I. Opakování

Příklad 1. (Rovnice s konstantními koeficienty) Řešte následující rovnice:

(a) $x''' - x'' + 4x' - 4x = 0$.

(b) $x^{(4)} + 2x''' - 2x' - x = 0$.

(c) $x'' + 2x' + 2x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

(d) $x'' - 3x' + 2x = 0$, $x(t)$ je nenulová na $\mathbb{R}$.

(e) $x'' + x' + x = e^t \cos t$.

(f) $x''' + x'' = t^3 + t^2$.

Příklad 2. (Soustavy s konstantními koeficienty) Řešte následující soustavy:

(a) $\begin{aligned} x' &= 7x - 10y - 4z \\ y' &= 4x - 7y - 4z \\ z' &= -6x + 7y + z \end{aligned}$.

(b) $\begin{aligned} x' &= 2x - y + z + \cos t \\ y' &= 5x - 4y + 3z + \sin t \\ z' &= 4x - 4y + 3z + 2\sin t - 2\cos t \end{aligned}$.

Příklad 3. (Separace proměnných) Řešte následující rovnice:

(a) $x' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}$.

(b) $x' = \sqrt{1 - x^2}$.

(c) $x' = e^{-x} \cos t$.

(d) $tx' + x = x^2$.

Příklad 4. (Integrační faktor) Řešte následující rovnice:

(a) $x' + x = e^{-t} \sin t$.

(b) $tx' - 3x = t^4$.

(c) $t^3 x' - tx = 1$.

(d) $tx' + x = x^2 \log t$, $x(1) = 1$.

Příklad 5. (Aplikace)

(a) V čase $t = 0$ odstavíme z plotny hrnec vařící vody. Po pěti minutách je její teplota již 80 °C. Je-li teplota v místnosti 20 °C, určete kdy bude mít voda v hrnci teplotu 60 °C.

Použijte, že dle Newtonova ochlazovacího zákona platí, že změna teploty T daného objektu je přímo úměrná rozdílu T a teploty okolního prostředí.

(b) Nádrž o objemu 1500 l na začátku obsahuje 600 l vody a v ní 5 kg rozpuštěné soli. Do nádrže vtéká voda rychlostí 9 l/h s rozpuštešou solí o známé koncentraci $\mu(t)$ kg/l. Jestliže solný roztok vytéká z nárže rychlostí 6 l/h, kolik soli bude v nádrži ve chvíli jejího naplnění? Sestavte rovnici jejímž řešením byste se dobrali odpovědi. Explicitně ji řešit nemusíte.

(c) Uvažujme populaci zajíců (kořisti) $x(t)$ a lišek (predátoři) $y(t)$. Uvažujme čísla α a $\gamma > 0$. Číslo α vyjadřuje míru s jakou by prosperovali zající, kdyby nebyly žádné lišky. Podobně číslo γ vyjadřuje míru s jakou by vymíraly lišky, kdyby neměly žádné zajíce k jídlu. Uvažujme další parametry β a $\delta > 0$. Parametr β vyjadřuje míru úspěšnosti odlovu zajíců liškami. Nakonec δ vyjadřuje poměr s jakým prosperují lišky díky přítomnosti dostatku zajíců. Sestavte systém rovnic popisují právě popsanou dynamiku, tzv. Lotka–Volterrův model dravec-kořist.

(d) Z klidu puštěná kulička hmotnosti m padá vzduchem dolů působením gravitace s konstantním zrychlením g. Určete její rychlost $v(t)$, je-li odpor vzduchu (i) $kv(t)$ či (ii) $kv^2(t)$, kde k je jistá kladná konstanta.
Pozn.: (i) je rozumná v situaci, kdy je rychlost malá a (ii) pro případ velkých rychlostí.

Výsledky - I. Opakování

Příklad 1. (Rovnice s konstantními koeficienty) A, B, C, $D \in \mathbb{R}$.

(a) $x(t) = Ae^t + B\cos 2t + C\sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) $x(t) = Ae^t + Be^{-t} + Cte^{-t} + Dt^2e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(c) $x(t) = e^{-t}(2\sin t + \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(d) Obecné řešení je $x(t) = Ae^t + Be^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$. Aby bylo nenulové, tak musí být buď $AB = 0$ (tj. $A = 0$ a $B \neq 0$ či naopak), nebo $AB > 0$.

(e) $x_h(t) = Ae^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2} + Be^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}$ a $x_p(t) = \frac{1}{13}e^t(3\sin t + 2\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(f) $x_h(t) = A + Bt + Ce^{-t}$ a $x_p(t) = \left(\frac{1}{20}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{2}{3}t - 2\right)t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 2. (Soustavy s konstantními koeficienty) A, B, $C \in \mathbb{R}$.

(a) Úpravami dospějeme k rovnici $x''' - x'' - 5x' - 3x = 0$, tedy $x(t) = Ae^{3t} + Be^{-t} + Cte^{-t}$. Zbylé hledané funkce dostaneme přímo z rovnic získaných během výpočtu, získáme $y(t) = \frac{2}{3}Ae^{3t} + Be^{-t} + Cte^{-t}$ a $z(t) = -\frac{2}{3}Ae^{3t} - \frac{1}{4}(2B + C + 2Ct)e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) Úpravami dospějeme k rovnici $x'' - 2x' + x = -2\cos t$, tedy $x(t) = Ae^t + Bte^t + \sin t$. Funkci y spočteme jako řešení rovnice $y' + y = \sin t - 3\cos t - x + 3x'$, tedy $y(t) = Ce^{-t} + (2A + B + 2Bt)e^t$. Poslední funkci získáme dosazením do zbylé rovnice, dostaneme $z(t) = Ce^{-t} + (A + 2B + Bt)e^t - 2\sin t$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 3. (Separace proměnných)

(a) $x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -c \\ \pm\sqrt{(t+c)^3} & , \quad t \geq -c \end{cases}$, kde $c \in \mathbb{R}^*$.

(b) Řešením jsou funkce $x \equiv -1$, $x \equiv 1$ a $x(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \geq \frac{\pi}{2} - c \\ \sin(t+c) & , \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right) \\ -1 & , \quad t \leq -\frac{\pi}{2} - c \end{cases}$, $c \in \mathbb{R}$.

(c) Řešením je funkce $x(t) = \log(\sin t + c)$, $c > -1$. Má smysl pro $t \in \mathbb{R}$ je-li $c > 1$ a pro $t \in \left(-\arcsin c + 2k\pi, -\arcsin c + (2k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, je-li $-1 < c \leq 1$.

(d) Řešením jsou $x \equiv 0$, $x \equiv 1$ (na $\mathbb{R}$) a $x(t) = \frac{1}{1+ct}$, $c \neq 0$, která má smysl na $t < -\frac{1}{c}$ a $t > -\frac{1}{c}$.

Příklad 4. (Integrační faktor)

(a) $x(t) = e^{-t}(c - \cos t)$ pro $t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

(b) $x(t) = \begin{cases} t^3(t + c_1), & t < 0 \\ t^3(t + c_2), & t \geq 0 \end{cases}$, kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(c) $x(t) = ce^{-\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x}$ pro $x < 0$ a $x > 0$ s nějakou reálnou konstantou c, V počátku není možné řešení napojit, protože jednostranné limity jsou nekonečné.

(d) $x(t) = \frac{1}{1+\log t}$ pro $t > \frac{1}{e}$. Spadá mezi tzv. Bernoulliho rovnice; zde se hodí vynásobit danou rovnici $-\frac{1}{tx^2}$, spoočítat ODR pro funkci $y = \frac{1}{x}$ a dosadit zpět.

Příklad 5. (Aplikace)

(a) V čase $t = \frac{1}{k}\log\frac{1}{2}$, kde $k = \frac{1}{300}\log\frac{3}{4}$ je koeficient přenosu tepla (tj. ona přímá úměra v zadání).

(b) Označíme-li $m(t)$ množství soli v nádrži v čase t (v hodinách), tak má rovnice tvar

$$m'(t) = 9\mu(t) - \frac{6m(t)}{600 + 3t},$$
$$m(0) = 5.$$

Rovnice se dá vyřešit pomocí integračního faktoru. Zajímá nás hodnota $m(300)$.

(c) Hledaný systém má tvar

$$x' = \alpha x - \beta xy,$$
$$y' = -\gamma y + \delta xy.$$

(d) Řešením v části (i) je funkce $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$ a v části (ii) máme $v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh t\sqrt{\frac{kg}{m}}$.