{27}+3x^9+x^2-9)$ ani v oboru $\mathbf{Z}[x]$, tedy $(x^{13}+\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{3})$ nedělí $(2x^{27} + \frac{2}{3}x^9 + \frac{2}{9}x^2 - 2)$. □