Domácí úkoly

Nejsme-li domluveni jinak , odevzdávejte prosím domácí úkoly nejpozději 2 týdny od zadání (obykle na přespřístím cvičení).

3.3. Dokažte, že je podokruh $\mathbf{Z}[\frac{\sqrt{19}}{2}i] = \{p(\frac{\sqrt{19}}{2}i) \mid p \in \mathbf{Z}[x]\}$ okruhu komplexních čísel oborem integrity hlavních ideálů.

(3 body)

17.3. Dokažte pro každé $n, m \in \mathbf{N}$, že existuje právě $\mathrm{NSD}(n,m)$ homomorfismů grupy $\mathbf{Z}_n$ do grupy $\mathbf{Z}_m$.

(2 body)

31.3. Určete pro každé přirozené k, kolik existuje prvků řádu k v grupě $(\mathbf{Z}_n^*, \cdot, ^{-1}, 1)$, jestliže $n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ pro α, β, γ celá kladná. Své tvrzení dokažte.

(2 body)

7.4. Dokažte, že je číslo 41041 Carmichaelovo.

(1 bod)

21.4. Mějme prvočíslo p splňující podmínku $p = 4m + 1$ pro nějaké liché m. Dokažte, že je $2^m \mathrm{mod} p$ druhá odmocnina -1 v grupě $\mathbf{Z}_p^*$.

(2 body)

28.4. Určete kolik existuje pro každé přirozené n charakterů χ grupy $(\mathbf{Z}, +, -, 0)$, jejichž obraz $\chi(\mathbf{Z})$ má právě n prvků. Najděte dále nějaký charakter ξ grupy $(\mathbf{Z}, +, -, 0)$, pro který je množina $\xi(\mathbf{Z})$ nekonečná a $|\xi(z)| = 1$ pro všechna $z \in \mathbf{Z}$. Svá tvrzení dokažte. (Charakterem rozumíme každý homomorfismus grupy $(\mathbf{Z}, +, -, 0)$ do grupy $(\mathbf{C}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$.)

(2 body)

12.5. Spočítejte $\left(\frac{159493}{10465227}\right)$.

(1 bod)

19.5. Buď $n > 1$ liché přirozené číslo a defimujme $G_n = \{a \in \mathbf{Z}_n^* \mid a^{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{a}{n}\right)\}$. Dokažte:

(a) G_n je podgrupa multiplikativní grupy $\mathbf{Z}_n^*$,

(b) $G_n = \mathbf{Z}_n^*$, právě když je n prvočíslo.

Jakých hodnot může nabývat $\frac{|G_n|}{|\mathbf{Z}_n^*|}$ pro n složené?

(3 body)