VI. Stabilita

Příklad 1. Uvažujme matici

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro jaké počáteční podmínky $\boldsymbol{x}_0$ je nulové řešení rovnice $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$ stabilní, resp. asymptoticky stabilní? [Stabilita pro $\langle (1,-1,1)^\top, (1,0,1)^\top \rangle$ a as. stabilita pro $\langle (1,-1,1)^\top \rangle$.]

Příklad 2. Mějme matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující $\mathbb{A}^2 = -\mathbb{A}$.

(i) Spočtěte $e^{t\mathbb{A}}$, respektive najděte $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující $e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{B} + \mathbb{C}e^{-t}$.

(ii) Pomocí předešlého rozhoděte o stabilitě nulového řešení $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$.

(iii) Najděte vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a s jejich pomocí rozhodněte o stabilitě nulového řešení $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$.

[(i) je přímočaré a dostaneme asymptotickou stabilitu. Ve spektru je nejvýše 0 a -1, závisí na regularitě.]

Příklad 3. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= -(x^2+y^2)y, \\ y' &= (x^2+y^2)x. \end{aligned}$$

(i) Lze rozhodnout o stabilitě počátku pomocí linearizované soustavy?

(ii) Převeďte soustavu do polárních souřadnic a rozhodněte o stabilitě počátku.

(iii) Jsou jiná řešení stabilní?

[Nelze. Převodem do pol. souřadnic najdeme $r' = 0$ a $\varphi' = r^2$, takže nulové je stabilní, ostatní nikoliv.]

Příklad 4. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= -3x + 2\sin y + z, \\ y' &= (x-y)(z-2), \\ y' &= x + 2xy - z. \end{aligned}$$

(i) Najděte linearizaci v počátku.

(ii) Rozhodněte o stabilitě linearizované a původní soustavy.

(iii) Pro linearizovanou soustavu najděte X_0 a určete dimenze prostorů X_-, X_+, X_0.

[$\lambda = 0, \pm\sqrt{3}$, obojí je nestabilní, dimenze jsou jedna a $X_0 = \langle (1,1,1)^\top \rangle$.]

Příklad 5. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= y + 2 + x(y+2), \\ y' &= -x - x(y+2) + x^3. \end{aligned}$$

(i) Najděte stacionární body soustavy.

(ii) Najděte linearizované soustavy v těchto bodech.

(iii) Rozhodněte o stabilitě stac. bodů lin. soustavy. Co víte o stabilitě stac. bodů pro původní soustavu?

[$(0,-2)$ stabilní a nevíme, $(1,-2)$ obojí nestabilní (sedlo) a $(-1,-2)$ obojí nestabilní.]

Příklad 6. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= (x+y)^2 - 1, \\ y' &= y^2 - 4. \end{aligned}$$

(i) Najděte stacionární body soustavy.

(ii) Rozhodněte o (asymptotické) stabilitě stacionárních bodů ležících v pravé polorovině.

(iii) Pro bod s největší x-ovou složkou načrtněte trajektorie řešení na jeho okolí.

[Body $(\pm 1, \mp 2)$, $(\pm 3, \mp 2)$, bod $(1, -2)$ je asymptoticky stabilní a $(3, -2)$ je nestabilní (sedlo).]

Příklad 7. Uvažujte soustavu

$$x' = y^3(1 + xy^3),$$
$$y' = -x^5(2 + xy).$$

(i) Je nmožné rozhodnout o stabilitě počátku pomocí linearizace?

(ii) Najděte Ljapunovskou funkci V.

(iii) Určete na jaké množině je V Ljapunovskou funkcí a rozhodněte o (asymptotické) stabilitě.

Příklad 8. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ uvažujte soustavu

$$x' = 2y - 2x \sin^2 y,$$
$$y' = -5x + \alpha y \cos x.$$

(i) Vyšetřete (asymptotickou) stabilitu počátku pro $\alpha > 0$.

(ii) Vyšetřete (asymptotickou) stabilitu počátku pro $\alpha < 0$.

(iii) Pro $\alpha = 0$ najděte Ljapunovskou funkci. Co dokážete říci o (asymptotické) stabilitě počátku?