III. Nelineární systémy

Příklad 1. (Hledání řešení) Najděte obecná řešení následujících soustav:

(a) $x' = x^2 y$, $y' = xy^2$. [Viz ilustrační příklad ze sb.]

(b) $x' = \frac{x^2}{y}$, $y' = x$ pro $x, y > 0$. [Viz př. 3 ze sb.]

(c) $x' = \frac{x}{x^2+y^2}$, $y' = \frac{2y}{x^2+y^2}$ pro $x, y > 0$.

$[y(t) = -\frac{1}{A} + \sqrt{\frac{1}{A^2} + 4t + 4B}$, $x(t) = \sqrt{-\frac{1}{A^2} + \frac{1}{A}\sqrt{\frac{1}{A^2} + 4t + 4B}}$, $A > 0$, $B \in \mathbb{R}$ a $t > -B - \frac{1}{4A^2}$.]

(d) $x' = y^2$, $y' = yz$, $z' = -z^2$ pro $y, z > 0$.

$[z(t) = \frac{1}{t+A}$, $y(t) = k(t + A)$, $x(t) = \frac{B}{3}t^3 + ABt^2 + ABt + C$, $A, C \in \mathbb{R}$, $B > 0$ a $t > -A$.]

Příklad 2. (Polární souřadnice) Najděte obecná řešení následujících soustav:

(a) $x' = x^2 y$, $y' = xy^2$. [Viz př. 17 ze sb.]

(b) $x' = -y + x(x^2 + y^2 - 1)$, $y' = x + y(x^2 + y^2 - 1)$. [Viz př. 19 ze sb.]

Příklad 3. (Náčrtky trajektorií) Načrtněte trajektorie následujících soustav:

(a) $r' = r(1 - r)$, $\varphi' = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, není třeba hledat první integrál.

[Poloměry spirál se postupně buďto zmenšují či zvětšují k poloměru 1. Kružnice o poloměru 1 se zachovává. Řešení probíhají proti směru hodinových ručiček.]

(b) $x' = 2x^2 + 2xy$, $y' = 3x + 3y$.

[Vyjde $V(x, y) = 2y - 3\log|x|$. Vše utíká od stacionárních bodů ležících na $y = -x$ po logaritmických drahách.]

(c) $x' = 2xy$, $y' = 2y(x + y)$ pro $x > 0$.

[První integrál je $V(x, y) = \frac{y - x\log x}{x}$. V prvním kvadrantu řešení od stacionárních bodů po nalezené křvce do nekonečna. Ve zbývajícím kvadrantu utíkají řešení také, směrem dolů, narazí na přímku $y = -x$, kde přestanou směřovat dolů a začnou stoupat k počátku.]

Příklad 4. (Kombinace)

(a) Uvažujte systém $x' = xy$, $y' = \frac{xy^2}{x+1}$ pro $x > 0$.

  (i) Najděte první integrál a znázorněte trajektorie řešení.
  (ii) Vyřešte soustavu pro $x(0) = 1$ a $y(0) = 2$.
  (iii) Rozhodněte zda a kdy dochází k „blow-upu“.
  [Najdeme $V(x, y) = \frac{x+1}{|y|}$. Vyjde $x(t) = \frac{e^t}{2-e^t}$, $y(t) = \frac{2}{2-e^t}$. Dojde k němu tedy v $t = \log 2$.]

(b) Uvažujte systém $x' = x + y$, $y' = x^2 - y^2$.

  (i) Najděte první integrál.
  (ii) Znázorněte trajektorie řešení v rovině (x, y).
  (iii) Může nastat „blow-up“ pro x?
  [Najdeme $V(x, y) = e^x(y - x + 1)$. Posunuté exponenciály lepící se k $y = x - 1$. Nenastane.]

(c) Uvažujte systém $x' = kx - axy$, $y' = -ly + bxy$ pro $a, b, k, l, x(0), y(0) > 0$. [Viz př. 12 ze sb.]

  (i) Dokažte, že řešení zůstanou kladná po celou dobu existence.
  (ii) Najděte první integrál soustavy.
  (iii) Nakreslete průběhy různých řešení.

(d) Uvažujte rovnici $x'' + 2x^3 = 0$. [Viz př. 23 ze sb.]

  (i) Najděte první integrál.
  (ii) Načrtněte řešení.
  (iii) Najděte vzorec pro periodu.