

IV. Derivování řešící funkce

Příklad 1. Bud' $\varphi(t, x_0)$ řešící funkce rovnice

$$\begin{aligned}x' &= e^{2x} - e, \\x(0) &= x_0,\end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(t, \frac{1}{2})$, $\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\varphi(t, \frac{1}{2})$ a napište přibližnou hodnotu $x(2)$ pro $x_0 = \frac{3}{4}$. [Př. 4 ze sb.]

Příklad 2. Bud' $\varphi(t, x_0, \lambda)$ řešící funkce rovnice

$$\begin{aligned}x' &= \tan x - \lambda(x - \pi)^2, \\x(0) &= x_0,\end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(t, \pi, 1)$, $\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\varphi(t, \pi, 1)$ a napište aproximaci pro $\varphi(t, \pi + h, 1)$.
[Vyjde e^t , $2e^t(1 - e^t)$ a $\pi + he^t + h^2e^t(1 - e^t) + o(h^2)$, $h \rightarrow 0$.]

Příklad 3. Bud' $\varphi(t, \lambda)$ řešící funkce rovnice

$$\begin{aligned}x' &= \lambda(1 - t) + x - x^2, \\x(0) &= 0,\end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi(t, 0)$ a $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\varphi(t, 0)$. [Př. 14 ze sb.]

Příklad 4. Bud' $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ řešící funkce rovnice

$$\begin{aligned}x' &= \lambda x + te^\lambda, \\x(t_0) &= x_0.\end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial \lambda}\varphi(t, 0, 0, 1)$ a $\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial x_0}\varphi(t, 0, 0, 1)$. [Př. 23 ze sb.]

Příklad 5. Bud' $\varphi(t, x_0, \lambda)$ řešící funkce rovnice

$$\begin{aligned}x' &= \lambda x^2 + t\lambda, \\x(0) &= x_0,\end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi(t, 1, 0)$ a $\frac{\partial^2}{\partial x_0}\varphi(t, 1, 0)$. Vypočtěte přibližnou hodnotu $x(2)$ pro řešení $x' = \frac{3}{10}x^2 + t$, $x(0) = \frac{11}{10}$.
[Vyjde 1 , $\frac{1}{6}t^3 + t$ a $x(2) \approx \frac{41}{10}$. Pozn.: $\varphi(t, 1, 0) = \frac{1}{2}t^2 + 1$.]

Příklad 6. Bud' $\varphi(t, a, b)$ řešící funkce rovnice

$$\begin{aligned}x'' &= x + 3 \sin x, \\x(0) &= a, \\x'(0) &= b.\end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial}{\partial a}\varphi(t, 0, 0)$ a $\frac{\partial}{\partial b}\varphi(t, 0, 0)$. [Př. 16 ze sb.]

Příklad 7. Bud' $\varphi(t, a, b)$ řešící funkce rovnice

$$\begin{aligned}x'' &= ax - x^2, \\x(0) &= 1, \\x'(0) &= b.\end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial}{\partial a}\varphi(t, 1, 0)$ a $\frac{\partial}{\partial b}\varphi(t, 1, 0)$. [Př. 15 ze sb.]

Příklad 8. Bud' $\Phi(t, a, b)$ řešící funkce soustavy

$$\begin{aligned}x' &= 3x^2 + xy^2, & x(0) &= a, \\y' &= 2x + 3y, & y(0) &= b.\end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial}{\partial a}\Phi(t, 0, 0)$, $\frac{\partial}{\partial b}\Phi(t, 0, 0)$, $\frac{\partial^2}{\partial a^2}\Phi(t, 0, 0)$.
[První složka Φ vyjde postupně 1 , 0 , $6t$ a druhá $\frac{2}{3}(e^{3t} - 1)$, e^{3t} , $\frac{2}{3}(e^{3t} - 1) - 2t$.]

Příklad 9. Bud' $\Phi(t, t_0, a, b)$ řešící funkce soustavy

$$\begin{aligned}x' &= xy, & x(t_0) &= a, \\y' &= -\frac{y}{x}, & y(t_0) &= b.\end{aligned}$$

Najděte $\frac{\partial^2}{\partial a \partial b}\Phi(t, 1, 1, 1)$. [Př. 28 ze sb.]