I. Vrstevnice funkcí a vlastnosti množin

Shrnutí teorie.

Definice. *Vrstevnice* funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve výšce $c \in \mathbb{R}$ je množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) = c\}$.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je *vnitřním bodem* množiny M, jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(\boldsymbol{x}, r) \subset M$. Množina M se nazve *otevřená* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže je každý její bod zároveň vnitřním bodem. *Vnitřkem* množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M, značíme jej Int M (interior). Množina M je *uzavřená* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže je doplňkem otevřené množiny.

Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je *hraničním bodem* množiny M, jestliže pro každé $r > 0$ platí

$$B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad B(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset.$$

(Body, které jsou uvnitř množiny M splňují první podmínku automaticky a druhou podmínku ihned splňují body mimo množinu M.) *Hranicí* množiny M rozumíme množinu jejich hraničních bodů, značíme ji $H(M)$. *Uzávěrem* množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$, značíme ji $\overline{M}$.

Množina M je *omezená* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže $M \subset B(\mathbf{0}, r)$, pro nějaké $r > 0$.

Tvrzení (Vlastnosti otevřených a uzavřených množin)**.**

(a) $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$ jsou jediné množiny v $\mathbb{R}^n$, které jsou otevřené a uzavřené zároveň.

(b) Libovolné sjednocení/průnik otevřených/uzavřených množin je otevřená/uzavřená množina.

(c) Konečné sjednocení/průnik uzavřených/otevřených množin je uzavřená/otevřená množina.

(d) Množina M je uzavřená. $\Leftrightarrow$ Pokud posloupnost $\{x_n\}_n \subset M$ konverguje k x, pak $x \in M$.

Tvrzení (Triviální a snadná pozorování)**.** Buď $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$. Potom platí:

(a) Množina Int M je otevřená, Int $M \subset M$ a $\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Int} N$.

(b) Množina $\overline{M}$ je uzavřená, $M \subset \overline{M}$ a $\overline{M} \subset \overline{N}$.

(c) $H(M) = H(\mathbb{R}^n \setminus M)$.

(d) $H(M) \cap \operatorname{Int} M = \emptyset$.

(e) $\mathbb{R}^n = \operatorname{Int} M \cup H(M) \cup \operatorname{Int} (\mathbb{R}^n \setminus M)$.

(f) Množina M je otevřená $\Leftrightarrow M = \operatorname{Int} M$.

(g) Množina M je uzavřená $\Leftrightarrow M = \overline{M} \Leftrightarrow H(M) \subset M$.

Tvrzení (Úrovňové množiny)**.** Buď f spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

(a) Množiny $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) < c\}$ a $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > c\}$ jsou otevřené.

(b) Množiny $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \leq c\}$ a $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq c\}$ jsou uzavřené.

(c) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = c\}$ je uzavřená.

Poznámka (Kuchařka na určení hranice úrovňových množin)**.** *Uvažujme spojitou $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a*

$$\mathbb{R}^n = \{f < 1\} \cup \{f = 1\} \cup \{f > 1\} =: A \cup B \cup C.$$

Řekněme, že chceme určit hranici množiny A. Potřebujeme si uvědomit, že

$$H(M) \cap \mathit{Int}\, M = \emptyset \text{ a } H(M) = H(\mathbb{R}^n \setminus M),\ M \subset \mathbb{R}^n.$$

$\boxed{\textit{Předpokládejme, že } B \subset H(A).}$ *Díky spojitosti f je množina A otevřená a rovná se svému vnitřku, tj.* $\boxed{H(A) \cap A = \emptyset}$. *Jelikož vždy platí $H(B \cup C) \cap \mathit{Int}(B \cup C) = \emptyset$ a $B \subset H(A) = H(\mathbb{R}^n \setminus A) = H(B \cup C)$, tak nutně $B \cap \mathit{Int}(B \cup C) = \emptyset$. Tedy $\mathit{Int}(B \cup C) \subset C$, a jelikož je C otevřená, ze stejného důvodu jako A, tak $\mathit{Int}(B \cup C) = C$. Pak ovšem $\emptyset = H(B \cup C) \cap \mathit{Int}(B \cup C) =$* $\boxed{H(A) \cap C = \emptyset}$. *Dohromady je $H(A) \cap (A \cup C) = \emptyset$, a proto* $\boxed{H(A) \subset B}$. *Spolu s $B \subset H(A)$ konečně získáváme $H(A) = B$.*

Stačí tedy manuálně ukázat, že $B \subset H(A)$; opačná inkluze je pak již automatická.

Příklad 1. (Funkce) Určete a nakreslete definiční obor a vrstevnice zadaných funkcí.

(a) $f(x,y) = 2x^2 + 1 - y$.

(b) $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$.

(c) $f(x,y) = \log xy$.

(d) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.

(e) $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + y}$.

(f) $f(x,y) = \arcsin(y - 2x)$.

(g) $f(x,y) = \log(x - y^3)$.

(h) $f(x,y) = \arccos(y - 3\sin x)$.

(i) $f(x,y) = \frac{1}{x^2 - 9y^2}$.

(j) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$.

(k) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$.

(l) $f(x,y,z) = \log(x - y + z)$.

Příklad 2. (Elementární množiny) Rozhodněte zda jsou zadané množiny otevřené či uzavřené. Najděte jejich vnitřek, uzávěr a hranici.

(a) $M = \{\boldsymbol{a}\}$, kde $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ konečná.

(c) $M = (0,1) \subset \mathbb{R}$.

(d) $M = [0,1] \subset \mathbb{R}$.

(e) $M = [0,1) \subset \mathbb{R}$.

(f) $M = (0,+\infty) \subset \mathbb{R}$.

(g) $M = [0,+\infty) \subset \mathbb{R}$.

(h) $M = (-\infty,+\infty) \subset \mathbb{R}$.

(i) $M = \mathbb{N}$.

(j) $M = \{2^{-n}; n \in \mathbb{N}_0\}$.

(k) $M = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

(l) $M = \mathbb{Q}$.

Příklad 3. (Úrovňové množiny) Nakreslete (klidně s pomocí softwaru) následující množiny a rozhodněte o jejich otevřenosti a uzavřenosti. Dále najděte jejich vnitřek, uzávěr a hranici.

(a) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \leq 0\}$.

(b) $M =$ jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$.

(c) $M =$ jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$ bez bodu $[1,0]$.

(d) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$.

(e) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 9\}$.

(f) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$.

(g) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x - y| = x - y\}$.

(h) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x + y| > x + y\}$.

(i) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y > 0, x + y = 2\}$.

(j) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

(k) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x < y < x + 3\}$.

(l) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$.

(m) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1\}$.

(n) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 2y^2 - x^2 < 1\}$.

(o) $M = \{[t,t,-t] \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$.

(p) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x + 2z - y > 2\}$.

(q) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1\}$.

(r) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z\}$.

(s) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 4, y \geq 0\}$.

(t) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1\}$.

Příklad 4. (Na zamyšlení)

(a) Najděte $A, B \subset \mathbb{R}$, aby $\operatorname{Int}(A \cup B) \neq \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$.

(b) Najděte $A, B \subset \mathbb{R}$, aby $H(A \cup B) \neq H(A) \cup H(B)$.

(c) Najděte $A, B \subset \mathbb{R}$, aby $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

(d) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(e) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(f) Buď $A \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R}^n \setminus A) = \overline{A}$ (a tedy také $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A} = \operatorname{Int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$).

(g) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

(h) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\operatorname{Int}(A \cup B) \supset \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$.

(i) Najděte funkci f, aby pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ byla množina $\{x \in \mathbb{R}; f(x) = c\}$ otevřená.

(j) Najděte spojitou funkci f a $c \in \mathbb{R}$ tak, aby byla $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > c\}$ prázdná a $\{x \in \mathbb{R}; f(x) = c\}$ neprázdná. K určení hraničních bodů tedy obecně nestačí vzít rovnost místo nerovnosti.

Výsledky - I. Vrstevnice funkcí a vlastnosti množin

Příklad 1. (Funkce)

(a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou vertikálně posunuté paraboly tvaru $y = 2x^2 + 1 - c$, $c \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathcal{D}_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$. Vrstevnice jsou čím dál strmější větve odmocniny tvaru $y = c\sqrt{x}$, $c \in \mathbb{R}$.

(c) $\mathcal{D}_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; xy > 0\} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x,y > 0\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x,y < 0\}$. Vrstevnice jsou (exponenciálně) strmější větve hyperboly tvaru $y = \frac{e^c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$.

(d) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$. Pro $c > 0$ jsou vrstevnice zvětšující se kružnice tvaru $x^2 + 4y^2 = c$, pro $c = 0$ jde o bod $[0,0]$ a pro $c < 0$ jde o prázdnou množinu.

(e) $\mathcal{D}_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \geq -2x^2\}$. Pro $c \geq 0$ jsou vrstevnice vertikálně (kvadraticky) posunuté paraboly tvaru $y = c^2 - 2x^2$ a pro $c < 0$ jde o prázdnou množinu.

(f) $\mathcal{D}_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -1 + 2x \leq y \leq 1 + 2x\}$. Pro $-\frac{\pi}{2} \leq c \leq \frac{\pi}{2}$ jsou vrstevnice vertikálně posunuté přímky tvaru $y = 2x + \sin c$, pro ostatní hodnoty c jde o prázdnou množinu.

(g) $\mathcal{D}_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; \sqrt[3]{x} > y\}$. Vrstevnice jsou horizontálně (exponenciálně) posunuté větve odmocniny tvaru $y = \sqrt[3]{x - e^c}$, $c \in \mathbb{R}$.

(h) $\mathcal{D}_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -1 + 3\sin x \leq y \leq 1 + 3\sin x\}$. Pro $0 \leq c \leq \pi$ jsou vrstevnice vertikálně posunuté sinusoidy tvaru $y = 3\sin x + \cos c$, pro ostatní hodnoty c jde o prázdnou množinu.

(i) $\mathcal{D}_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 \neq 9y^2\}$. Pro $c \neq 0$ jsou vrstevnice hyperboly tvaru $x^2 - 9y^2 = \frac{1}{c}$, tj. pro $c > 0$ jsou posunuté horizontálně a otevřené do stran, pro $c < 0$ jsou posunuté vertikálně a otevřené nahoru a dolů. Pro $c = 0$ jde o prázdnou množinu.

(j) $\mathcal{D}_f = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\}$. Pro $c \geq 0$ jsou vrstevnice (kvadraticky) zvětšující se koule tvaru $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 + 4$, pro $c < 0$ jde o prázdnou množinu.

(k) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^3$. Vrstevnice jsou vertikálně (ve směru osy z) posunuté paraboloidy tvaru $z = x^2 + y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(l) $\mathcal{D}_f = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x + z > y\}$. Vrstevnice jsou (exponenciálně) posunuté roviny tvaru $x - y + z = e^c$, $c \in \mathbb{R}$.

Příklad 2. (Elementární množiny)

(a) M je uzavřená a není otevřená. Vnitřek je prázdný a $H(M) = M$.

(b) M je uzavřená a není otevřená. Vnitřek je prázdný a $H(M) = M$.

(c) M je otevřená a není uzavřená. Hranice je $\{0,1\}$, $\overline{M} = [0,1]$.

(d) M je uzavřená a není otevřená. Hranice je $\{0,1\}$, Int $M = (0,1)$.

(e) M není ani otevřená, ani uzavřená. A $\overline{M} = [0,1], \text{Int } M = (0,1)$.

(f) M je otevřená a není uzavřená, $\overline{M} = [0,+\infty)$.

(g) M je uzavřená a není otevřená, Int $M = (0,+\infty), H(M) = \{0\}$.

(h) M je otevřená i uzavřená, hranice je prázdná.

(i) M je uzavřená a není otevřená, $H(M) = M$, Int $M = \emptyset$.

(j) M není ani uzavřená, ani otevřená, $H(M) = M \cup \{0\} = \overline{M}$ a Int $M = \emptyset$.

(k) M je uzavřená a není otevřená. Vnitřek je prázdný a $H(M) = M$.

(l) M není ani uzavřená, ani otevřená. Vnitřek je prázdný a uzávěr je celý prostor.

Příklad 3. (Úrovňové množiny)

(a) Není ani otevřená, ani uzavřená, Int $M = \{x > 0, y < 0\}, H(M) = \{x = 0 \text{ nebo } y = 0\}$.

(b) M je uzavřená a není otevřená, Int $M = \emptyset, H(M) = M$.

(c) M není uzavřená ani otevřená, Int $M = \emptyset, H(M) = M \cup \{[1, 0]\}$.

(d) M je otevřená, Int $M = M, H(M) = \{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$.

(e) M je uzavřená, Int $M = \{x^2 + y^2 > 9\}, H(M) = \{x^2 + y^2 = 9\}$.

(f) M je uzavřená, Int $M = \emptyset, H(M) = M$.

(g) M je uzavřená, Int $M = \{x > y\}, H(M) = \{x = y\}$.

(h) M je otevřená, Int $M = \{x + y < 0\}, H(M) = \{x + y = 0\}$.

(i) M není uzavřená ani otevřená, Int $M = \emptyset, H(M) = \{y \geq 0, y = 2 - x\}$.

(j) M je otevřená, $H(M) = \{x^2 + y^2 = 4\} \cup \{x^2 + y^2 = 1\}$. Jedná se o mezikruží.

(k) M je otevřená, $H(M) = \{x - y = 0\} \cup \{-x + y = 3\}$. Jedná se o prostor mezi dvěma přímkami.

(l) M je uzavřená, $H(M) = \{y = x^2\} \cup \{y = x^2 + 1\}$, Int $M = \{x^2 < y < x^2 + 1\}$. Jedná se o prostor mezi dvěma parabolami.

(m) M je otevřená, $H(M) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| = 1\}$. Jedná se o čtverec jehož úhlopříčky jsou částí os x a y.

(n) M je otevřená, $H(M) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 2y^2 - x^2 = 1\}$. Jedná se o oblast mezi dvěma hyperbolami.

(o) M je uzavřená, $H(M) = M$, Int $M = \emptyset$. Jedná se o přímku.

(p) M je otevřená, $H(M) = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x + 2z - y = 2\}$. Jedná se o poloprostor.

(q) M je uzavřená, $H(M) = M$, Int $M = \emptyset$. Jedná se o průnik dvou válcových ploch.

(r) M je uzavřená, $H(M) = M$, Int $M = \emptyset$. Jedná se o plášť rotačního paraboloidu.

(s) M není uzavřená ani otevřená, $H(M) = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, y < 0\} \cup \{x^2 + y^2 + z^2 < 4, y = 0\}$, Int $M = \{x^2 + y^2 + z^2 < 4, y > 0\}$. Jedná se o kus koule (odříznuté rovinou z koule o poloměru 2).

(t) M je uzavřená, $H(M) = \{x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 < 1\} \cup \{x^2 + y^2 < 1, x^2 + z^2 = 1\}$, Int $M = \{x^2 + y^2 < 1, x^2 + z^2 < 1\}$. Jedná se o průnik dvou (nekonečných) válců.

Příklad 4. (Na zamyšlení)

(a) Kreslete.

(b) Kreslete.

(c) Kreslete.

(d) Uzávěr zachovává uspořádání množin a uzávěr uzavřené množiny je množina.

(e) Uzávěr zachovává uspořádání množin.

(f) Doplněk otevřené je uzavřená a naopak. Interior zachovává uspořádaní množina a interior otevřené množiny je množina.

(g) Použijte vhodně (f), De Morganovy vzorce a (d).

(h) Interior zachovává uspořádání množin. Interior množiny je největší otevřená množina obsažená v dané množině.

(i) Typická nespojitá funkce.

(j) Hodnota maxima.