

IV. Primitivní funkce

Shrnutí teorie. Z přednášky víme, že ke spojitě funkci f , definované na neprázdném otevřeném intervalu I , existuje tzv. *primitivní funkce* F , tj. funkce splňující $F'(x) = f(x)$ na celém I . Dále víme, že je-li F primitivní funkce k f , tak potom i $F + c$ je primitivní funkce pro každé $c \in \mathbb{R}$. Množinu všech primitivních funkcí k f značíme symbolem $\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x)$.

Operace *integrování*, tj. hledání primitivní funkce, je lineární vůči sčítání funkcí a násobení číslem, tj. pro f, g spojitě na tomto intervalu a $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx, x \in I.$$

Tvrzení. (Integrace per partes) Bud' F, G primitivní funkce ke spojitým funkcím f, g na neprázdném otevřeném intervalu I . Potom platí

$$\int F(x)g(x) dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) dx \text{ na } I.$$

Tvrzení. (1. věta o substituci) Bud' F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) a ať je φ diferencovatelná funkce na (α, β) . Je-li $\mathcal{H}_\varphi \subset (a, b)$, tak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)) \text{ pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Tvrzení. (2. věta o substituci) Bud' φ ryze monotónní funkce zobrazující (α, β) na (a, b) a φ' je spojitá na (α, β) . Bud' dále f definovaná na (a, b) splňující pro $t \in (\alpha, \beta)$ vztah

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t).$$

Potom pro $x \in (a, b)$ platí, že

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)).$$

Poznámka. (Rozklad na parciální zlomky) Je-li f racionální funkce (tj. podíl polynomů), tak ji dovedeme rozložit na konečný součet jednodušších racionálních funkcí. Tyto jednotlivé zlomky dovedeme vždy integrovat a dohromady získat primitivní funkci k f .

Poznámka. (Kuchařkové substitute) Bud' $R(u, v)$ racionální funkce proměnných u, v . Chceme $\int f(x) dx$.

(i) Je-li $f(x) = R(1, e^{\alpha x})$ pro $\alpha \neq 0$, pak lze použít substituci $t = e^{\alpha x}$.

(ii) Je-li $f(x) = \frac{1}{x} R(1, \log x)$, pak lze použít substituci $t = \log x$.

(iii) Je-li $f(x) = R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ pro $ad \neq bc$, $n > 1$, pak lze použít substituci ve tvaru $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

(iv) Je-li $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, $a \neq 0$ a D diskriminant $ax^2 + bx + c$, tak máme podpřípady:

1. Je-li $D < 0$ a $a < 0$, tak to nedává smysl.

2. Je-li $D < 0$ a $a > 0$, tak lze užít $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$. (Také $\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{ax} + t$.)

3. Je-li $D > 0$ a $a > 0$, tak máme možnosti:

– Lze opět užít $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$.

– Napišme $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, pak funguje $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1)$.

4. Je-li $D > 0$ a $a < 0$, tak převedeme na (iii) pomocí $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = (x - x_2)\sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}}$.

(v) Je-li $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, pak lze vždy použít $t = \tan \frac{x}{2}$ (a také $t = \cot \frac{x}{2}$).

Zde se mohou vyskytnout ještě speciální podpřípady:

1. Je-li $R(u, -v) = -R(u, v)$, pak lze užít $t = \sin x$.

2. Je-li $R(-u, v) = -R(u, v)$, pak lze užít $t = \cos x$.

3. Je-li $R(-u, -v) = R(u, v)$, pak lze užít $t = \tan x$ (a také $t = \cot x$).

Tvrzení. (O určitém integrálu) Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$. Bud' F primitivní funkce k f na (a, b) , pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b := \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Příklad 1. (Kouknu a vidím) Spočtěte následující integrály.

- | | | |
|---|--|------------------------------------|
| (a) $\int \sin^2 x + \cos^2 x.$ | (f) $\int (x+1)^2 + \cos \frac{x}{2} + \frac{7}{x}.$ | (k) $\int \frac{x^3}{x^4+1}.$ |
| (b) $\int 5x^7 + \frac{9}{x^2}.$ | (g) $\int (2-x)^4 - \frac{1}{1+x^2}.$ | (l) $\int \frac{1}{\cos^2(2x+1)}.$ |
| (c) $\int \sqrt{x} + e^{2x}.$ | (h) $\int \frac{x^3+4x+1}{2\sqrt{x}}.$ | (m) $\int \sin^2 x.$ |
| (d) $\int 2 \sin 3x + e^{-x} + 4.$ | (i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}.$ | (n) $\int \tan 5x.$ |
| (e) $\int x^{\frac{1}{5}} - \frac{2}{x^3}.$ | (j) $\int \frac{6}{1+9x^2}.$ | (o) $\int \frac{1}{1-x^2}.$ |

Příklad 2. (Integrace per partes) Spočtěte následující integrály.

- | | | |
|------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| (a) $\int 2xe^{-x}.$ | (e) $\int (x^2+1)e^{3x}.$ | (i) $\int xe^x \cos x.$ |
| (b) $\int x \sin x.$ | (f) $\int x^2 \log x.$ | (j) $\int \frac{x}{\cos^2 4x}.$ |
| (c) $\int \log x.$ | (g) $\int \arcsin x.$ | (k) $\int x^2 \sin^2 x.$ |
| (d) $\int e^x \cos x.$ | (h) $\int \sqrt{x} \log^2 x.$ | (l) $\int \sin(\log 2x).$ |

Příklad 3. (Substituce) Spočtěte následující integrály.

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|---|
| (a) $\int (3x-2)^6.$ | (f) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}.$ | (k) $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}.$ |
| (b) $\int \sin(2x+1).$ | (g) $\int -\frac{1}{\sqrt{8-3x^2}}.$ | (l) $\int \frac{\log^2 x}{x}.$ |
| (c) $\int \sqrt{4x-1}.$ | (h) $\int 3xe^{-x^2}.$ | (m) $\int \frac{1}{(1+x^2) \arctan^3 x}.$ |
| (d) $\int \frac{1}{2x+1}.$ | (i) $\int \cos^4 x \cdot \sin x.$ | (n) $\int \cos^3 x.$ |
| (e) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}.$ | (j) $\int \frac{e^x}{3+e^x}.$ | (o) $\int \frac{x}{2+x^4}.$ |

Příklad 4. (Mišmaš) Spočtěte následující integrály.

- | | | |
|---|--|---|
| (a) $\int \frac{x}{1-x^2}.$ | (i) $\int \sqrt{1-4x^2}.$ | (q) $\int \log(x + \sqrt{1+x^2}).$ |
| (b) $\int \frac{1}{x^6} \sin \frac{1}{x^5}.$ | (j) $\int \frac{\sin^3 x}{2-\cos x}.$ | (r) $\int \frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}.$ |
| (c) $\int x^3 \log 2x.$ | (k) $\int x^3 \cos x.$ | (s) $\int \arcsin^2 x.$ |
| (d) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}}.$ | (l) $\int \frac{1}{5+2x^2}.$ | (t) $\int \log^2 x + \log x^2.$ |
| (e) $\int x^5 e^{-x^2}.$ | (m) $\int x^2 \arccos x.$ | (u) $\int e^{2x} \arctan e^x.$ |
| (f) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}.$ | (n) $\int \frac{1+e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$ | (v) $\int \cot^5 x.$ |
| (g) $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x.$ | (o) $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}.$ | (w) $\int \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$ |
| (h) $\int \sin(e^x) \cdot \cos(2e^x) \cdot e^x.$ | (p) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}.$ | (x) $\int \cos \sqrt{x}.$ |

Příklad 5. (Parciální zlomky) Spočtěte následující integrály.

- | | | |
|--------------------------------------|--|--|
| (a) $\int \frac{2x+1}{(x+1)(2x+3)}.$ | (e) $\int \frac{x^4}{x^4+2x^2-3}.$ | (i) $\int \frac{x^4}{x^2-x+2}.$ |
| (b) $\int \frac{x-1}{x(x+1)^3}.$ | (f) $\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$ | (j) $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}.$ |
| (c) $\int \frac{x^{15}-3}{x-1}.$ | (g) $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}.$ | (k) $\int \frac{x^2+2x-2}{(2x+1)(x^2+x+1)^2}.$ |
| (d) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}.$ | (h) $\int \frac{x}{x^3+1}.$ | (l) $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}.$ |

Příklad 6. (Kuchařkové substituce - trigonometrické) Spočtěte následující integrály.

- | | |
|--|--|
| (a) $\int \frac{1}{\sin x}.$ | (i) $\int \frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x} \operatorname{na} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$ |
| (b) $\int \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan x}.$ | (j) $\int \frac{1}{3 \cos^2 x + \sin 2x + 1} \operatorname{na} \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right).$ |
| (c) $\int \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x}.$ | (k) $\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} \operatorname{na} (\pi, 3\pi).$ |
| (d) $\int \frac{1}{2 - \cos x} \operatorname{na} (-\pi, \pi).$ | (l) $\int \frac{1}{\cos x \cdot \sin^3 x}.$ |
| (e) $\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} \operatorname{na} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$ | (m) $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \operatorname{na} (-\pi, \pi).$ |
| (f) $\int \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} \operatorname{na} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right).$ | (n) $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} \operatorname{na} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right).$ |
| (g) $\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x}.$ | (o) $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} \operatorname{na} (-\pi, \pi).$ |
| (h) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \operatorname{na} \left(0, \frac{\pi}{2} \right).$ | (p) $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^3 x}.$ |

Příklad 7. (Kuchařkové substituce - ostatní) Spočtěte následující integrály.

- | | | | |
|---|---|--|--|
| (a) $\int \frac{\log x}{x - x \log x}.$ | (f) $\int \frac{e^{3x} - e^x + 1}{e^x + 1}.$ | (k) $\int \frac{1}{x(\log^3 x - 1)}.$ | (p) $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt[3]{x+1}}.$ |
| (b) $\int \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2}.$ | (g) $\int \frac{1}{x \log x \cdot \log(\log x)}.$ | (l) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}.$ | (q) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}.$ |
| (c) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}.$ | (h) $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}}.$ | (m) $\int \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 2x}.$ | (r) $\int \frac{1}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}}.$ |
| (d) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}.$ | (i) $\int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[6]{x^5}}.$ | (n) $\int \frac{1}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}.$ | (s) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$ |
| (e) $\int \frac{\sqrt{2x+3} + x}{\sqrt{2x+3} - x}.$ | (j) $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$ | (o) $\int \frac{e^{4x} + e^{2x}}{e^{3x} - 1}.$ | (t) $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$ |

Příklad 8. (Určité integrály) Spočtěte následující určité integrály.

- | | | |
|--------------------------------------|--|--|
| (a) $\int_{-3}^7 x^3 - 2x + 1.$ | (g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x.$ | (m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}.$ |
| (b) $\int_0^3 1 - x .$ | (h) $\int_0^{\log 4} x e^{-x}.$ | (n) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}.$ |
| (c) $\int_0^{2\pi} 2 \sin^2 x.$ | (i) $\int_0^{10\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}.$ | (o) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$ |
| (d) $\int_{\frac{e}{e}}^e \log x .$ | (j) $\int_0^1 x^{15} \sqrt{1 + 3x^8}.$ | (p) $\int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{\sin^4 x + \cos^2 x}.$ |
| (e) $\int_0^\pi x^2 \cos^2 x.$ | (k) $\int_{-2}^2 \frac{1}{1 + \sqrt{x+2}}.$ | (q) $\int_{-\frac{11\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{2 + \sin^2 x}.$ |
| (f) $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x.$ | (l) $\int_1^e \frac{\log^2 x}{x(\log x + 1)^3}.$ | (r) $\int_{-1}^1 \frac{e^{4x} + 4e^{3x} - e^{2x} - 2e^x}{(e^{2x} + 1)(2e^{2x} + 3e^x + 1)}.$ |

Příklad 9. (Zkouškové) Spočtěte následující integrály.

- | | |
|---|--|
| (a) $\int_0^1 \frac{1 + 2e^x + e^{3x}}{e^{3x} + e^x}.$ | (g) $\int \frac{1}{\cos^2 x (\cos^2 x + \sin 2x + 1)} \operatorname{na} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$ |
| (b) $\int x \arctan \frac{x+1}{x+2}.$ | (h) $\int \frac{2 \sin x - \cos x}{\cos^3 x + \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x} \operatorname{na} \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right).$ |
| (c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x}{1 + 3 \sin^2 x}.$ | (i) $\int \frac{x^2 + x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}.$ |
| (d) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + x}.$ | (j) $\int \frac{4x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2}{x(2x^2 + x + 1)}.$ |
| (e) $\int (x + 2) \log(x^4 - 1).$ | (k) $\int \frac{x}{2 + \sqrt{1+x}}.$ |
| (f) $\int \frac{-5 \cdot 8^x + 5 \cdot 4^{x+1} + 3 \cdot 2^{x+2}}{(4^x - 1 - 1)^2}.$ | (l) $\int_0^{4\pi} \frac{1}{2 + \sin x}.$ |

Výsledky - IV. Primitivní funkce

Není-li řečeno jinak, tak jsou výsledky uvedeny až na konstantu.

Příklad 1. (Kouknu a vidím)

- (a) $x, x \in \mathbb{R}$.
- (b) $\frac{5}{8}x^8 - \frac{9}{x}, x < 0$ nebo $x > 0$.
- (c) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}e^{2x}, x > 0$.
- (d) $-\frac{2}{3}\cos 3x - e^{-x} + 4x, x \in \mathbb{R}$.
- (e) $\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + \frac{1}{x^2}, x \in (-\infty, 0), (0, +\infty)$.
- (f) $\frac{1}{3}(x+1)^3 + 2\sin \frac{x}{2} + 7\log|x|, x \in (-\infty, 0), (0, +\infty)$.
- (g) $\frac{1}{5}(x-2)^5 + \operatorname{arccot} x, x \in \mathbb{R}$.
- (h) $\frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}, x > 0$.
- (i) $\frac{1}{2}\arcsin 2x, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- (j) $2\arctan 3x, x \in \mathbb{R}$.
- (k) $\frac{1}{4}\log(1+x^4), x \in \mathbb{R}$.
- (l) $\frac{1}{2}\tan(2x+1) + c_k, x \in \left(-\frac{\pi}{4} - 1 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} - 1 + k\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$.
- (m) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x, x \in \mathbb{R}$.
- (n) $-\frac{1}{5}\log|\cos 5x| + c_k, x \in \left(-\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}\right), k \in \mathbb{Z}$.
- (o) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{x-1}\right|, x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$.

Příklad 2. (Integrace per partes)

- (a) $-2(x+1)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.
- (b) $\sin x - x\cos x, x \in \mathbb{R}$.
- (c) $x\log x - x, x > 0$.
- (d) $\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x, x \in \mathbb{R}$.
- (e) $\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{11}{27}\right)e^{3x}, \in \mathbb{R}$.
- (f) $\frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{9}x^3, x > 0$.
- (g) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}, x \in (-1, 1)$.
- (h) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\log x + \frac{16}{27}x^{\frac{3}{2}}, x > 0$.
- (i) $\frac{x}{2}e^x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}e^x\sin x, x \in \mathbb{R}$.
- (j) $\frac{1}{4}x\tan 4x + \frac{1}{16}\log|\cos 4x| + c_k, x \in \left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}$.
- (k) $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1-2x^2}{8}\sin 2x, x \in \mathbb{R}$.
- (l) $\frac{1}{2}x\sin(\log 2x) - \frac{1}{2}x\cos(\log 2x), x > 0$.

Příklad 3. (Substituce)

- (a) $\frac{1}{21}(3x-2)^6, x \in \mathbb{R}$.
- (b) $-\frac{1}{2}\cos(2x+1), x \in \mathbb{R}$.
- (c) $\frac{1}{6}\sqrt{(4x-1)^3}, x > \frac{1}{4}$.
- (d) $\frac{1}{2}\log|2x+1|, x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

- (e) $\arctan(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (f) $-\frac{1}{2(x^2+1)}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (g) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x$, $-2\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.
- (h) $-\frac{3}{2}e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (i) $-\frac{1}{5}\cos^5 x$, $x \in \mathbb{R}$.
- (j) $\log(3+e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (k) $-\log(2+\cos x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (l) $\frac{1}{3}\log^3 x$, $x > 0$.
- (m) $-\frac{1}{2\arctan^2 x}$, $x \in (-\infty, 0), (0, +\infty)$.
- (n) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$, $x \in \mathbb{R}$.
- (o) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2}{\sqrt{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 4. (Mišmaš)

- (a) $-\frac{1}{2}\log|1-x^2|$, $x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$.
- (b) $\frac{1}{5}\cos \frac{1}{x^5}$.
- (c) $\frac{1}{4}x^4 \log 2x - \frac{1}{16}x^4$.
- (d) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$.
- (e) $(-\frac{1}{2}x^4 - x^2 - 1)e^{-x^2}$.
- (f) $2\arctan \sqrt{x}$.
- (g) $-\frac{1}{9}\cos^9 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$, $x \in \mathbb{R}$.
- (h) $\cos(e^x) - \frac{2}{3}\cos^3(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (i) $\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{4}\arcsin 2x$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- (j) $-3\log(2-\cos x) - 2\cos x - \frac{1}{2}\cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.
- (k) $x^3 \sin x - 3x^2 \cos x - 6x \sin x + 6 \cos x$.
- (l) $\frac{1}{\sqrt{10}} \arctan \sqrt{\frac{2}{5}}x$.
- (m) $\frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$.
- (n) $\sqrt{1+e^{2x}} + \frac{1}{2}\log \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}$.
- (o) $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}}x$.
- (p) $\frac{1}{4}\arcsin^4 x$.
- (q) $x \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.
- (r) $\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+\log x}$.
- (s) $x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$.
- (t) $x \log^2 x$, $x > 0$.
- (u) $\frac{e^{2x}+1}{2} \arctan e^x - \frac{1}{2}e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- (v) $\log(\sin x) + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4\sin^4 x}$, $x \in (k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- (w) $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

(x) $2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x}, x > 0.$

Příklad 5. (Parciální zlomky)

(a)

$$\int \frac{4}{2x+3} - \frac{1}{x+1} = 2 \log |2x+3| - \log |x+1|.$$

(b)

$$\int -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3} = \log \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

(c)

$$\int -\frac{2}{x-1} + \sum_{k=0}^{14} x^k = -2 \log |x-1| + \sum_{k=0}^{14} \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

(d)

$$\int 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{x^2+4} = x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2}.$$

(e)

$$\int 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{x^2+3} = x + \frac{1}{8} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{3\sqrt{3}}{4} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

(f)

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-4x+5} = -\frac{1}{x-2} - \arctan(x-2).$$

(g)

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} = \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2}.$$

(h)

$$\frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{3} \log |x+1| + \frac{1}{6} \log(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

(i)

$$\int x^2 + x - 1 + \frac{2-3x}{x^2-x+2} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \log(x^2-x+2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{7}}.$$

(j)

$$\frac{1}{2} \int \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{1}{4} \log \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right).$$

(k)

$$\begin{aligned} \int -\frac{44}{9} \cdot \frac{1}{2x+1} + \frac{11}{9} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7x+5}{(x^2+x+1)^2} \\ = -\frac{22}{9} \log |2x+1| + \frac{11}{9} \log(x^2+x+1) + \frac{1}{3} \cdot \frac{x-3}{x^2+x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(l)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{-x+1}{x^2-x+1} + \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{-x+1}{(x^2-x+1)^2} \\ = \frac{1}{8} \log \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x^2+1}{x^4+x^2+1} + \frac{5}{12\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Příklad 6. (Kuchařkové substituce - trigonometrické)

(a) $\log |\tan \frac{x}{2}|, x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}.$

(b) $\log |1 + \tan x|, x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi \right), \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}.$

- (c) $\frac{1}{2} \sin^2 x + 2 \sin x + 3 \log(2 - \sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (d) $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan \frac{x}{2})$, $x \in (-\pi, \pi)$.
- (e) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (f) $2\sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2} \tan x - 1) - \arctan(\sqrt{2} \tan x + 1))$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.
- (g) $\cos x - \frac{5}{2} \arctan(\frac{1}{2} \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (h) $x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Funguje přímo i na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (i) $\frac{4}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan x) - x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (j) $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan x + 1}{\sqrt{3}}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$.
- (k) $\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(3 \tan \frac{x}{2} + 1)\right)$, $x \in (\pi, 3\pi)$.
- (l) $\log |\tan x| - \frac{1}{2 \sin^2 x}$, $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$. Substitute nadvakrát.
- (m) $x + \frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}}$, $x \in (-\pi, \pi)$. Substitute nadvakrát.
- (n) $\frac{1}{2} \log |\tan x - 1| - \frac{1}{4} \log(\tan^2 x + 1) + \frac{1}{2}x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Kdyby na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tak nutno nadvakrát.
- (o) $\log(3 + \tan^2 \frac{x}{2}) - \log(1 + \tan^2 \frac{x}{2}) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2})$, $x \in (-\pi, \pi)$.
- (p) $\frac{1}{6} \log |\sin^2 - \sin x + 1| - \frac{1}{3} \log(1 + \sin x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2 \sin x - 1)\right)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 7. (Kuchařkové substituce - ostatní)

- (a) $-\log x - \log |\log x - 1|$.
- (b) $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \log |e^x - 1| + \frac{1}{6} \log(e^x + 2)$.
- (c) $\frac{1}{5}(x + 2) \sqrt[3]{(3x + 1)^2}$.
- (d) $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \log(1 + \sqrt[4]{x})$.
- (e) $-x - 4\sqrt{2x + 3} - 9 \log |\sqrt{2x + 3} - 3| + \log(\sqrt{2x + 3} + 1)$.
- (f) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x - \log(e^x + 1)$.
- (g) $\log |\log(\log x)|$.
- (h) $-\frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}$, $x \in (-\infty, -1), (0, +\infty)$.
- (i) $2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 12\sqrt[6]{x} - 6 \log(1 + \sqrt[6]{x})$, $x > 0$.
- (j) $\frac{1}{2} \log\left(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) - \frac{1}{2} \log\left|1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right| - \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} + \frac{1}{(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}})^2}$, $x > 1$.
- (k) $\frac{1}{3} \log |\log x - 1| - \frac{1}{6} \log |\log^2 x + \log x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\log x + \frac{1}{2})\right)$.
- (l) $-\frac{3}{2} \log\left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\right) + \frac{3}{2} \log\left|1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\right| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}}$.
- (m) $\log\left|\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1\right| - \log\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1\right) - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$.
- (n) $6 \log \sqrt[6]{x} - \frac{3}{2} \log(\sqrt[6]{x} + 1) - \frac{9}{4} \log(2\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{x} + 1) - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}\right)$.
- (o) $e^x + \frac{2}{3} \log |e^x - 1| - \frac{1}{3} \log(e^{2x} + e^x + 1)$.
- (p) $\frac{6}{7} \sqrt[6]{(x+1)^7} + \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x+1)^5} - \frac{3}{2} \sqrt[6]{(x+1)^4} + 2 \sqrt[6]{(x+1)^3} - 3 \sqrt[6]{(x+1)^2} + 6 \sqrt[6]{x+1} - 6 \log(\sqrt[6]{x+1} + 1)$.

- (q) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x+4} - \frac{x}{2} + \log|\sqrt{x^2+2x+4} - x - 1| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}-x-1}, x \in \mathbb{R}.$
- (r) $-2 \arctan \sqrt{\frac{2-x}{x+1}} - \frac{4}{\sqrt{5}} \log \left| 2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + 3 + \sqrt{5} \right| - \frac{4}{\sqrt{5}} \log \left| -2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} - 3 + \sqrt{5} \right|, x \in (-1, 2).$
- (s) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \log |\sqrt{x^2+x+1} - x + 1 + \sqrt{3}| + \frac{1}{\sqrt{3}} \log |-\sqrt{x^2+x+1} - x - 1 + \sqrt{3}|$ pro $x < 1$ nebo $x > 1$.
- (t) $2 \log |\sqrt{x^2-x+1} + x| - \frac{3}{2} \log |2\sqrt{x^2-x+1} + 2x - 1| - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1}, x \in \mathbb{R}.$

Příklad 8. (Určité integrály)

- (a) 550.
- (b) $\frac{5}{2}.$
- (c) $2\pi.$
- (d) $2 - \frac{2}{e}.$
- (e) $\frac{\pi}{12}(3 + 2\pi^2).$
- (f) $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- (g) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}.$
- (h) $\frac{3}{4} - \frac{\log 2}{2}.$
- (i) $20\sqrt{2}.$
- (j) $\frac{1+\sqrt{2}}{30}.$
- (k) $4 - \log 9.$
- (l) $\log 2 - \frac{5}{8}.$
- (m) $\frac{\pi}{2\sqrt{6}}.$
- (n) $\frac{\pi}{6}(4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}).$
- (o) $2\sqrt{2}\pi.$
- (p) 0.
- (q) $6\pi - 6\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$
- (r) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log(2+e) - \frac{1}{2} \log(1+2e).$

Příklad 9. (Zkouškové)

- (a) $3 - \frac{1}{e} + \frac{\log 4 - \pi}{4} - \frac{1}{2} \log(1+e^2) + \arctan \frac{1}{e}.$
- (b) $\frac{1}{2}x^2 \arctan \frac{x+1}{x+2} - \arctan(2x+3) - \frac{x}{4} + \frac{3}{8} \log(2x^2+6x+5)$ pro $x < -2$ nebo $x > -2$.
- (c) $\frac{7}{6} \arctan 2 + \frac{1}{12} \log \frac{25}{4} - \frac{\pi}{12}.$
- (d) $2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2 \log \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}.$
- (e) $\frac{1}{2}(x+2)^2 \log(x^4-1) - x^2 - 8x - \frac{1}{2} \log|x+1| - \frac{9}{2} \log|x-1| - \frac{3}{2} \log(x^2+1) + 4 \arctan x$ pro $x < 1$ nebo $x > 1$.
- (f) $-\frac{16}{\log 2} \log \frac{|2^x-2|}{2^{2+2}} + \frac{16(2^x-10)}{(4^x-4) \log 2}$ pro $x < 1$ nebo $x > 1$.
- (g) $\int \frac{1}{\cos^2 x (\cos^2 x + \sin 2x + 1)} \text{ na } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$
- (h) $\int \frac{2 \sin x - \cos x}{\cos^3 x + \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x} \text{ na } \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$
- (i) $\frac{1}{2} \log \frac{x^2+1}{x^2+2} - \arctan x + \sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}, x \in \mathbb{R}.$
- (j) $x^2 - 3x + 2 \log|x| - \frac{1}{4} \log(2x^2+x+1) + \frac{5}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4x+1}{\sqrt{7}}$ pro $x < 0$ nebo $x > 0$.
- (k) $-2x + \frac{2}{3}(x+10)\sqrt{x+1} - 12 \log(\sqrt{x+1}+2)$ pro $x > -1$.
- (l) $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$