9. Průběh funkce

Vyšetřete průběh následujících funkcí.

1. $(x^2 + 2x + 1)e^x$

2. $\operatorname{arctg} x - x$

3. $(\log |x|)^3 - 3 \log |x|$

4. $(x - 1)e^{\frac{x}{1+x}}$

5. $\arcsin \sin(\frac{3\pi x}{4x^2+2})$

Výsledky a návody

1. Snadno zjistíme $D(f) = \mathbf{R}$ a f je na $\mathbf{R}$ spojitá; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Funkce f není lichá, není sudá a není periodická. Pro f' platí

$$f'(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Pro znaménko f' máme

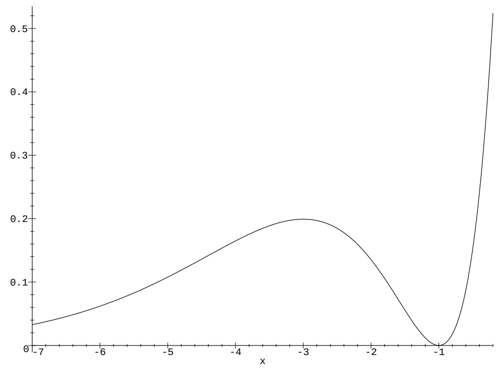
$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty), \\ f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (-3, -1), \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-3, -1\}. \end{aligned}$$

Zabývejme se ještě druhou derivací f a jejím znaménkem:

$$\begin{aligned} f''(x) = (x^2 + 6x + 7)e^x, &\qquad x \in \mathbf{R}; \\ f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3 - \sqrt{2}) &\cup (-3 + \sqrt{2}, \infty), \\ f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2}), \\ f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, -3)$ a $(-1, \infty)$; f je klesající na intervalu $(-3, -1)$; v bodě -3 má lokální maximum a v bodě -1 globální minimum; globálního maxima se nenabývá; $H(f) = \langle 0, \infty)$. Funkce f je na intervalech $(-\infty, -3 - \sqrt{2})$, $(-3 + \sqrt{2}, +\infty)$ konvexní a na intervalu $(-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2})$ je konkávní. Body $-3 - \sqrt{2}$, $-3 + \sqrt{2}$ jsou inflexními body f. Funkce f má v $-\infty$ za asymptotu funkci $x \mapsto 0$ a v ∞ f asymptotu nemá.

Toto je graf funkce f:



2. Platí: $D(f) = \mathbf{R}$; f je spojitá na $\mathbf{R}$; f je lichá a

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

Spočítejme první a druhou derivaci f a zkoumejme jejich znaménko:

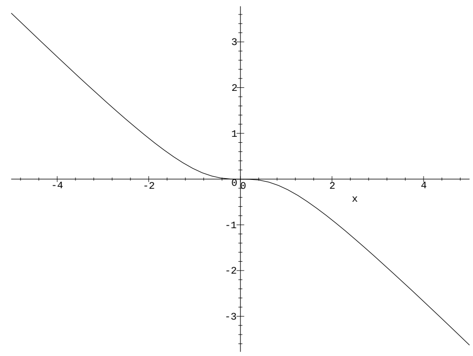
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1, \qquad x \in \mathbf{R}; \qquad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad x \in \mathbf{R};$$

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0; \\ f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (0, +\infty), \\ f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0), \\ f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f je klesající na $\mathbf{R}$ a nemá žádné extrémy; f je konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$, konkávní na $(0, +\infty)$ a 0 je inflexním bodem; $H(f) = \mathbf{R}$. Spočítejme ještě asymptoty f:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1 \right) = -1, \\ \lim_{x\to+\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2; \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1 \right) = -1, \\ \lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2. \end{aligned}$$

Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $y = -x + \pi/2$ a v $-\infty$ má asymptotu $y = -x - \pi/2$.



Toto je graf funkce f:

3. Snadno zjistíme, že $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Funkce f je sudá. Zkoumejme tedy funkci f zatím **pouze** na intervalu $(0, \infty)$. Pak máme $f(x) = (\log x)^3 - 3\log x$.

Spočtěme limity v „krajních bodech“.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \log x((\log x)^2 - 3) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0+} \log x((\log x)^2 - 3) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Pro každé $x > 0$ platí

$$f'(x) = \frac{3}{x}((\log x)^2 - 1) \qquad \text{a} \qquad f''(x) = \frac{3}{x^2}(-(\log x)^2 + 2\log x + 1).$$

Zkoumejme znaménko první derivace:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{e}, e)$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{1}{e}, e\}.$$

Při zkoumání znaménka f'' stačí zkoumat znaménko výrazu $-(\log x)^2 + 2\log x + 1$.

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}})$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, e^{1-\sqrt{2}}) \cup (e^{1+\sqrt{2}}, +\infty)$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}}\}.$$

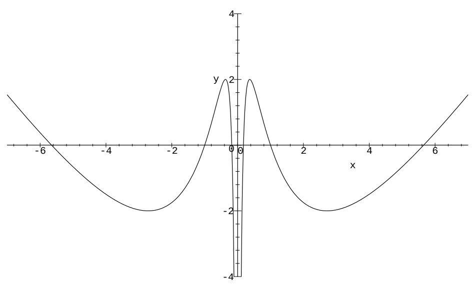
Uvažujme nyní celý definiční obor funkce f. Z předchozího plyne:

• Funkce f je rostoucí na intervalech $(0, \frac{1}{e})$, $(e, +\infty)$, $(-e, -\frac{1}{e})$ a klesající na intervalech $(-\infty, -e)$, $(-\frac{1}{e}, 0)$, $(\frac{1}{e}, e)$. Funkce f má lokální maxima v bodech $\pm\frac{1}{e}$ a lokální minima v bodech $\pm e$. Globálního maxima a globálního minima nenabývá.

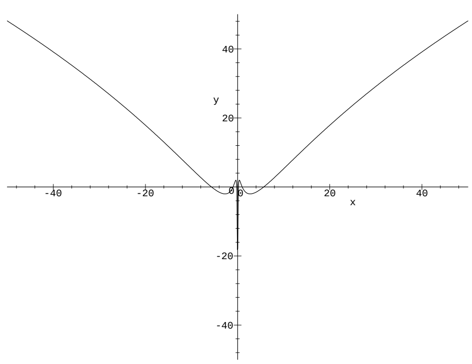
• Funkce f je konvexní na intervalech $(-e^{1+\sqrt{2}}, -e^{1-\sqrt{2}}),\ (e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}})$ a konkávní na intervalech $(-\infty, -e^{1+\sqrt{2}}),\ (-e^{1-\sqrt{2}}, 0),\ (0, e^{1-\sqrt{2}}),\ (e^{1+\sqrt{2}}, +\infty)$. Body $\pm e^{1+\sqrt{2}},\ \pm e^{1-\sqrt{2}}$ jsou inflexními body f.

Vzhledem k tomu, že $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ f nemá asymptotu v $+\infty$. Ze sudosti f vyplývá, že f nemá asymptotu ani v $-\infty$.

Takto vypadá graf funkce f:



Graf f v trochu jiném pohledu:



4. Platí $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$ $\lim_{x\to-1-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to-1+} f(x) = 0$. Funkce f je spojitá na $D(f)$, ale není sudá, ani lichá, ani periodická. Spočtěme f' a f'' a prozkoumejme jejich znaménko:

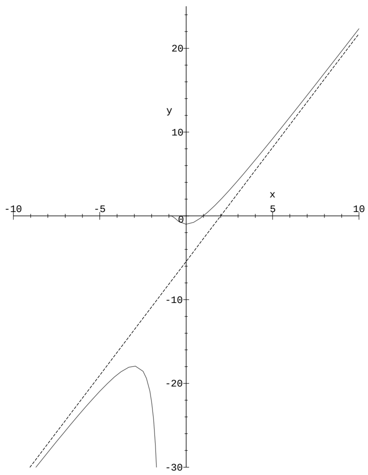
$$f'(x) = \frac{x(3+x)}{(1+x)^2} \exp(x/(1+x)), \qquad x \in D(f);$$
$$f''(x) = \frac{5x+3}{(1+x)^4} \exp(x/(1+x)), \qquad x \in D(f);$$

$$
\begin{aligned}
&f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty),\\
&f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -1) \cup (-1, 0),\\
&f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -1\};\\
&f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3/5, \infty),\\
&f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -3/5),\\
&f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3/5\}.
\end{aligned}
$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, -3)$ a $(0, +\infty)$; klesající na intervalech $(-3, -1)$ a $(-1, 0)$. V bodě -3 má f lokální maximum a v bodě 0 má lokální minimum. Globálních extrémů funkce f nenabývá. Funkce f je konkávní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, -3/5)$; na intervalu $(-3/5, +\infty)$ je konvexní; bod $-3/5$ je inflexním bodem. Pro obor hodnot platí: $H(f) = (-\infty, -4\exp(3/2)\rangle \cup \langle -1, +\infty)$. Určeme ještě asymptoty:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} \exp\left(\frac{x}{1+x}\right) = e,\\
&\lim_{x\to+\infty} \left\{(x-1)\exp\left(\frac{x}{1+x}\right) - ex\right\}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left\{ex\left(\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1\right) - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left\{\frac{-ex}{1+x} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1}{-\frac{1}{1+x}} - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\} = -2e,\\
&\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} \exp\left(\frac{x}{1+x}\right) = e,\\
&\lim_{x\to-\infty} \left\{(x-1)\exp\left(\frac{x}{1+x}\right) - ex\right\}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \left\{ex\left(\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1\right) - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \left\{\frac{-ex}{1+x} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1}{-\frac{1}{1+x}} - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\} = -2e
\end{aligned}
$$

Funkce $y = ex - 2e$ je tedy asymptotou funkce f v $+\infty$ i $-\infty$. Zde je graf funkce f:



5. Položme $g(x) = \dfrac{3\pi x}{4x^2+2}$. Vyšetřeme nejprve průběh funkce g. Platí: $D(g) = \mathbf{R}$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Funkce g je lichá a spojitá na $\mathbf{R}$.

Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$g'(x) = 6\pi \frac{1-2x^2}{(4x^2+2)^2}, \qquad g''(x) = 6\pi \frac{x(2x^2-3)}{(2x^2+1)^3}.$$

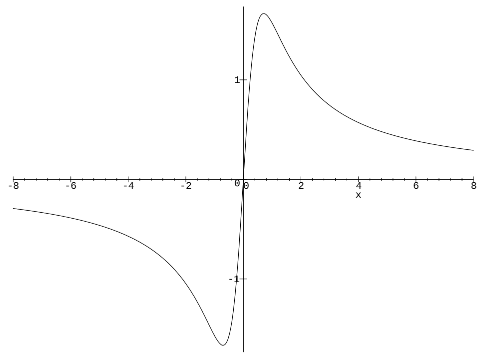
$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$
$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty),$$
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Funkce g je na intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ klesající. Na intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ rostoucí. V bodě $\frac{1}{\sqrt{2}}$ je globální maximum funkce g, v bodě $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ je globální minimum funkce g. Platí také $H(g) = \langle g(-\frac{1}{\sqrt{2}}), g(\frac{1}{\sqrt{2}})\rangle = \langle -\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\rangle$.

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty),$$
$$g''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (0, \sqrt{\frac{3}{2}}),$$
$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Funkce g je konvexní na intervalech $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$, $(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$. Funkce g je konkávní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$. Body $0,\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ -\sqrt{\frac{3}{2}}$ jsou inflexními body funkce g.

Graf funkce g vypadá takto:



Vraťme se nyní k funkci f. Všimněme si, že $H(g) \subset \langle -\pi, \pi \rangle$ a

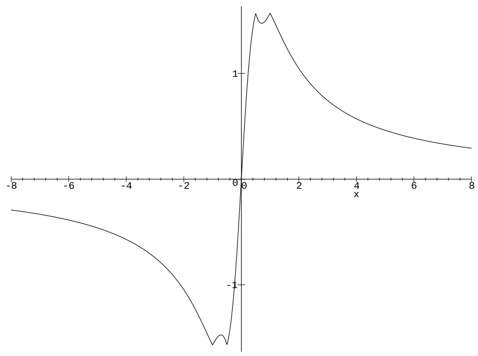
$$g(x) \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle 1, \infty).$$

Platí proto:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - g(x), & x \in (-1, -\frac{1}{2}) \\ g(x), & x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle 1, \infty) \\ \pi - g(x), & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Nyní je snadné zjistit, že funkce f je rostoucí na intervalech $(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$; f je klesající na intervalech $(-\infty, -1),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}),\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (1, +\infty)$; v bodech $\frac{1}{2},\ 1$ má f globální maximum; v bodech $-\frac{1}{2},\ -1$ má f globální minimum; v bodě $\frac{1}{\sqrt{2}}$ má f lokální minimum a v bodě $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ lokální maximum; f je konvexní na intervalech $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -1)$; f je konkávní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(-1, -\frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$, $(1, \sqrt{\frac{3}{2}})$; body $0,\ \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}$ jsou inflexními body funkce f.

Toto je graf funkce f:


1
-8
-6
-4
-2
0
0
2
4
6
8
x
-1