II. Extrémy funkce více proměnných

<u>Shrnutí teorie</u>.

Tvrzení. (Kompakty, spojitost, extrémy) Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ a $f : M \to \mathbb{R}$.

(a) Je-li f spojitá na uzavřené množině $F \subset \mathbb{R}^n$ vzhledem k F a $c \in \mathbb{R}$, potom jsou množiny $\{\boldsymbol{x} \in F; f(\boldsymbol{x}) \leq c\}, \{\boldsymbol{x} \in F; f(\boldsymbol{x}) \geq c\}, \{\boldsymbol{x} \in F; f(\boldsymbol{x}) = c\}$ uzavřené.

(b) Množina M je uzavřená a omezená právě tehdy, když je kompaktní.

(c) Je-li $\emptyset \neq M$ kompaktní a f je zde spojitá, pak už f na M nabývá svého maxima i minima.

(d) Předpokládejme, že M je otevřená a v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in M$ má f lokální extrém. Potom pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ derivace $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0)$ buď neexistuje, nebo je rovna nule.

(e) Je-li f spojitá, potom je $\sup_M f = \sup_{\overline{M}} f$ a $\inf_M f = \inf_{\overline{M}} f$.

Poznámka. *Bodům z otevřené množiny ve kterých je $\nabla f = 0$ se říká stacionární či kritické body f.*

Tvrzení. (Lagrangeova věta o multiplikátoru) Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $f, \varphi \in C^1(G)$. Označme $M = \{\boldsymbol{x} \in G; \varphi(\boldsymbol{x}) = 0\}$ a předpokládejme, že $\boldsymbol{x}_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z podmínek:

(1) $\nabla\varphi(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$.

(2) Existuje reálné číslo a (multiplikátor) splňující

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) + a\nabla\varphi(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Poznámka. *Funkce f, φ známe, jejich gradienty snadno spočteme. Není-li φ komplikované, tak z podmínky (a) rychle vytanou první podezřelé body. Podmínka (b) je těžší, neboť jde o nelineární soustavu.*

Tvrzení. (Lagrangeova věta o dvou multiplikátorech) Buď $G \subset \mathbb{R}^n, n > 2$, otevřená množina a $f, \varphi, \psi \in C^1(G)$. Označme $M = \{\boldsymbol{x} \in G; \varphi(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) = 0\}$ a předpokládejme, že $\boldsymbol{x}_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z podmínek:

(1) Jeden z vektorů $\nabla\varphi(\boldsymbol{x}_0), \nabla\psi(\boldsymbol{x}_0)$ je násobkem druhého.

(2) Existují reálná čísla a, b (multiplikátory) splňující

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) + a\nabla\varphi(\boldsymbol{x}_0) + b\nabla\psi(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Poznámka (Kuchařka - omezená množina M)**.**

(Úvod)

- *Postřeh - monotonie f(1j), redukce vazeb(2n), určení souřadnice(2j,2n), vidíme minimum(1f,1g).*
- *Ukážeme omezenost M - často triviální(2k), snadné(3d), nebo s úpravou(2c).*
- *Je-li M uzavřená, tak to vysvětlíme (úrovňové množiny/obrázek), pokud není(1g), vezmeme $\overline{M}$.*
- *Jelikož je tedy M (či $\overline{M}$) kompaktní a f je zde spojitá, tak zde nabývá extrémů.*

(Podezřelé body)

- *Podíváme se na vnitřek M a najdeme body, kde je gradient f nulový (nebo neexistuje).*
- *Podíváme se na jednotlivé části hranice M. Vždy máme dvě možnosti:*
  - *Parametrizujeme ji a zkoumáme zde úlohu s o jedna nižší dimenzí (nezapomenout krajní body).*
  - *Použijeme Lagrangeovy multiplikátory (dvě vazby se někdy dají zredukovat).*

(Závěr)

- *Porovnáme funkční hodnoty všech podezřelých bodů a vybereme z nich minima a maxima.*
- *Když M není uzavřená - díky tvrzení výše, část (e), známe infimum i supremum f na M. Pokud některý z bodů ve kterých je extrém leží v M, tak je to extrém i vůči M, jinak se ho nenabývá.*

Příklad 1. (Elementární - bez multiplikátorů) Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M.

(a) $f(x,y) = x$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in [0,2], y \in [0,1], 2x + y < 2\}$.

(b) $f(x,y) = \sin x \cdot \sin y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x + y = \frac{\pi}{2}\}$.

(c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$.

(d) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z$ a $M = [-1,1]^3$.

(e) * $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3 - x\}$.

(f) * $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ a $M = \mathbb{R}^3$.

(g) * $f(x,y) = (x+y)e^{-2x-3y}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \geq 0\}$.

(h) $f(x,y) = (x^2 + 5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}$ a $M = \mathbb{R}^2$.

(i) $f(x,y) = x^2 + x + y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \geq (x-1)^2, y \leq 3x + 1\}$.

(j) * $f(x,y) = \arctan xy^6$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^6 + y^6 \leq 64, x \leq 1\}$.

(k) $f(x,y) = \sin x - y^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; \cos x \leq y < \sin x, x \in [0,\pi)\}$.

(l) $f(x,y,z) = 2x^4 + y^2 - 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 3, 2z = x^2 + y^2\}$.

Příklad 2. (Jeden multiplikátor) Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M.

(a) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(b) $f(x,y,z) = e^{xyz}$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(c) * $f(x,y) = x^2 - y^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^4 - 2x^2 + y^2 \leq 0\}$.

(d) $f(x,y) = x + y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(e) $f(x,y) = y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\}$.

(f) $f(x,y) = 4x + 3y - 4$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1\}$.

(g) * $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} = 1\}$.

(h) * $f(x,y) = 2x + 4y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(i) $f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{4}{3}x^3$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.

(j) * $f(x,y,z) = (x^2 + xy + y^2)e^{-z^2}$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$.

(k) * $f(x,y,z) = -\sqrt[3]{x+y+z}$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + (y-1)^2 + 2z^2 \leq 1\}$.

(l) * $f(x,y,z) = xy^2z^3$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 3z = 12, x > 0, y > 0, z > 0\}$.

(m) $f(x,y) = \arctan x + \arctan y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(n) * $f(x,y,z) = z + e^{xy}$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$.

(o) $f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = x\}$.

(p) $f(x,y,z) = 10z + x - y$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y \geq 0\}$.

Příklad 3. (Dva multiplikátory) Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M.

(a) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.

(b) $f(x,y,z) = xyz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.

(c) * $f(x,y,z) = e^{-xy-yz}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.

(d) * $f(x,y,z) = x - y + 2z^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^3; (x-y)^2 - z^2 = 6, y^2 + 2z^2 \leq 3\}$.

(e) $f(x,y,z) = x(y+z)$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

(f) * $f(x,y,z) = xyz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}$.

(g) $f(x,y,z) = x^4 + y^2 + z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < z, x^2 + z \geq 2\}$.

Příklad 4. (Zkouškové) Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M.

Rok 16/17.

(a) $f(x,y,z) = x^2 - yz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 < 1, z-y=0\}$.

(b) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y + 6xy + y^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \geq -1, x+y \leq 1, x-y \geq -1\}$.

(c) $f(x,y,z) = \sin(xy) + \sin z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1, x^2+y^2-z=0\}$.

(d) $f(x,y,z) = x + 3y + 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; y+z=2, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

(e) $f(x,y) = x^2 - y^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1, y \geq x - \frac{1}{2}\}$.

(f) $f(x,y,z) = x^2 - y - z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1, y \leq 0\}$.

Rok 18/19.

(g) $f(x,y,z) = 2x - y + z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 1, x^2+(y+1)^2+z^2 \leq 1\}$.

(h) $f(x,y) = (2x^2+3y^2)e^{-3x^2-y^2}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$.

(i) $f(x,y,z) = 2x + y + 3z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 4, x+y+z \geq 0\}$.

(j) $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 5x - 3y + y^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x-y \geq 0, x+y \leq 2, y \geq 0\}$.

(k) $f(x,y,z) = y^2 + xz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 < 1, x+z \geq 0\}$.

Rok 19/20.

(l) $f(x,y,z) = x - y^2$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq 5, (x+z)^2+2y^2 = 2\}$.

(m) $f(x,y,z) = x^2 + 5z^2 + 2y^2$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; (x-z)^2+y^2 = 4, x-7y-z+2 \geq 0\}$.

(n) $f(x,y,z) = x - y^2 - 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+2y^2 \leq 2, (x-2z)^2+y^2 = 5\}$.

(o) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 9x+8y^2+9z = 9, x+y+z \leq \frac{5}{4}\}$.

(p) $f(x,y,z) = (x-z)y^2$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 2x^2+y^2+2z^2 = 1, x+z \geq \frac{1}{2}\}$.

Rok 21/22.

(q) $f(x,y) = x^2y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y-2x \leq 1, 2x+y \leq 4, x+2y \geq 2\}$.

(r) $f(x,y,z) = 2x - y$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 2x^2+z^2 = 1, x^2+y^2+z^2 < 4\}$.

(s) $f(x,y,z) = e^{xyz}$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1, x-y+z > 0\}$.

(t) $f(x,y,z) = x + z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+2y^2 = 1, y^2+2z^2 < 4\}$.

Rok 22/23.

(u) $f(x,y,z) = \frac{1}{1+(x+y)^2}$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; z \geq x^2+y^2, x+y-2z = -3\}$.

(v) $f(x,y,z) = x^3 + y$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+2y^2 \leq \frac{5}{6}, x+2y = z\}$.

(w) $f(x,y,z) = x^2 + yz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+2z^2 = 12, z \leq x\}$.

(x) $f(x,y,z) = x + yz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq 5, x^2+z^2 = 5\}$.

Výsledky - II. Extrémy funkce více proměnných

Příklad 1. (Elementární - bez multiplikátorů)

(a) Supremum 1, maxima se nenabývá (bylo by v bodě $[1,0]$) a minimum hodnoty 0 v bodech $[0,y], y \in [0,1)$.

(b) Maximum $\frac{1}{2}$ v bodech $[\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}-k\pi], k \in \mathbb{Z}$ a minimum $-\frac{1}{2}$ v bodech $[\frac{3\pi}{4}+k\pi, -\frac{\pi}{4}-k\pi], k \in \mathbb{Z}$.

(c) Maximum 1 v bodech $[\pm 1, 0]$ a minimum $\frac{1}{4}$ v bodech $\left[0, \pm\frac{1}{2}\right]$.

(d) Maximum 5 v bodech $[1,1,1], [1,-1,1], [-1,1,1], [-1,-1,1]$ a minimum -1 v bodě $[0,0,-1]$.

(e) Maximum -1 v bodě $[0,0]$ a minimum -19 v bodě $[0,3]$.

(f) Supremum neexistuje a minimum -14 v bodě $[-1,-2,3]$.

(g) Maximum $\frac{1}{2e}$ v bodě $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$, infimum 0 a minima se nenabývá (bylo by v bodě $[0,0]$).

(h) Maximum $\frac{5}{e}$ v bodech $[0, \pm 1]$ a minimum 0 v bodě $[0,0]$.

(i) Maximum 46 v bodě $[5,16]$ a minimum $\frac{7}{8}$ v bodě $\left[\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right]$.

(j) Maximum $\arctan 63$ v bodech $[1, \pm\sqrt[6]{63}]$ a minimum $\arctan\left(-\frac{12\cdot 64}{7\sqrt[6]{7}}\right)$ v bodech $\left[-\frac{2}{\sqrt[6]{7}}, \pm 2\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{7}}\right]$.

(k) Maximum 1 v $\left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$, infimum je -1 a minima se nenabývá (bylo by v bodě $[\pi, -1]$).

(l) Maximum 6 v bodech $[\pm\sqrt{2}, 0, 1]$ a minimum $-\frac{1}{8}$ v bodech $[\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2}, 1]$.

Příklad 2. (Jeden multiplikátor)

(a) Maximum je v $[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ a minimum v $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$.

(b) Maximum je v $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}], [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}]$ a minimum v $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}], [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}]$.

(c) Maximum je v $[\pm\sqrt{2}, 0]$ a minimum v $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

(d) Maximum v $[\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ a minimum v $[\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}]$.

(e) Maximum v $[1,1]$ a minimum v $[0,0]$.

(f) Maximum je v $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$ a minimum v $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$.

(g) Maximum je v $[\frac{\sqrt{5}}{2}, 2\sqrt{5}]$ a minimum v $[-\frac{\sqrt{5}}{2}, -2\sqrt{5}]$.

(h) Maximum v $[0,1]$ a minimum v $[0,0]$.

(i) Maximum v $[-\frac{1}{2}, 0]$ a minimum v $[-2, 0]$.

(j) Maximum v $[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$ a minimum v $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1], [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1]$.

(k) Maximum v $\left[-\frac{2}{10}, \frac{8}{10}, -\frac{1}{10}\right]$ a minimum v $\left[\frac{2}{10}, \frac{12}{10}, \frac{1}{10}\right]$.

(l) Maximum v $[2,2,2]$ a minima se nenabývá.

(m) Maximum v $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ a minimum v $[0,0]$.

(n) Maximum v $[\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ a minimum v $[\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

(o) Maximum v $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}]$ a minimum v $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}]$.

(p) Maximum je v $[\frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}}]$ a minimum v $[-\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{10}{\sqrt{102}}]$.

Příklad 3. (Dva multiplikátory)

(a) Maximum je v $[\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}]$ a minimum v $[-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}]$.

(b) Maximum je v $[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}], [-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}], [-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}]$ a minimum v $[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}], [\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}], [\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}]$.

(c) Maximum v $[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ a minimum v $[\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1\mp\sqrt{5}}{4}]$.

(d) Maximum $3+\sqrt{\frac{15}{2}}$ v $\left[\sqrt{\frac{15}{2}}, 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ a minimum $-\sqrt{6}$ v $[\sqrt{6}+y, y, 0]$, $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$.

(e) Maximum $\frac{1}{\sqrt{2}}$ v $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right]$ a minimum $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ v $\left[\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right]$.

(f) Maximum je v $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ a minimum v $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}], [\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}]$.

(g) Supremum je 4, maxima se nenabývá (bylo by v $[0, \pm\sqrt{2}, 2]$), infimum je 0 a minima se nenabývá (bylo by v $[0, 0, 0]$).

Příklad 4. (Zkouškové)

(a) Supremum funkce f na M je 1, maxima se nenabývá, infimum je $-\frac{1}{2}$ a minima se též nenabývá.

(b) Funkce f nabývá na M maxima 17 v bodě $[-2, -1]$ a minima -15 v bodě $[2, -1]$.

(c) Funkce f nabývá na M maxima $\sin\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ v bodech $\left[\pm\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}, \pm\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ a minima $\sin\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \sin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ v bodech $\left[\pm\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}, \mp\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

(d) Funkce f nabývá na M maxima $5+\sqrt{3}$ v bodě $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}, 1+\frac{1}{\sqrt{3}}, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ a minima $5-\sqrt{3}$ v bodě $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

(e) Funkce f nabývá na M maxima 1 v bodě $[-1, 0]$ a minima -1 v bodě $[0, 1]$.

(f) Funkce f nabývá na M maxima $\frac{3}{2}$ v bodech $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ a minima -1 v bodě $[0, 0, 1]$.

(g) Funkce f nabývá na M maxima $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$ v bodě $\left[\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{20}}\right]$ a minima $\frac{1-\sqrt{15}}{2}$ v bodě $\left[-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{20}}\right]$.

(h) Funkce f nabývá na M maxima $\frac{3}{e}$ v bodě $[0, 1]$ a minima 0 v bodě $[0, 0]$.

(i) Funkce f nabývá na M maxima $2\sqrt{14}$ v bodě $\sqrt{\frac{2}{7}}[2, 1, 3]$ a minima $-2\sqrt{2}$ v bodě $\sqrt{2}[0, 1, -1]$.

(j) Funkce f nabývá na M maxima 18 v bodě $[2, 0]$ a minima 0 v bodě $[0, 0]$.

(k) Funkce f nenabývá maxima ani minima na množině M. Supremum funkce f na M je 1 a infimum je $-\frac{1}{2}$.

(l) Funkce f nabývá na M maxima $\sqrt{5}$ v bodech $[\sqrt{5}, 0, \pm\sqrt{2} - \sqrt{5}]$ a minima -3 v bodech $[-2, \pm1, 2]$.

(m) Jelikož například $f(n+2, 0, n) \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, tak f není na M shora omezená a tudíž neexistuje její supremum ani maximum. Minima na M $\frac{10}{3}$ nabývá v bodech $\left[\pm\frac{5}{3}, 0, \mp\frac{1}{3}\right]$.

(n) Funkce f nabývá na M maxima $\sqrt{5}$ v bodech $\left[x, 0, \frac{x-\sqrt{5}}{2}\right]$, pro všechna $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, a minima -3 v bodech $[0, \pm1, 1]$.

(o) Jelikož například $f(1-\frac{8}{9}y^2, y, 0) \overset{y\to+\infty}{\to} +\infty$, tak f není na M shora omezená a tudíž neexistuje její supremum ani maximum. Minima na M $\frac{441}{512}$ nabývá v bodech $\left[\frac{3}{16}, \pm\frac{3\sqrt{17}}{16}, \frac{9}{32}\right]$.

(p) Funkce f nabývá na M maxima $\frac{1}{4}$ v bodech $\left[\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$ a minima $-\frac{1}{4}$ v bodech $\left[0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]$.

(q) Funkce f nabývá na M maxima $\frac{4^3}{3^3}$ v bodě $\frac{4}{3}[1, 1]$ a minima 0 v bodě $[0, 1]$.

(r) Funkce f nenabývá maxima ani minima na množině M. Supremum funkce f na M je $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{7}{2}}$ a infimum je $-\sqrt{2}-\sqrt{\frac{7}{2}}$.

(s) Funkce f nabývá na M maxima $e^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$ v bodech $\sqrt{\frac{1}{3}}[1, 1, 1]$, $\sqrt{\frac{1}{3}}[-1, -1, 1]$, $\sqrt{\frac{1}{3}}[1, -1, -1]$ a minima $e^{-\frac{1}{3\sqrt{3}}}$ v bodě $\sqrt{\frac{1}{3}}[1, -1, 1]$.

(t) Funkce f nenabývá maxima ani minima na množině M. Supremum funkce f na M je $\sqrt{2}+1$ a infimum je $-\sqrt{2}-1$.

(u) Funkce f nabývá maxima 1 v bodech $\left[x,-x,\frac{3}{2}\right]$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ a minima $\frac{1}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})^2+1}$ v bodě $\left[\frac{1+\sqrt{13}}{4}, \frac{1+\sqrt{13}}{4}, \frac{1+\sqrt{13}}{4}+\frac{3}{2}\right]$.

(v) Funkce f nabývá maxima $\frac{7}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}$ v bodě $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ a minima $-\frac{7}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}$ v bodě $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.

(w) Funkce f nabývá maxima 12 v bodě $[\sqrt{12},0,0]$ a minima $-3\sqrt{2}$ v bodě $[0,\sqrt{6},-\sqrt{3}]$.

(x) Funkce f nabývá maxima $\frac{21}{4}$ v bodech $\left[\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{19}}{2}, \pm\frac{\sqrt{19}}{2}\right]$ a minima $-\frac{21}{4}$ v bodech $\left[-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{19}}{2}, \mp\frac{\sqrt{19}}{2}\right]$.