

## Písemná zkouška z ODR

### 12.1.2021, Termín A

1. Buď  $\phi(t, \mu, \lambda)$  řešící funkce soustavy

$$\begin{aligned}x' &= xy + \lambda x^2, & x(0) &= \mu \\ y' &= x^2 + y, & y(0) &= 2\end{aligned}$$

- (a) Vypočtete  $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}$  v bodě  $(t, 0, 1)$ .
- (b) Vypočtete  $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$  v bodě  $(t, 0, 1)$ .
- (c) Napište přibližnou hodnotu  $\phi(t, \varepsilon, 1 + \delta)$  a chybu pomocí malého  $o$  ( $\varepsilon, \delta$  malá).

2. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= x^2 y^5 \\ y' &= x^3 y.\end{aligned}$$

- (a) Vypočtete první integrál.
- (b) Pomocí a) (nebo bez ní) načrtněte do roviny  $xy$  trajektorie řešení a vyznačte stacionární body.
- (c) Doplňte do náčrtku směry probíhání trajektorií a na jejich základě rozhodněte o stabilitě stacionárních bodů.

3. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= ay(2 + 4xy) \\ y' &= x - y^3 + x^2 y\end{aligned}$$

- (a) Pro  $a > 0$  vyšetřete stabilitu, resp. asymptotickou stabilitu počátku pomocí linearizace.
- (b) Pro  $a = -1$  najděte ljapunovskou funkci.
- (c) Rozhodněte, zda z nalezené ljapunovské funkce plyne asymptotická stabilita nebo jen stabilita.

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

## Písemná zkouška z ODR

### 18.1.2021, Termín B

1. Uvažujte soustavu  $x' = Ax$  s maticí

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 8 \\ -3 & -3 & 4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

- (a) Najděte dimenze prostorů  $X_+$ ,  $X_-$  a  $X_c$ .
- (b) Rozhodněte o stabilitě a asymptotické stabilitě nulového řešení soustavy.
- (c) Najděte všechny počáteční podmínky  $x(0)$ , aby příslušné řešení bylo omezené na celém  $\mathbb{R}$ .

2. Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = \frac{2tx + t}{x}$$

- (a) Určete, ve kterých oblastech roviny  $(t, x)$  jsou řešení rostoucí/klesající, načrtněte.
- (b) Určete množiny bodů, kde jsou řešení konvexní, resp. konkávní.
- (c) Načrtněte množiny z (b) a také trajektorie řešení (na základě informací, které máte).

3. Buď  $\phi(t, a)$  řešící funkce rovnice

$$x'' + 3xx' = 0, \quad x(0) = 1, x'(0) = a.$$

- (a) Převed'te rovnici s počátečními podmínkami na soustavu prvního řádu a najděte řešení pro  $a = 0$ .
- (b) Pro soustavu najděte derivaci řešící funkce podle  $a$  v bodě  $a = 0$ .
- (c) Pro původní rovnici najděte  $\frac{\partial \phi}{\partial a}(t, 0)$ .

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

## Písemná zkouška z ODR

### 27.1.2021, Termín C

#### 1. Uvažujte rovnici

$$x'' + x^2 - 6x = 0$$

- (a) Vypočtete první integrál a určete stacionární řešení.
- (b) Pro řešení s počáteční podmínkou  $x(0) = 8$ ,  $x'(0) = 0$  určete jeho rychlost při průchodu stacionárním bodem.
- (c) Určete množinu počátečních podmínek  $x(0) = a$ ,  $x'(0) = 0$ , pro něž bude řešení oscilovat.

#### 2. Uvažujte soustavu

$$x' = 2x^2 + 2xy$$

$$y' = 3x + 3y$$

- (a) Vypočtete první integrál.
- (b) Načrtněte trajektorie řešení do roviny  $(x, y)$ , vyznačte směry probíhání.
- (c) Rozhodněte, zda dochází k blow-upu u řešení, kde  $x \rightarrow +\infty$ . Vyznačte je na obrázku.

#### 3. Uvažujte soustavu $X' = AX$ s maticí

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -4 \\ -9 & -1 & -4 \\ 17 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

- (a) Najděte dimenze prostorů  $X_+$ ,  $X_-$ ,  $X_c$ .
- (b) Najděte prostor  $X_-$ .
- (c) Najděte množinu počátečních podmínek  $X(0)$ , aby příslušná řešení splňovala  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-2t} X(t) = (0, 0, 0)^T$ .

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

## Písemná zkouška z ODR

### 2.2.2021, Termín D

1. Buď  $\Phi(t, \mu, \lambda)$  řešící funkce rovnice

$$x' = \lambda x^2 + t, \quad x(0) = \mu$$

(a) Vypočtete  $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(t, 1, 0)$ .

(b) Vypočtete  $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(t, 1, 0)$ .

(c) Pomocí (a) a (b) vypočtete přibližnou hodnotu  $x(2)$ , je-li  $x$  řešením rovnice  $x' = \frac{3}{10}x^2 + t$  s p.p.  $x(0) = \frac{11}{10}$ . Chybu neodhadujte.

2. Uvažujte rovnici

$$x' = \frac{x + t}{x - t}$$

(a) Načrtněte do roviny oblasti, kde jsou řešení rostoucí, resp. klesající a zkuste načrtnout trajektorie některých řešení.

(b) Načrtněte do nového obrázku oblasti, kde jsou řešení konvexní, resp. konkávní a načrtněte trajektorie řešení na základě informací, které máte?

(c) Rozhodněte, zda existují řešení, která jsou na části definičního oboru konvexní a na části konkávní.

3. Uvažujte soustavu

$$x' = -3x + 2 \sin y + z$$

$$y' = (x - y)(z - 2)$$

$$z' = x + 2xy - z$$

(a) Najděte linearizaci soustavy v počátku.

(b) Rozhodněte o stabilitě nulového řešení lineární a nelineární soustavy.

(c) Pro lineární soustavu najděte  $X_c$  a určete dimenze  $X_+$ ,  $X_-$ ,  $X_c$ .

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

## Písemná zkouška z ODR

### 8.2.2021, Termín E

1. Buď  $\phi(t, \lambda)$  řešící funkce rovnice

$$x' = 3e^\lambda x + 2, \quad x(0) = 1$$

s parametrem  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (a) Najděte rovnici ve variacích pro  $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, 0)$ .

- (b) Vypočtěte  $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, 0)$ .

- (c) Napište rovnici ve variacích pro  $w(t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2}(t, 0)$  (která bude obsahovat jen  $w'$ ,  $w$  a  $t$ , žádné další neznámé či proměnné).

2. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= y - y^3 \\ y' &= -x \end{aligned}$$

- (a) Je možné určit stabilitu počátku pomocí linearizace?
- (b) Převeďte soustavu do polárních souřadnic.
- (c) Určete, v kterých částech roviny se řešení k počátku přibližuje a v kterých se vzdaluje.

3. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= (x + y)^2 - 1 \\ y' &= y^2 - 4 \end{aligned}$$

- (a) Najděte všechny stacionární body soustavy
- (b) Rozhodněte o stabilitě a asymptotické stabilitě dvou stacionárních bodů ležících v pravé polorovině (tj.  $x > 0$ ).
- (c) Pro stacionární bod s největší  $x$ -ovou souřadnicí rozhodněte, zda se jedná o stabilní uzel, nestabilní uzel, či sedlo a načrtněte obrázek trajektorií na okolí bodu (pokud se jedná o sedlo, tak včetně správných směrů stabilní a nestabilní variety).

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

## Písemná zkouška z ODR

### 17.2.2021, Termín F

1. Buď  $\Phi(t, a, b)$  řešící funkce soustavy

$$\begin{aligned}x' &= 3x^2 + xy^2, & x(0) &= a \\y' &= 2x + 3y, & y(0) &= b\end{aligned}$$

(a) Vypočtete  $\frac{\partial \Phi}{\partial b}(t, 0, 0)$ .

(b) Vypočtete  $\frac{\partial \Phi}{\partial a}(t, 0, 0)$ .

(c) Vypočtete  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2}(t, 0, 0)$ .

2. Uvažujte rovnici

$$x' = \frac{e^x - 1}{x^2 - x}$$

(a) Vyšetřete monotonii a načrtněte obrázek trajektorií včetně správných úhlů na krajích jednotlivých řešení.

(b) Spočtete druhou derivaci řešení a vyšetřete konvexitu pro  $x$  blízko plus a minus nekonečna.

(c) Vyšetřete blow-up v plus a minus nekonečnu.

3. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= -y^3 - 2x(x^2 + y^2), \\y' &= x - 3y(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

(a) Zjistěte, zda dokážete rozhodnout o stabilitě počátku pomocí linearizace.

(b) Najděte Ljapunovskou funkci.

(c) Plyne z nalezené Ljapunovské funkce stabilita nebo asymptotická stabilita? Zdůvodněte.

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

## Písemná zkouška z ODR

### 23.2.2021, Termín G

1. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= y^3(1 + xy^3) \\ y' &= -x^5(2 + xy)\end{aligned}$$

- (a) Je možné rozhodnout o stabilitě počátku pomocí linearizace?
- (b) Najděte Ljapunovskou funkci  $V$ .
- (c) Určete, na jaké množině je  $V$  Ljapunovskou funkcí a rozhodněte, zda  $V$  implikuje stabilitu, resp. asymptotickou stabilitu.

2. Uvažujte rovnici

$$x' = t(x^2 - t^2)$$

- (a) Načrtněte do roviny oblasti, kde jsou řešení rostoucí, resp. klesající a zkuste načrtnout trajektorie některých řešení.
- (b) Rozhodněte, zda je řešení procházející bodem  $(t = 1, x = 2)$  na okolí tohoto bodu konvexní nebo konkávní.
- (c) Vypočtěte úhly, pod kterými protínají jednotlivá řešení osu  $t$ . Načrtněte do obrázku, kde jsou průchody osou strmější a kde méně strmé.

3. Buď  $\Phi(t, \mu)$  řešící funkce rovnice

$$x' = \frac{1}{2}(1 + t^2)x^2 + t^2 \sin x + \cos x - 1, \quad x(0) = \mu$$

- (a) Vypočtěte  $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(t, 0)$ .
- (b) Sestavte rovnici ve variacích pro  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu^2}(t, 0)$ .
- (c) Vypočtěte  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu^2}(t, 0)$ .

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

## Písemná zkouška z ODR

### 7.6.2021, Termín H

1. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= z, \\z' &= x.\end{aligned}$$

- (a) Rozhodněte o stabilitě počátku.
- (b) Najděte nestabilní podprostor.
- (c) Najděte stabilní podprostor.

2. Uvažujte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x' &= 2x + xy, \\y' &= 3xy^2.\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou  $x(0) = a$ ,  $y(0) = b$  a její řešící funkci  $\Phi(t, a, b)$ .

- (a) Vypočtěte  $\frac{\partial \Phi}{\partial a}(t, 1, 0)$ .
- (b) Vypočtěte  $\frac{\partial \Phi}{\partial b}(t, 1, 0)$ .
- (c) Na základě předchozích bodů napište přibližnou hodnotu řešení  $x$  v čase  $t$  při počátečních podmínkách  $a = 1$ ,  $b = 0,9$ .

3. Uvažujte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x' &= 2x + xy^3, \\y' &= 3xy^2.\end{aligned}$$

- (a) Vypočtěte první integrál.
- (b) Najděte rovnici trajektorie řešení pro počáteční podmínku  $x(1) = 2$ ,  $y(1) = 1$ .
- (c) Načrtněte trajektorii z bodu (b) a vyznačte směr probíhání (osa  $x$  může být svislá).

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**