

II. Elementární kvalitativní analýza

Příklad 1. (Autonomní rovnice) Vyšetřete průběh řešení následujících rovnic:

- (a) $x' = \frac{1}{x}(x+1)(x+2)$. [Viz př. 1 ze sb.]
- (b) $x' = x \log(x+3)$. [Viz př. 3 ze sb.]
- (c) $x' = \sqrt[3]{1-x^2}$. [Viz ilustrační příklad ze sb.]
- (d) $\sqrt{x+1} x' = e^x - 1$. [Viz ilustrační příklad ze sb.]

Příklad 2. (Neautonomní rovnice) Vyšetřete průběh řešení následujících rovnic:

- (a) $x' = tx(x-2)$. [Viz ilustrační příklad ze sb.]
- (b) $x' = 2tx - 2$. [Viz př. 20 ze sb.]

Příklad 3. (Barrow) Odpovězte na následující otázky:

- (a) Uvažujme $x(t)$ řešení rovnice $x' = (x+1)(x+2)$ splňující $x(0) = 1$. Kdy nabývalo hodnoty 0? Kdy nastane „blow-up“? [V $\log \frac{3}{4}$ a v $\log \frac{3}{2}$.]
- (b) Kolik času potřebuje řešení rovnice $x' = x\sqrt{2-x}$ k vystoupení z 0 na 2? [Nenastane.]
- (c) Řešení $x(t)$ rovnice $x' = \frac{x+1}{t+1}$ splňuje $x(1) = 2$. Za jak dlouho bude mít hodnotu 4? [Za $\frac{4}{3}$.]
- (d) Řešení $x(t)$ rovnice $x' = t \log x$ splňuje $x(1) = 1$. Za jak dlouho bude mít hodnotu 2? [Nenastane.]
- (e) Řešení $x(t)$ rovnice $x' = (t+4)x^2$ splňuje $x(1) = 1$. Kdy nastane „blow-up“? [V $\sqrt{27} - 4$.]

Příklad 4. (Teoretické úlohy) Uvažujme $x'(t) = f(x(t))$ a nějaké její řešení $x(t)$ na intervalu I .

- (a) Funkce $x(t+c)$ je také řešení na $I-c$ (tj. posunutý interval).
- (b) Bud' $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c \in \mathbb{R}$ a f je spojitá v c . Pak je $f(c) = 0$. [Hint: Sporem a Leibnizova formule.]
- (c) Ukažte, že $x(t)$ je monotónní. [Hint: Sporem a ukažte, že $x'(t_0) \neq x'(t_1)$ pro $x(t_0) = x(t_1)$.]