

V. Maticová exponenciála

Příklad 1. Pro danou matici $\mathbb{A}$ vyřešte soustavu $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$.

(i) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$. [Př. 12 ve sb.]

(ii) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. [Př. 16 ve sb.]

(iii) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. [Př. 15 ve sb.]

(iv) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, ukažte, že $\mathbb{A}^3 = 0$. [Př. 18 ve sb.]

(v) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(vi) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(vii) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 8 \\ -3 & -3 & 4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, pro jaká $\mathbf{x}(0)$ jsou řešení omezená na $\mathbb{R}$? [Pro $\mathbf{x}(0) = (a, -a, 0)^\top$, $a \in \mathbb{R}$.]

(viii) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 2. Bez přechodu na Jordanův tvar vyřešte soustavu

$$\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Do roviny (x, y) načrtněte chování řešení pro $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ a $\alpha > 0$. [Př. 21 ve sb.]

Příklad 3. Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Charakterizujte $\sigma(\mathbb{A}) < 0$ pomocí $\det \mathbb{A}$ a $\operatorname{tr} \mathbb{A}$. [$\Leftrightarrow \det \mathbb{A} > 0$ a $\operatorname{tr} \mathbb{A} < 0$.]

Příklad 4. Dokažte větu o obrazu spektra, tj. $\sigma(e^{\mathbb{A}}) = \{e^\lambda; \lambda \in \sigma(\mathbb{A})\}$. [Př. 1(b) ve sb.]

Příklad 5. Existuje $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ taková, že $e^{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$ pro nějaká $\alpha, \beta > 0$? [Ano pouze pro $\alpha = \beta$.]