1. Bilineární a kvadratické formy

1.1. Spočítejte ve vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $M = ((2,1,1),(4,2,1),(2,2,2))$.

(a) $\mathbf{v} = (4,2,1)$,
(b) $\mathbf{v} = (3,2,2)$,
(c) $\mathbf{v} = (0,0,0)$,
(d) $\mathbf{v} = (2,2,0)$.

(a) Okamžitě vidíme, že $(4,2,1) = 0 \cdot (2,1,1) + 1 \cdot (4,2,1) + 0 \cdot (2,2,2)$, tedy $\{(4,2,1)\}_M = (0,1,0)$

(b) Podobně jako v (a) i tentokrát určíme souřadnice přímo z definice, protože $(3,2,2) = 1 \cdot (2,1,1) + 0 \cdot (4,2,1) + 3 \cdot (2,2,2)$. Dostáváme, že $[(3,2,2)]_M = (1,0,3)$

(c) Opět z definice vidíme, že $\{(0,0,0)\}_M = (0,0,0)$.

(d) Hledáme vektor (x_1,x_2,x_3), pro který $(2,2,0) = x_1 \cdot (2,1,1) + x_2 \cdot (4,2,1) + x_3 \cdot (2,2,2)$, tedy řešíme soustavu rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Nyní snadno dopočítáme, že $\{(2,2,0)\}_M = (1,2,1)$. □

1.2. Najděte takovou matici $\mathbf{A}$, aby souřadnice libovolného vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi M z předchozího příkladu byli rovny součinu $\{\mathbf{v}\}_M = \mathbf{v}\mathbf{A}$, kde počítáme nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

Označíme-li K_3 a uvědomíme-li si, že $\{\mathbf{v}\}_{K_3} = \mathbf{v}$, pak vidíme, že

$$\{\mathbf{v}\}_M = \{\mathbf{v}\}_{K_3}[1]^T_{K_3M} = \mathbf{v}[1]^T_{K_3M},$$

tedy $\mathbf{A} = [1]^T_{K_3M}$. Připomeňme konečně, že $[1]_{K_3M} = [1]^{-1}_{MK_3}$, kde matici $[1]_{MK_3}$ umíme velmi snadno určit z definice. Tedy standardní metodou počítejme:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že $[1]_{K_3M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, a proto $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. □

1.3. Najděte ve vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^2$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ matici přechodu od báze $M = ((2,1),(2,3))$ k bázi $N = ((1,5),(3,4))$, tj. matici $[1]_{NM}$, jestliže

(a) $M = ((2,1),(2,3))$ a $N = ((1,5),(3,4))$,
(b) $M = ((1,2),(3,5))$ a $N = ((4,3),(6,6))$.

(a) Uvědomíme si, že matice přechodu od báze M k bázi N je právě maticí $[1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{NM}$ identického homomorfismu vzhledem k bázím N a M, kterou spočteme obvyklým způsobem

$$[1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{NM} = [1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{K_2M} \cdot [1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{NK_2} = [1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{MK_2}^{-1} \cdot [1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{NK_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Počítáme stejně jako v bodě (a):

$$[1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{NM} = [1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{K_2M} \cdot [1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{MK_2} = [1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{MK_2}^{-1} \cdot [1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{NK_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Nyní standardním způsobem spočítáme hledaný součin matic:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Tedy zjistili jsme, že $[1_{\mathbf{Z}_7^2}]_{NM} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. □

1.4. Buď $\mathbf{A}$ nějaká čtvercová matice stupně n nad tělesem T a definujme zobrazení $f : T^n \times T^n \to T$ předpisem $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}^T$ a dále pro každé $\mathbf{u} \in T^n$ dvojici zobrazení $f_{\mathbf{u}}, {}_{\mathbf{u}}f : T^n \to T$ podmínkou $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ a ${}_{\mathbf{u}}f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Dokažte, že $f_{\mathbf{u}}$ a ${}_{\mathbf{u}}f$ jsou pro každé $\mathbf{u} \in T^n$ lineární formy.

Obě zobrazení $f_{\mathbf{u}}$ i ${}_{\mathbf{u}}f$ zobrazují vektorový prostor nad tělesem T do tělesa T, tedy stačí ověřit linearitu. Využijeme k tomu vlastnosti sčítání a násobení matic a dostaneme pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T^n$ a každé $t \in T$, že $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{v}_1\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{v}_2\mathbf{A}\mathbf{u} = f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1) + f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_2)$ a $f_{\mathbf{u}}(t\mathbf{v}) = t\mathbf{v}\mathbf{A}\mathbf{u} = tf_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$. Symetricky i ${}_{\mathbf{u}}f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u}\mathbf{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = {}_{\mathbf{u}} f(\mathbf{v}_1) + {}_{\mathbf{u}} f(\mathbf{v}_2)$ a ${}_{\mathbf{u}}f(t\mathbf{v}) = t\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{v} = t{}_{\mathbf{u}}f(\mathbf{v})$. □

Poznamenejme, že zobrazení, které jsme zavedli v 1.4 je bilineární forma.

1.5. Uvažujme bilineární formu f z příkladu 1.4 na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_5^2$ pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Najděte matici f vzhledem ke kanonické bázi.
(b) Najděte matici f vzhledem k bázi $B = ((3,3),(4,1))$.
(c) Určete bázi levého vrcholu formy f, tj. podprostoru

$$V_l(f) = \{\mathbf{u} |\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}_5^2\}.$$

(d) Určete bázi pravého vrcholu formy f, tj. podprostoru

$$V_p(f) = \{\mathbf{u} |\ f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}_5^2\}.$$

(a) Označme $[f]_{K_2}$ matici f vzhledem ke kanonické bázi. Postupujeme-li podle definice, tedy uvážíme, že obsahuje na i-tém řádku a j-tém sloupci právě hodnotu $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{e}_j^T$, vidíme, že $[f]_{K_2} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Označme $[f]_B$ matici f vzhledem k bázi $B = ((3,3),(4,1))$. Využijeme definice a Větu 12.7 z přednášky, která říká, že

$$[f]_B = [1]_{BK_2}^T \cdot \mathbf{A} \cdot [1]_{BK_2} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Uvážíme-li, že vektor $\mathbf{u}$ leží v levém vrcholu, právě když je řešením homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}^T$, stačí když najdeme bázi řešení této soustavy. Zřejmě tedy hledanou bázi tvoří například vektor $(1,1)$. Poznamenejme, že podobnou úvahu můžeme využít i pro matice bilineární formy vzhledem k jakékoli jiné bázi C, v takovém případě ovšem najdeme souřadnice hledané báze vrcholu vyjádřené vzhledem k bázi C.

(d) Podobně jako v (c) nahlédneme, že vektor $\mathbf{u}$ leží v v pravém vrcholu, právě když je řešením homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}$. Takovým řešením a hledanou bází je tedy například vektor $(3,1)$. □

1.6. Buď g bilineární forma na racionálním vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$ s maticí $[g]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $B = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$.

(a) Spočítejte $g((1,1,0),(1,1,1))$.
(b) spočítejte $g((1,2,1),(0,2,2))$,
(b) najděte matici g vzhledem k bázi $M = ((1,0,2),(2,-1,0),(1,0,1))$.

(a) Protože jsou vektory $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ přímo bázické vektory báze g, údaj odečtem přímo z matice g vzhledem k bázi B, tedy $g((1,1,0),(1,1,1)) = 0$.

(b) Využijeme vztah, který říká, jak zjistit hodnotu bilineární formy z matice a souřadnicových vektorů $g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_B \cdot \mathbf{A} \cdot [\mathbf{v}]_B^T$. Obvyklým způsobem určíme $[(1,2,1)]_B = (1,1,-1)$ a $[(0,2,2)]_B = (2,-2,0)$, proto

$$g((1,2,1),(0,2,2)) = (1,1,-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2.$$

(c) Nejprve stejně jako v 1.3 standardní cestou spočítáme matici přechodu

$$[1]_{MB} = [1]_{BK_3}^{-1} \cdot [1]_{MK_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá využít Větu 12.7:

$$[g]_M = [1]_{MB}^T \cdot [g]_B \cdot [1]_{MB} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Snadno dopočítáme, že $[g]_M = \begin{pmatrix} -7 & -9 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. □

1.3.

1.7. (a) Najděte matice vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi B symetrické bilineární formy f_s a antisymetrické bilineární formy f_a, pro které $f = f_s + f_a$, kde forma f a báze B jsou z 1.5.

(b) Najděte matice vzhledem k bázi B symetrické bilineární formy g_s a antisymetrické bilineární formy g_a, pro které $g = g_s + g_a$, kde forma g a báze B jsou z 1.6.

(a) Z přednášky víme, že stačí položit $f_s(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{u},\mathbf{v})+f(\mathbf{v},\mathbf{u}))$ a $f_a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - f(\mathbf{v},\mathbf{u}))$, abychom dostali jednoznačně určenou symetrickou bilineární formu f_s a antisymetrickou bilineární formu f_a, pro než $f = f_s + f_a$. Označme $[f_s]_{K_3}$ matici f_s a $[f_a]_{K_3}$ matici f_a vzhledem ke kanonické bázi. Díky izomorfismu, který pro pevně zvolenou bázi C přiřadí bilineární formě její matici vzhledem k C, můžeme otázku vyřešit přímo v maticovém zápisu, tj.

$$[f_s]_{K_3} = 2^{-1} \cdot ([f]_{K_3} + [f]_{K_3}^T) = 3 \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$[f_a]_{K_3} = 2^{-1} \cdot ([f]_{K_3} - [f]_{K_3}) = 3 \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že místo druhého výpočtu jsme mohli uvážit, že $[f_a]_{K_3} = [f]_{K_3} - [f_s]_{K_3}$.

Při hledání matic $[f_s]_B$ a $[g_a]_B$ pracujeme s maticí $[f]_B$ bilineární formy f vzhledem k bázi $B = ((3,3),(4,1))$:

$$[f_s]_B \cdot ([g]_B + [f]_B^T) = 3 \cdot (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$[f_a]_B = [f]_B - [f_s]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Opět označíme $[g_s]_B$ matici g_s a $[g_a]_B$ matici g_a vzhledem k bázi B a postupujeme stejně jako v příkladu (a):

$$[g_s]_B = \frac{1}{2}([g]_B + [g]_B^T) = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$[g_a]_B = [g]_B - [g_s]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

1.8. Buď $\mathbf{B}$ čtvercová matice stupně 2 nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ a uvažujme zobrazení $f : \mathbf{Z}_7^2 \times \mathbf{Z}_7^2 \to \mathbf{Z}_7$ dané předpisem $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}^T$. Určete matici $\mathbf{B}$, víte-li, že $f((1,4),(1,4)) = f((1,4),(3,3)) = 1$, $f((3,3),(1,4)) = 2$ a $f((3,3),(3,3)) = 0$.

Z pozorování příkladu 1.4 víme, že je f bilineární forma. Vezmeme-li bázi $M = ((1,4),(3,3))$ vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^2$, vidíme, že v zadání příkladu máme uvedeny údaje, které můžeme sepsat do matice $[f]_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ f bilineární formy f vzhledem k bázi M. Uvážíme-li, že je matice $\mathbf{B}$ právě maticí f vzhledem ke kanonické bázi K_2, stačí podobně jako v 1.5(b) využít vztahu dokázaného na přednášce

$$\mathbf{B} = [f]_{K_3} = [1]_{K_2M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot [1]_{K_2M}.$$

Obvyklým způsobem potom spočítáme

$$[1]_{K_2M} = [1]_{MK_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

a proto

$$\mathbf{B} = [1]_{K_2M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot [1]_{K_2M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

1.9. Buď g bilineární forma daná analytickým vyjádřením

$$g((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 - 2x_3y_2$$

vzhledem ke kanonické bázi na racionálním vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$.

(a) Najděte matici g vzhledem ke kanonické bázi,
(b) najděte matice symetrické g_s a antisymetrické g_a části g vzhledem ke kanonické bázi,
(c) určete analytické vyjádření symetrické g_s a antisymetrické g_a části g vzhledem ke kanonické bázi,
(d) spočítejte dimenze levého a pravého vrcholu bilineárních forem g, g_s a g_a.

(a) Stačí využít Větu 12.3 a uvědomit si, že koeficient u členu x_iy_j v analytickém vyjádření vzhledem ke kanonické bázi je právě hodnota na i-tém řádku a j-tém sloupci matice bilineární formy vzhledem ke kanonické bázi, tedy

$$[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Postupujeme jako v 1.7 s využitím známé matice $[g]_{K_3}$, proto $[g_s]_{K_3} = \frac{1}{2}([g]_{K_3} + [g]_{K_3}^T) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a $[g_a]_{K_3} = [g]_{K_3} - [g_s]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Užijeme úvahu připomenutou v (a), abychom z matic nalezených v (b) dostali

$$g_s((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 + \frac{3}{2}x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2,$$

$$g_a((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2.$$

(d) Využijeme Větu 12.10(iii), která říká, že dimenze levého i pravého vrcholu nějaké bilineární formy f na vektorovém prostoru dimenze n je rovna $n - h([f]_B)$ pro libovolnou bázi B. Snadno spočítáme, že $h([g]_{K_3}) = h([g_s]_{K_3}) = 3$ a $h([g_a]_{K_3}) = 2$, a proto jádra levého a pravého vrcholu bilineárních forem g, g_s mají dimenzi 0 a jádra levého a pravého vrcholu bilineárních forem g_a mají dimenzi 1. □

1.10. Najděte nějakou polární bázi symetrické bilineární formy g na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^2$ dané předpisem $g((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Nejprve obvyklým způsobem určíme matici symetrické bilineární formy g vzhledem ke kanonické bázi $[g]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Matici $[g]_{K_2}$ upravujeme posloupností symetrických elementárních úprav, tedy v každém kroku provádíme vždy stejnou řádkovou a sloupcovou úpravu tak, abychom nakonec dostali diagonální matici. Řádkové úpravy budeme zachycovat obvyklým způsobem (jako při hledání inverzní matice) do matice.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Budeme-li vzniklou diagonální matici chápat jako matici bilineární formy f vzhledem k nějaké nové bázi M, vidíme, že vpravo dostáváme matici transponovanou k matici přechodu od kanonické báze k bázi M, tedy $[1]_{MK_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nyní snadno určíme bázi $M = ((1,0),(3,1))$, vůči níž je matice f diagonální, tedy M je polární báze f. □

8.3.

1.11. Najděte nějakou polární bázi symetrické bilineární formy f a matici f vzhledem k polární bázi, je-li

(a) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^2$ s maticí $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi,

(b) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_5^2$ s analytickým vyjádřením $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$ vzhledem ke kanonické bázi,

(c) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_5^2$ s maticí $[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $B = ((1,2),(2,3))$,

(d) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ s analytickým vyjádřením $f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_2+x_2y_1-x_2y_3-x_3y_2$ vzhledem ke kanonické bázi,

(e) f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^3$ s maticí $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $B = ((1,0,2),(1,0,1),(0,3,1))$.

Postupujeme stejně jako v příkladu 1.10.

(a) Pracujeme-li s maticí $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, zjevně nám při hledání polární báze nepomůže přehození dvou řádků, jak jsme na to byli zvyklí u Gaussovy eliminace, protože následnou výměnou dvou sloupců, vynucenou symetrickými úpravami, dostáváme původní matici. Místo toho přičteme druhý řádek k prvnímu a poté druhý sloupec k prvnímu (uvědomme si, že tento postup v maticovém zápisu odpovídá úvaze Věty 12.23) a následně už můžeme postupovat standardně:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Tedy $[1]_{PK_2} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ je matice přechodu od kanonické báze k polární bázi P, proto $P = ((1,1),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ a $[f]_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) Nejprve snadno určíme matici $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi. Tentokrát nám k úpravě matice symetrická výměna řádku a sloupce pomůže, naopak obdobná úprava jako v příkladu (a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ je zbytečná a k nalezení diagonální matice nevede. Počítáme tedy

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Tedy v řádcích pravé poloviny poslední matice nacházíme bázi $P = ((0,1),(1,3))$, pro níž $[f]_P = \mathbf{E}$.

(c) Postupovali-li bychom stejně jako v úloze (a) a upravovali-li bychom symetrickými úpravami matici $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$ našli bychom, poté, co bychom v levé části matice dostali diagonální matici, v pravé části právě matici transponovanou k matici přechodu od báze B ke hledané polární bázi P. Uvážíme-li, že $[1]^T_{PK_2} = [1]^T_{PB} \cdot [1]^T_{BK_2}$, stačí abychom místo jednotkové matice umístili napravo transponovanou matici přechodu od od kanonické báze k bázi B a tu obvyklým způsobem upravovali:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Vidíme, že pravé části poslední matice máme transponovanou matici přechodu $[1]^T_{PK_2} = [1]^T_{PB} \cdot [1]^T_{BK_2}$ od kanonické báze k polární bázi P, proto $P = ((2,3),(2,1))$. Konečně $[f]_P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) Postupujeme stejně jako v případě (a) a (b), tedy určíme matici $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ bilineární formy f vzhledem ke kanonické bázi a pak standardně symetricky upravujeme, tentokrát se symetrickým násobením řádků a sloupců vyhneme zlomkům:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s$$

$$\sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim_s$$

$$\sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim_s$$

$$\sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Dostáváme polární bázi $P = ((1,1,0),(-1,1,0),(2,-1,1))$ a matici bilineární formy $[f]_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ vzhledem k P.

(e) Tentokrát uvažujeme stejně jako v (c), proto upravujeme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim_s$$

$$\sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 5 \end{array}\right).$$

Našli jsme polární bázi $P = ((1,0,2),(2,0,3),(5,3,5))$, vůči níž má bilineární forma f matici $[f]_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

1.12. Najděte bázi vrcholu symetrické bilineární formy f z příkladu 1.11(e).

Podle Věty 13.8 stačí vzít ty vektory nalezené polární báze, na nichž je hodnota f nulová. Proto bázi vrcholu tvoří právě vektor $(5,3,5)$. □

1.13. Buď h symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^5$ daná podmínkou $h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 2$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, n$ Najděte nějakou bázi vrcholu a nějakou polární bázi h.

Z podmínky, jíž je zadána bilineární forma h, vidíme, že matice h vzhledem ke kanonické bází sestává ze samých dvojek, tedy $[h]_{K_5} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hledáme-li vrchol, stačí jako obvykle vyřešit homogení soustavu rovnic s maticí $[h]_{K_5}$. Vidíme, že například posloupnost $M = ((6,1,0,0,0),(6,0,1,0,0),(6,0,0,1,0),(6,0,0,0,1))$ je báze vrcholu h. Vzhledem k tomu, že je hodnost dané bilineární formy (tj. hodnost kterékoli její matice) rovna jedné, stačí nám v tomto případě pro nalezení polární báze najít libovolný doplněk posloupnosti M na bázi $\mathbf{Z}_7^5$ (v jednodimenzionálním doplňku totiž už není co dále upravovat). Tedy například posloupnost $N = ((6,1,0,0,0),(6,0,1,0,0),(6,0,0,1,0),(6,0,0,0,1),(1,0,0,0,0))$ je polární báze h a matice h vzhledem k N je $[h]_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. □

15.3.

1.14. Rozhodněte, zda je zobrazení $h_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dané předpisem $h_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1y_2 + 3x_2^2$ kvadratická forma.

Snadno nahlédneme, že můžeme dané zobrazení vyjádřit ve tvaru $h_2(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, a proto je $h_2(x_1, x_2) = h((x_1, x_2), (x_1, x_2))$ pro symetrickou bilineární formu h s maticí vzhledem ke kanonické bázi $[h]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tedy $h_2(\mathbf{u}) = h(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ je podle definice kvadratická forma. □

1.15. Najděte symetrickou bilineární formu f na $\mathbf{Z}_5^3$, která vytváří kvadratickou formu f_2 danou analytickým vyjádřením $f_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 + 4x_3^2$. Určete vrchol f_2.

Stejně jako v předchozí úloze přímočaře (tj. „rozpůlením" koeficientů u členů x_iy_j pro $i \neq j$) určíme matici hledané symetrické bilineární formy f vzhledem ke kanonické bázi $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Tuto bilineární formu můžeme popsat i analyticky (vzhledem ke kanonické bázi):

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 + 4x_3y_3.$$

Vzhledem k tomu, že vrcholem kvadratické formy je pravý (nebo levý) vrchol symetrické bilineární formy f, která vytváří kvadratickou formu f_2, stačí najít řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[f]_{K_3}$. Protože

$$[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je vrchol $V(f) = V(f_2) = \langle (1, 4, 1) \rangle$. □

1.16. Najděte nějakou polární bázi kvadratické formy f_2 na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^3$ s analytickým vyjádřením $f_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3$.

Stejně jako v předchozí úloze snadno určíme matici $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ symetrické bilineární formy f, která vytváří kvadratickou formu f_2, vzhledem ke kanonické bázi a poté postupujeme standardně:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

V řádcích pravé strany upravené matice vidíme, že polární bázi f tvoří například vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (5, 5, 1)$. □

1.17. Uvažujme kvadratickou formu $g_2 = x_1^2 - 6x_1y_2 + 2x_2^2$ Existuje-li, najděte nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$, pro který

(a) $g_2(\mathbf{v}) > 0$,
(b) $g_2(\mathbf{v}) < 0$,
(c) $g_2(\mathbf{v}) = 0$,

kde g_2 je kvadratická forma vytvořená bilineární formou z příkladu 1.10.

(a) Snadno určíme matici $[g]_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ vytvářející symetrické bilineární formy g vzhledem ke kanonické bázi a okamžitě z ní vidíme, že hodnota g_2 je kladná například na obou vektorech kanonické báze, tedy $g_2(\mathbf{e}_1) = 1$ a $g_2(\mathbf{e}_2) = 2$.

(b) Potřebujeme zjistit, zda je či není kvadratická forma g_2 pozitivně semidefinitní. Není-li, pak existuje vektor v na němž je hodnota g_2 záporná. V příkladu 1.10 jsme našli polární bázi $M = ((1,0),(3,1))$ a matici $[g]_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$. Protože má matice g vzhledem bázi M jedno kladné a jedno záporné číslo, je g indefinitní. Opět přímo z matice vidíme, že $g_2((3,1)) = -7$.

(c) Vyjádřeme si hledaný vektor $\mathbf{v}$ pomocí známé polární báze M, tedy $\mathbf{v} = a \cdot (1,0) + b \cdot (3,1)$, tj. $\{\mathbf{v}\}_M = (a,b)$. Nyní víme, že $g_2(\mathbf{v}) = \{\mathbf{v}\}_M [g_2]_M [\mathbf{v}]^T_M \cdot = a^2 - 7 \cdot b^2$. Chcem-li, aby $g_2(\mathbf{v}) = 0$, dostáváme rovnici $a^2 - 7 \cdot b^2 = 0$, kterou řeší například $(a,b) = (\sqrt{7}, 1)$. Našli jsme tedy vektor $\mathbf{v} = \sqrt{7} \cdot (1,0) + 1.(3,1) = (\sqrt{7}+3, 1)$, pro nějž platí, že $g_2(\mathbf{v}) = 0$. □

1.18. Spočítejte signaturu symetrické bilineární formy h na $\mathbf{R}^3$ dané kvadratickou formou $h_2((x_1,x_2,x_3)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$.

Obvyklým způsobem určíme matici $[h]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ a tuto matici upravíme posloupností symetrických úprav na diagonální matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Protože víme, že existuje polární báze M vůči níž má symetrická bilineární forma h matici $[h]_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, stačí podle definice přepočítat nuly, kladná čísla a záporná čísla na diagonále této matice a seřadit údaje do signatury $(0,2,1)$ symetrické bilineární formy h. □

1.19. Rozhodněte, zda existuje vektor $\mathbf{v}$ a zda existuje vektor $\mathbf{u}$, aby pro kvadratickou formu h_2 z úlohy 1.18 platilo $h_2(\mathbf{v}) < 0$ a $h_2(\mathbf{u}) = 0$.

V příkladu 1.18 jsem zjistili, že je kvadratická forma h_2 indefinitní, tedy existují vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}$, pro které platí $h_2(\mathbf{v}) < 0$ a $h_2(\mathbf{u}) = 0$. □

1.20. Rozhodněte, zda existují reálná čísla x_1, x_2, x_3, pro která

$$x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 3x_3^2 < 0.$$

Definujeme-li kvadratickou formu $g_2 = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2$, vidíme, že řešíme stejnou úlohu jako 1.19, stačí nám tedy zjistit signaturu g_2. Symetrickými úpravami tedy bude upravovat matici $[g]_{K_3}$ vytvářející bilineární formy g

$$[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že signatura g_2 je $(0,3,0)$, tedy g_2 je pozitivně definitní, a proto $g_2(\mathbf{v}) \geq 0$ pro všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Hledaná reálná čísla tedy neexistují. $\square$

1.21. Nechť h je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ s maticí $[h]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ vzhledem k nějaké bázi B. Rozhodněte, zda je h skalární součin na $\mathbf{R}^3$.

Položme $\mathbf{A} = [h]_B$ a označme $\mathbf{A}_i$ matici, která vznikne z $\mathbf{A}$ vynecháním posledních $n-i$ řádků a sloupců a využijme tentokrát Důsledek 13.17 z přednášky, podle nějž stačí zjistit, zda jsou všechny subdeterminanty $\det A_1$ kladné. Tedy počítáme $\det A_1 = 1$, $\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2-1 = 1$, $\det A_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 10+1+1-2-5-1 = 4$, což znamená, že h je skalární součin. $\square$

Další úlohy

(1) Dokažte, že je bilineární forma zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definované předpisem $f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_3y_2$.

(2) Najděte matici f z předchozí úlohy vzhledem
   (a) ke kanonické bázi,
   (b) k bázi $B = ((1,-1,0),(1,1,0)(1,2,1))$,
   (c) k bázi $C = ((0,1,0),(-1,1,-1)(-1,2,0))$.

(3) Nechť $f = f_s + f_a$ je rozklad bilineární formy f z příkladu 1 na symetrickou a antisymetrickou část, tj. f_s je symetrická bilineární forma f_a je antisymetrická bilineární forma. Najděte matice f_s a f_a vzhledem
   (a) ke kanonické bázi,
   (b) k bázi $B = ((1,-1,0),(1,1,0)(1,2,1))$,
   (c) k bázi $C = ((0,1,0),(-1,1,-1)(-1,2,0))$.

(4) Uvažujme symetrickou bilineární formu g na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ s maticí $[g]_{K_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_4. daná předpisem $g_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
   (a) Najděte polární bázi g,
   (b) rozhodněte, zda je g skalární součin na $\mathbf{R}^4$,
   (c) najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^4$, pro které $g_2(\mathbf{v}) = 0$.

(5) Buď g_2 kvadratická forma na $\mathbf{Z}_3^4$ daná předpisem $g_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
   (a) Najděte symetrickou bilineární formu g, pro níž $g_2(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v},\mathbf{v})$,
   (b) určete matici g vzhledem k bázi $B = ((1,1,0,0),(2,1,0,0)(0,0,2,2),(0,0,1,2))$,

(c) určete matici g vzhledem k kanonické bázi,
(d) spočítejte bázi vrcholu symetrické bilineární formy g,
(e) najděte polární bázi P symetrické bilineární formy g,
(f) najděte matici g vzhledem k nalezené bázi P.