

Písemná zkouška z ODR

4.1.2017, Termín A

1. Uvažujte soustavu $x' = Ax$ s maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Najděte dimenze prostorů X_+ , X_- a X_0 a rozhodněte o stabilitě nulového řešení soustavy.
- (b) Najděte všechny počáteční podmínky $x(0)$, pro něž je řešení x soustavy omezené na $[0, +\infty)$.
- (c) Rozhodněte o stabilitě nulového řešení soustavy $x' = Ax - 3x + x^T Axv$, kde $v = (1, 1, 1)^T$.

2. Buď $\phi(t, \mu, \lambda)$ řešící funkce soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x(y+1) + \lambda ty^2, & x(0) &= 0 \\ y' &= (x+1)(y-1), & y(0) &= \mu \end{aligned}$$

- (a) Vypočtete $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}$ v bodě $(t, 1, 0)$.
- (b) Vypočtete $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$ v bodě $(t, 1, 0)$.
- (c) Napište přibližnou hodnotu $\phi(2, \mu, \lambda)$ a chybu pomocí malého o .

3. Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = \sin(tx)$$

- (a) Určete, ve kterých oblastech roviny (t, x) jsou řešení rostoucí/klesající. Načrtněte tyto oblasti.
- (b) Načrtněte řešení rovnice do roviny (t, x) (do zvláštního obrázku).
- (c) Je každé maximální řešení definováno na celém $\mathbb{R}$? Svou odpověď dokažte.

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

Písemná zkouška z ODR

19.1.2017, Termín B

1. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= 2y + xy^2 + x^3 \\ y' &= -2x + y^3\end{aligned}$$

- (a) Vyšetřete stabilitu linearizované soustavy $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \nabla F(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Co dokážete říct o stabilitě nulového řešení pro nelineární soustavu?
- (b) Převed'te nelineární soustavu do polárních souřadnic.
- (c) Co dokážete říct o stabilitě nulového řešení na základě (b)?

2. Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňující $A^2 = -2I$.

- (a) Vypočtete e^{tA} přímo z definice maticové exponenciály.
- (b) Vypočtete B^2 a poté stejně jako v (a) exponenciálu e^{tB} pro $B = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$.
- (c) Rozhodněte o stabilitě/asymptotické stabilitě nulového řešení rovnice $x' = Ax$.

3. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= x + y \\ y' &= x^2 - y^2.\end{aligned}$$

- (a) Vypočtete první integrál.
- (b) Z rovnice pro x' rozhodněte, zda x -ová souřadnice řešení může utéct do $+\infty$ v konečném čase.
- (c) Rozhodněte, v kterých částech roviny (x, y) je x resp. y rostoucí resp. klesající a poté načrtněte trajektorie řešení (využijte také (a)).

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

Písemná zkouška z ODR
30.1.2015, Termín C

1. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= y + 2 + x(y + 2) \\ y' &= -x - x(y + 2) + x^3\end{aligned}$$

- (a) Najděte stacionární body soustavy.
- (b) Najděte linearizované soustavy ve stacionárních bodech.
- (c) Rozhodněte o stabilitě stacionárních bodů pro **linearizované soustavy**.
Co dokážete říct o stabilitě stacionárních bodů původní nelineární soustavy?

2. Buď $\phi(t, \lambda, \mu)$ řešící funkce rovnice

$$x' = t(x^2 + 2x - 3) + \lambda t \sin x, \quad x(1) = \mu$$

s parametrem $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}(t, 0, -3)$.
- (b) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, 0, -3)$.
- (c) Najděte $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mu^2}(t, 0, -3)$.

3. Uvažujte soustavu pro $x, y > 0$

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' &= \frac{2y}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

- (a) Vypočtěte první integrál.
- (b) Vypočtěte řešení soustavy.
- (c) Je nějaké řešení soustavy stabilní?

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

Písemná zkouška z ODR

16.2.2017, Termín D

1. Nechť pro matici A platí

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 2 - e^{-t} & 1 - e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2 & 2e^{-t} - 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Najděte řešení rovnice $x' = Ax$ s počáteční podmínkou $x(0) = (1, 2)^T$. Jak se chová pro $t \rightarrow +\infty$?
- (b) Najděte stabilní podprostor pro rovnici $x' = Ax$.
- (c) Je nulové řešení rovnice $x' = Ax$ asymptoticky stabilní/stabilní/nestabilní?

2. Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = x(2\sqrt{x} + t)$$

- (a) Vyznačte v rovině oblasti, kde řešení roste, kde klesá a kde má nulovou derivaci a načrtněte průběhy řešení.
- (b) Ukažte, že řešení jsou v prvním kvadrantu konvexní.
- (c) Určete, pro jaké počáteční podmínky nastane blow-up pro čas běžící dopředu.

3. Mějme diferenciální rovnici s parametrem $a \geq 0$

$$x'' + ax' + x^2(5x^2 + 4x) = 0$$

- (a) Pro $a = 0$ najděte první integrál.
- (b) S pomocí (a) rozhodněte o stabilitě nulového řešení pro $a \geq 0$ (asymptotickou stabilitou se nezabývejte).
- (c) Je pro $a = 0$ řešení s počáteční podmínkou $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ periodické?

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

Písemná zkouška z ODR

6.4.2017, Termín E

1. Uvažujte soustavu rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x' &= x(a - e^{x^2+y^2}) + 2y \\ y' &= -2x + y(3 - 2a - e^{x^2+y^2})\end{aligned}$$

- (a) Linearizujte soustavu v počátku.
- (b) Pro $a = 2$ vyšetřete stabilitu počátku pomocí (a).
- (c) Pro $a = 1$ rozhodněte o stabilitě počátku pomocí polárních souřadnic.

2. Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = \frac{tx + 1}{t - 5}.$$

- (a) Vyznačte v rovině oblasti, kde řešení roste, kde klesá a kde má nulovou derivaci.
- (b) Do jiného obrázku vyznačte oblasti, kde jsou řešení konvexní a kde konkávní a křivky, na kterých leží inflexní body řešení.
- (c) Zkombinujte oba obrázky do třetího a načrtněte průběhy řešení.

3. Buď $\phi(t, \mu, \lambda)$ řešící funkce rovnice

$$x' = x^2 + \lambda tx, \quad x(0) = \mu$$

- (a) Napište rovnici ve variacích pro $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}$ v bodě $(t, 2, 0)$.
- (b) Vyřešte rovnici ve variacích, tj. vypočtěte $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}$ v bodě $(t, 2, 0)$.
- (c) Vypočtěte $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$ v bodě $(t, 2, 0)$.

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.