Zkouškové příklady

Příklad 1. [Limita posloupnosti] Spočítejte následující limity posloupností:

(a) $\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\sqrt[n]{n^{2n}+(2n)^n}}{\sqrt[n]{n^{3n}+(3n)^n}}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n+\cos\frac{3}{n}}}{\sqrt[6]{n^2+\sin\frac{2}{n}}-\sqrt[3]{n}}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \left\lfloor \sqrt[n]{n^{\log n}+e^n+(\log n)^{\sqrt{n}}} \right\rfloor$.

Příklad 2. [Limita funkce] Spočítejte následující limity funkcí:

(a) $\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{1+\sqrt{\tan x}}{\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{\sqrt{1-\sqrt{\sin x}}-\sqrt{1+\sqrt{\tan x}}}{x}}$.

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{4^{2^x}-16}{\sqrt{1-\cos(2\pi x)}}$.

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{2^{\cos x}-2\cdot 3^{\sin^2 x}}{\arctan(\cot(x^2))-\frac{\pi}{2}}$.

Příklad 3. [Derivace] Vyšetřete spojitost, resp. jednostrannou spojitost funkce f a spočtěte její derivaci, resp. jednostranné derivace ve všech bodech, kde existují:

(a) $f(x) = \operatorname{sign}(x^3-4x)\cdot\sin(x^3-2x^2)$.

(b) $f(x) = \arccos(\min\{2x^2, x+1\})$.

Příklad 4. [Průběh funkce] Vyšetřete průběh funkce f:

(a) $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^3}\right)$.

(b) $f(x) = \frac{\sin x-\frac{1}{2}}{\sin x+\frac{3}{\sqrt{2}}}$.

Poznámka.

1. *U limit posloupností máme známou růstovou škálu, tj. známe*

$$\sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{n^a}, a^n/n!, n!/n^n, a^n, n^b/a^n, log^a n/n^b.$$

Hodí se věta o dvou policajtech, věta o limitě součinu omezené a mizející posloupnosti, tvrzení o k-té odmocnině z limity a aritmetika limit.

2. *U limit funkcí máme především srovnání základních funkcí s polynomy, tj. známe*

$$\frac{\sin x}{x}, \frac{\tan x}{x}, \frac{1-\cos x}{x^2}, \frac{e^x-1}{x}, \frac{\log(1+x)}{x}, \frac{\arcsin x}{x}, \frac{\arctan x}{x}$$

a kromě nich známe limity základních funkcí v „problematických“ bodech. Hodí se aritmetika limit, prakticky nezbytná je věta o limitě složené funkce (varianta (P) a (S)), občas Heineho věta. Použití obyčejné afinní transformaci (tj. např. substituce $x = y+1$) stačí jen zmínit. Nemocniční pravidlo je možné používat a někdy se vysloveně hodí.

3. *U derivací známe předpisy pro derivace základních funkcí z přednášky. Téměř jistě se bude hodit použít tvrzení o výpočtu jednostranné derivace, ale občas je nutné použít samotnou definici. Nezapomeňte zkoumat definiční obor funkce samotné i její derivace.*

4. *Tady zužitkujte vše, co znáte. Asi spočítáte dost jednoduchý limit (a netřeba je do detailu komentovat), hodí se opět l'Hospitalovo pravidlo. Spočtené derivace je vhodné si důkladně překontrolovat. Lokální extrém se může vyskytnout i v bodě, kde derivace neexistuje.*

Příklad (1a).

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad , \quad a_n = n \frac{\sqrt[n]{n^{2n} + (2n)^n}}{\sqrt[n]{n^{3n} + (3n)^n}}$$

$$a_n = n \cdot \frac{\sqrt[n]{n^{2n}} \cdot \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot n^n \cdot n^{-2n}}}{\sqrt[n]{n^{3n}} \cdot \sqrt[n]{1 + 3^n \cdot n^n \, n^{-3n}}} = n \sqrt[n]{\frac{(n^n)^2}{(n^n)^3}} \; \frac{\sqrt[n]{1 + 2^n n^{-n}}}{\sqrt[n]{1 + 3^n \cdot n^{-2n}}}$$

$$= n \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}}_{= 1/n} \sqrt[n]{\frac{1 + 2^n/n^n}{1 + 3^n/n^{2n}}} = \sqrt[n]{\frac{1 + 2^n/n^n}{1 + 3^n/n^{2n}}} \, .$$

ze školy víme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^n} = 0$, $a = 2$ nebo 3

zjevně tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < \frac{2^n}{n^n} \overset{n \geq n_0}{<} \frac{1}{2} \quad a \quad 0 < \frac{3^n}{n^{2n}} \overset{n \in \mathbb{N}}{\leq} \frac{3^n}{n^n} \overset{n \geq n_0}{<} \frac{1}{2}$$

Je tedy

$$\frac{1+0}{1+1/2} \leq \frac{1 + 2^n/n^n}{1 + 3^n/n^{2n}} \leq \frac{1 + 1/2}{1 + 0}$$

Díky monotonii $\sqrt[n]{}$ je

$$\underbrace{\sqrt[n]{1/_{3/2}}}_{\to 1} \leq a_n \leq \underbrace{\sqrt[n]{\frac{3/2}{1}}}_{\to 1.}$$

Dle dvou policajtů je tedy $\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}}$.

(Neboť víme, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \; a > 0$)

Pozn: Monotonie $\sqrt[n]{}$: Chceme, že $0 < x < y \iff \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$

$$\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x} = \frac{y - x}{\sqrt[n]{y^{n-1}} + \dots + \sqrt[n]{x^{n-1}}} > 0 \text{, což chceme.}$$

Příklad (1b).

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \quad a_n = \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n+\cos 3/n}}{\sqrt[6]{n^2+\sin 2/n} - \sqrt[3]{n}} =: \frac{b_n}{c_n}$$

• $$b_n = \frac{n+1-(n+\cos 3/n)}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n+\cos 3/n} + \sqrt[3]{(n+\cos 3/n)^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{1-\cos 3/n}{(3/n)^2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac12} \cdot \frac{9}{n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{(1+1/n)^2} + \sqrt[3]{1+1/n}\,\sqrt[3]{1+\frac{\cos 3/n}{n}} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{\cos 3/n}{n}\right)^2}}}_{\xrightarrow{n\to\infty}\frac13}$$

Takže to zatím vypadá OK a jdeme dále.

• $$\frac{1}{c_n} = \frac{1}{\sqrt[6]{n^2+\sin 2/n} - \sqrt[6]{n^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sin 2/n}\left[\sqrt[6]{(n^2+\sin 2/n)^5} + \sqrt[6]{(n^2+\sin 2/n)^4}\,\sqrt[6]{n^2} + \dots + \sqrt[6]{n^{10}}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{2/n}{\sin 2/n}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{n}{2}\cdot\sqrt[6]{n^{10}}}_{=\frac12 n\cdot n\cdot\sqrt[3]{n^2}}\underbrace{\left[\sqrt[6]{\left(1+\frac{\sin 2/n}{n^2}\right)^5}+\dots+\sqrt[6]{1+\frac{\sin 2/n}{n^2}}+1\right]}_{\to 6}$$

Dohromady je

$$a_n = \underbrace{\frac{1-\cos\frac3n}{(3/n)^2}}_{\substack{\to 1/2\\(1)}} \cdot \underbrace{\frac{2/n}{\sin 2/n}}_{\substack{\to 1\\(2)}}\cdot\frac92\cdot\underbrace{\frac{\sqrt[6]{\left(1+\frac{\sin 2/n}{n^2}\right)^5}+\dots+1}{\sqrt[3]{(1+1/n)^2}+\sqrt[3]{\ }\sqrt[3]{\ }+\sqrt[3]{\left(1+\frac{\cos 2/n}{n}\right)^2}}}_{\substack{\to \frac63 = 2\\(3)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \overset{A-L}{=} \frac12\cdot 1\cdot\frac92\cdot 2 = \underline{\underline{\frac92}}$$

Zbývá odůvodnit (1), (2), (3).

• Ad (1): $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos 3/n}{(3/n)^2} = \frac{1}{2}$

Víme, že $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Stačí použít Heineho větu s posloupností $x_n = 3/n \to 0,\ n\to\infty$

• Ad (2): $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{2/n}{\sin 2/n}}_{} = 1$

$$= \frac{1}{\frac{\sin 2/n}{2/n}}$$

Víme, že $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, vezmeme $x_n = 2/n \to 0$ a Heineho. Pak aritmetika limit.

• Ad (3): Víme, že $1 + 1/n \to 1$ (triv.)

$1 + \frac{\sin 2/n}{n^2} \to 1$ ($\sin 2/n$ je omez. a $1/n^2 \to 0$ dle tvrzení o omez. a mizející posl. je $\frac{\sin 2/n}{n^2} \to 0$

$1 + \frac{\cos 2/n}{n^2} \to 1$ (jako výše).

Dle tvrzení o odmocninách z napíš

$$\sqrt[3]{\left(1 + \frac{\cos 2/n}{n^2}\right)^2} \to 1.$$

Podobně další. Proto jde (dle aritmetiky limit) zlomek k $6/3$, $n\to\infty$.

Příklad (1c).

$\lim_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor$, $a_n = \sqrt[n]{n^{\log n} + e^n + (\log n)^{\sqrt{n}}}$

- $n^{\log n} \overset{def}{=} \exp(\log n \cdot \log n) = e^{\log^2 n} \overset{n \geq n_0}{\leq} e^n$

  Víme totiž, že $\frac{\log^2 n}{n} \to 0$, $n \to \infty$. (růstová škála)

- $(\log n)^{\sqrt{n}} \overset{def}{=} \exp\left(\sqrt{n} \log(\log n)\right)$

  Opět si všimneme, že lze odhadnout $\leq \exp(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}) = e^n$ pro n velká.

  $\log(\log n) \leq \sqrt{n}$

  rostoucí $\iff_{\text{t.č.}}$ $\log n \leq e^{\sqrt{n}}$

  $\iff$ $n \leq e^{(e^{\sqrt{n}})}$. Platí, ale nechci dokazovat.

Jinak: Je $\frac{\log x}{x} \to 0$, $x \to \infty$. (škála)

Tedy pro x velká je $\log x < x$

$\Rightarrow \log(\log n) \leq 1 \cdot \log n$ $\quad (x = \log n)$, n velké.

A $\frac{\log n}{n^{1/2}} \to 0 \Rightarrow \log n < 1 \cdot \sqrt{n}$, n velké.

exp je rostoucí, tedy $e^{\sqrt{n}\log(\log n)} \leq e^{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = e^n$.

Tedy

$$e = \sqrt[n]{e^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{3e^n} = e\sqrt[n]{3} \quad (\text{pro } n \geq n_0)$$

Víme, že $\sqrt[n]{3} \to 1$, tedy $a_n \in (e, 3)$, n dost velká.

Proto $\lfloor a_n \rfloor = 2$ od jistého indexu (velkého).

Proto $\lim_{n\to+\infty} \lfloor a_n \rfloor = \underline{\underline{2}}$

Příklad (2a).

$$\lim_{x\to 0_+} f(x), \quad f(x) := \left(\frac{1+\sqrt{\tan x}}{\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{\sqrt{1-\sqrt{\sin x}}-\sqrt{1+\sqrt{\tan x}}}{x}}$$

Dle definice je

$$f(x) = \exp\left[\frac{\sqrt{1-\sqrt{\sin x}}-\sqrt{1+\sqrt{\tan x}}}{x}\log\Big(\overbrace{\frac{1+\sqrt{\tan x}}{\cos\sqrt{x}}}^{>0 \text{ pro } x\in P^+(0)}\Big)\right]$$

- $$\frac{\sqrt{1-\sqrt{\sin x}}-\sqrt{1+\sqrt{\tan x}}}{x} = \frac{1}{x}\,\frac{-\sqrt{\sin x}-\sqrt{\tan x}}{\sqrt{1+\sqrt{\sin x}}+\sqrt{1+\sqrt{\tan x}}} =$$

$$\overset{x>0}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\Big[\underbrace{-\sqrt{\frac{\sin x}{x}}-\sqrt{\frac{\tan x}{x}}}_{\to -2}\Big]\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\sin x}}+\sqrt{1+\sqrt{\tan x}}}}_{\to 1/2}$$

- $$\log\left(\frac{1+\sqrt{\tan x}}{\cos\sqrt{x}}\right) = \frac{\log\frac{1+\sqrt{\tan x}}{\cos\sqrt{x}}}{\frac{1+\sqrt{\tan x}}{\cos\sqrt{x}}-1}\cdot\frac{1+\sqrt{\tan x}-\cos\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}$$

$$= \underbrace{\frac{\log(\dots)}{\dots-1}}_{\to 1}\,\underbrace{\frac{1}{\cos\sqrt{x}}}_{\to 1}\Big[\sqrt{x}\underbrace{\sqrt{\frac{\tan x}{x}}}_{\to 1}+\underbrace{\frac{1-\cos\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}}_{\to 1/2}x\Big]$$

Dohromady je

$$f(x) = \exp\Big[-\overbrace{\frac{\sqrt{\frac{\sin x}{x}}+\sqrt{\frac{\tan x}{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{\sin x}}+\sqrt{1+\sqrt{\tan x}}}}^{\xrightarrow{(2)} 1}\cdot\overbrace{\frac{\log\frac{1+\sqrt{\tan x}}{\cos\sqrt{x}}}{\frac{1+\sqrt{\tan x}}{\cos\sqrt{x}}-1}}^{\xrightarrow{(3)} 1}\cdot\overbrace{\frac{1}{\cos\sqrt{x}}}^{\xrightarrow{(4)} 1}\cdot\Big(\underbrace{\sqrt{\frac{\tan x}{x}}}_{\xrightarrow[(5)]{} 1}+\underbrace{\sqrt{x}\,\frac{1-\cos\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}}_{\xrightarrow[(6)]{} 0}\Big)\Big]$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \exp\left(-\frac{1+1}{1+1}\cdot 1\cdot 1\cdot(1+0)\right) \to \underline{\underline{1/e}}$$

Výsledek tedy bude $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1/e$.

Potřebujeme zdůvodnit kroky (1) až (6).

• Ad(4): cos a $\sqrt{\ }$ jsou spoj. i tedy $\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{\cos \sqrt{x}} = 1$ ze spojitosti

• Ad(5): víme, že $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $f(y) = \sqrt{y}$ je sp. v 1,

tedy příslušná limita je 1 díky VOLSF(S)

• Ad(6): $f(y) = \frac{1 - \cos y}{y^2}$ a $g(x) = \sqrt{x}$ spojitost

$\lim_{x \to 0_+} g(x) = 0$ a $\lim_{y \to 0} f(y) = 1/2$ tabulka

Platí (P). tj. $g(x) \neq 0$ na $P^+(0, \delta)$, δ libovolné.

Tedy dle VOLSF(P) a A-L je $\lim_{x \to 0_+} \sqrt{x} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} = 0$.

• Ad (2): Limita čitatele jako v (5).

Limita jmenovatele ze spojitosti fcí

sin, cos a $\sqrt{\ }$,

Dle A-L je co tedy $\to \frac{1+1}{1+1} = 1$.

• Ad(3): $f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}$, $g(x) = \frac{1 + \sqrt{\tan x}}{\cos \sqrt{x}} - 1$

Jistě $\lim_{x \to 0_+} g(x) = 0$ spojitost a $\lim_{y \to 0} f(y) = 1$ tabulka

Podm (P): $1 + \sqrt{\tan x} \neq \cos x$ na $P^+(0, \delta)$

v 0 nastává rovnost

a na pravém prst. okolí 0 (dost malém)

je LHS rostoucí a RHS klesající

Tedy nutně takové δ existuje, VOLSF(P) dává závěr.

• Ad(1): Máme $\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} e^{g(x)}$

Z (2) až (6) je $\lim_{x \to 0_+} g(x) = -1$.

Fce exp je v -1 spoj. i tedy použijeme VOLSF(S).

Příklad (2b).

$$\lim_{x\to 1} f(x), \quad f(x) = \frac{4^{2^x}-16}{\sqrt{1-\cos(2\pi x)}}$$

Jmenovatel dává na okolí 1 smysl a čitatel $\to 0$.

$$\cdot\ 4^{2^x}-16 = 4^2\left[4^{2^x-2}-1\right] = 16\cdot\frac{\exp((2^x-2)\log 4)-1}{2(2^{x-1}-1)\log 4}\,2(2^{x-1}-1)\lg 4$$

$$= 16\,\frac{\exp((2^x-2)\log 4)-1}{(2^x-2)\log 4}\,2\,\frac{\exp((x-1)\lg 2)-1}{(x-1)\log 2}\,(x-1)\cdot\log 2\cdot\underbrace{\log 4}_{=2\log 2}$$

$$= 2\cdot 32\log^2 2\,\underbrace{\frac{\exp((2^x-2)\lg 4)-1}{(2^x-2)\log 4}}_{\xrightarrow{(1)} 1}\cdot\underbrace{\frac{\exp((x-1)\log 2)-1}{(x-1)\lg 2}}_{\xrightarrow{(2)} 1}\cdot(x-1).$$

$$\cdot\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{1-\cos 2\pi x}} \underset{x-1=y}{=} \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sqrt{1-\cos 2\pi(y+1)}} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sqrt{1-\cos 2\pi y}}$$

$$\cos(2\pi(y)+2\pi) = \cos 2\pi y$$

$$= \lim_{y\to 0}\underbrace{\sqrt{\frac{(2\pi)^2 y^2}{1-\cos 2\pi y}}}_{\xrightarrow{(3)} \sqrt{2}}\cdot\underbrace{\frac{y}{|y|}}_{\text{Problém!}}\cdot\frac{1}{2\pi}$$

Máme tedy

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{y\to 0}\frac{2\cdot 32\lg^2 2}{2\pi}\cdot\frac{\exp((2^{y+1}-2)\lg 4)-1}{(2^{y+1}-2)\lg 4}\cdot\frac{\exp(y\log 2)-1}{y\lg 2}\cdot\sqrt{\frac{y^2}{1-\cos 2\pi y}}\,\frac{y}{|y|}$$

Pokud limita existuje, tak se rovnají jednostranné limity, tj

$$\frac{32\lg^2 2}{\pi}\sqrt{2}\cdot(-1) \overset{A-L}{=} \lim_{y\to 0_-} = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{y\to 0_+} \overset{A-L}{=} \frac{32\lg^2 2}{\pi}\cdot 1\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot 1$$

Tedy $\lim_{x\to 1} f(x)$ Neexistuje

Potřeba je pouze ospravedlnit (1), (2) a (3).

• Ad (3)

$$\lim_{y\to 0} \sqrt{\frac{(2\pi)^2 y^2}{1-\cos 2\pi y}} = \sqrt{2}.$$

Víme, že $\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$, $g(y) = 2\pi y$

$\lim_{y\to 0} g(y) = 0$ spojitost

a podm. (P): $2\pi y \neq 0$ na $P(0,\delta)$, triv. platí $\forall \delta > 0$.
$\Rightarrow$ VOLSF(P)

Tedy $\lim_{y\to 0} \sqrt{\frac{(2\pi y)^2}{1-\cos 2\pi y}} = \lim_{y\to 0} \sqrt{\frac{1}{\frac{1-\cos 2\pi y}{(2\pi y)^2}}} \overset{(*)}{=} \sqrt{1/{1/2}} = \sqrt{2}$

kde (*) je VOLSF(S) pro $f(z) = \sqrt{z}$, f spoj. v bodě 2.

• Ad (2): $f(y) = \frac{e^y - 1}{y}$ a $g(x) = (x-1)\log 2$

$\lim_{x\to 1} g(x) = 0$ spojitost a $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$ dle tabulky

a podm. (P): $(x-1)\log 2 \neq 0$ na $P(1,\delta)$

Platí opět triv. pro libovolné $\delta > 0$.
VOLSF(P) dá závěr.

• Ad (1):

Podobné jako (2), akorát $g(x) = (2^x - 2)\log 4$

Chceme, aby $(2^x - 2)\log 4 \neq 0$ na $P(1,\delta)$

$\Leftrightarrow$ $2^x \neq 2$ na $P(1,\delta)$.

Víme, že 2^x je rostoucí fce a $2^1 = 2$.

Tedy opět libovolné δ.

Opět dá VOLSF(P) daný závěr.

Příklad (2c)

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\quad f(x) = \dfrac{2^{\cos x} - 2\cdot 3^{\sin^2 x}}{\arctan(\cot x^2) - \pi/2}$

- $2^{\cos x} - 2\cdot 3^{\sin^2 x} = 2\left[2^{\cos x - 1} - 1 - 3^{\sin^2 x} + 1\right]$

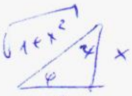
$$= 2\left[e^{(\cos x-1)\log 2} - 1 - \left(e^{\sin^2 x \log 3} - 1\right)\right]$$

$$= 2\left[\underbrace{\frac{e^{(\cos x-1)\log 2}-1}{(\cos x-1)\log 2}}_{\to 1}\log 2\,\underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}}\cdot x^2 - \underbrace{\frac{e^{\sin^2 \log 3}-1}{\sin^2 \log 3}}_{\to 1}\log 3\,\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1}\,x^2\right]$$

- $\arctan(\cot x^2) - \pi/2 = -\arctan\left(\dfrac{1}{\cot x^2}\right)$, neboť $\cot x^2 > 0$ pro $x \in P(0,\delta)$

(víme, že $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $x>0$)

Ale $\arctan\frac{1}{x} = \operatorname{arccot} x$, $x>0$



$\varphi = \arctan x$
$\psi = \arctan\frac{1}{x}$
$\psi = \operatorname{arccot} x$
$x>0$

$\Rightarrow \arctan(\cot x^2) = -\operatorname{arccot}(\cot x^2) = \underline{\underline{-x^2}}$

↑ inverzní fce k cot na $(0,\pi)$.

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2\left[\underbrace{\frac{e^{(\cos x-1)\log 2}-1}{(\cos x-1)\log 2}}_{\substack{\to 1\\(1)}}\log 2\,\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\substack{\to 1/2\\(2)}} + \underbrace{\frac{e^{\sin^2 x\log 3}-1}{\sin^2 x\log 3}}_{\substack{\to 1\\(3)}}\log 3\,\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\substack{\to 1\\(4)}}\right]$

$$= 2\left(\tfrac{1}{2}\log 2 + \log 3\right) = \log 2 + \log 3^2 = \underline{\underline{\log 18}}$$

Zbývá zdůvodnění bodů (1) až (4)

• Ad(2): Jedná se o tabulkovou limitu

• Ad(4): víme, že $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Stačí tedy použít A-L pro součin

(nebo VOLSF(S) s $f(y) = y^2$)

• Ad(3): $f(y) = (e^y - 1)/y$ a $g(x) = \log 3 \cdot \sin^2 x$.

Ovšem $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ ze spojitosti;

$\lim_{y \to 0} f(y) = 1$ dle tabulky

Podm (P): $\log 3 \cdot \sin^2 x \neq 0$ na $P(0,\delta)$

$\iff \sin^2 x \neq 0$ na $P(0,\delta)$.

... stačí třeba $\delta = \pi/2$.

$\Rightarrow$ VOLSF(P) dá závěr

• Ad(1): Podobně jako (3), akorát $g(x) = \log 2 (\cos x - 1)$

$g(x) \neq 0 \iff \cos x \neq 1$ na $P(0,\delta)$.

Opět stačí $\delta = \pi/2$

Příklad (3a)

$$f(x) = \operatorname{sign}(x^3 - 4x) \cdot \sin(x^3 - 2x^2)$$

Fce sin je spojitá na $\mathbb{R}$.

Dále je $x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2 - 4) = 0$.

Takže na intervalech $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, \infty)$

je sign konstantní, rovno 1, nebo -1.

Všude tam je tedy f spojitá.

Na těchto intervalech můžeme rovnou spočíst derivaci:

$$f'(x) = (3x^2 - 4x) \operatorname{sign}(x^3 - 4x) \cos(x^3 - 2x^2)$$

Spojitost v problémových bodech $0, \pm 2$:

- $x = 0$: $\lim_{x \to 0-} f(x) = \text{něco} \cdot \sin 0 = 0 = \lim_{x \to 0+} f(x)$

  a $f(0) = 0$.

- $x = 2$: $\lim_{x \to 2-} f(x) = \text{něco} \cdot \sin(8 - 8) = 0 = \lim_{x \to 2+} f(x)$

  a $f(2) = 0$.

- $x = -2$: $\lim_{x \to -2-} f(x) = -1 \cdot \sin(-8 - 8) = \sin 16$

  $\lim_{x \to -2+} f(x) = 1 \cdot \sin(-16) = -\sin 16$

  a $f(-2) = 0$

Tedy f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

a v bodě -2 není spojitá ani z jedné strany.

Pozn: f lze přepsat takto (někomu to může vyhovovat)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^3 - 2x^2), & x \in (-2, 0) \cup (2, \infty) \\ -\sin(x^3 - 2x^2), & x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2) \\ 0, & x \in \{0, \pm 2\}. \end{cases}$$

Derivace v bodech 0 a 2: f je zde spojitá,

použijeme tedy formulku pro výpočet jednostranné derivace.

- $f'_+(0) = \lim_{x \to 0_+} f'(x) = 0 \cdot (-1)\, \cos 0 = 0$

$f'_-(0) = \lim_{x \to 0_-} f'(x) = 0 \cdot (+1) \cos 0 = 0$

$\Rightarrow \underline{f'(0) = 0}.$

- $f'_+(2) = \lim_{x \to 2_+} f'(x) = 4 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 4$

$f'_-(2) = \lim_{x \to 2_-} f'(x) = 4 \cdot (-1) \cos 0 = -4$

$\Rightarrow$ $\underline{f'(2) \text{ neexistuje}}$.

Derivace v bodě -2: zde musíme použít definici

- $f(-2) = 0$
- $f(-2+h) = \underbrace{\operatorname{sign}\left((h-2)^3 - 4(h-2)\right)}_{= \begin{cases} 1, & h>0 \\ -1, & h<0 \end{cases} \text{ (malé)}} \cdot \sin\left((h-2)^3 - 2\cdot(h-2)^2\right)$

$$(h-2)^3 - 2(h-2)^2 = h^3 - 6h^2 + 12h - 8 - 2(h^2 - 4h + 4)$$
$$= h^3 - 8h^2 + 20h - 16$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0_+} \frac{f(h-2) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h}\Big(\underbrace{\sin(h^3 - 8h^2 + 20h - 16)}_{\to \sin(-16) \text{ spojitost}}\Big) = +\infty$$

$$\lim_{h \to 0_-} \frac{f(h-2) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0_-} -\frac{1}{h}\left(\sin(h^3 - 8h^2 + 20h - 16)\right) = +\infty.$$

Tedy $\underline{\underline{f'(-2) = +\infty}}$

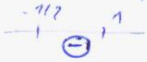
Příklad (3b).

$$f(x) = \arccos\left(\min\{2x^2, x+1\}\right).$$

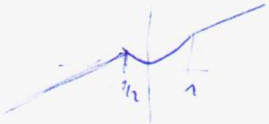
Spojitost: minimum ze dvou spoj. fcí je spojitá fce a její složení se spoj. fcí arccos je zase spojitá.
f je tedy spojitá na celém D_f.

Definiční obor f: $D_{\arccos} = [-1,1]$.
Zkoumáme tedy množinu $x \in \mathbb{R}$ splňující $-1 \le \min\{2x^2, x+1\} \le 1$

- $2x^2 \le x+1$
  $2x^2 - x - 1 \le 0$ $\qquad x_{1,2} = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{1+8}\right) = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$



$$\Rightarrow \min\{2x^2, x+1\} = \begin{cases} 2x^2, & x \in [-1/2, 1] \\ x+1, & x \in (-\infty, -1/2] \cup [1, \infty) \end{cases}$$



- $-1 \le 2x^2 \le 1$
  $-1 \le 2x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$
  $2x^2 \le 1 \iff x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

- $-1 \le x+1 \le 1$
  $-1 \le x+1 \iff -2 \le x \ \ldots \ x \in [-2, \infty)$
  $x+1 \le 1 \iff x \le 0 \ \ldots \ x \in (-\infty, 0]$

Procházíme postupně všemi $x \in \mathbb{R}$:

- $x \in (-\infty, -1/2]$ .. $\min() = x+1$ a má platit $-1 \le x+1 \le 1$
  $\iff x \in [-2, 0]$
  $\rightsquigarrow$ $\underline{x \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right]}$
- $x \in [-1/2, 1]$ .. $\min() = 2x^2$ a má platit $-1 \le 2x^2 \le 1$
  $\iff x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
  $\rightsquigarrow$ $\underline{x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$
- $x \in [1, \infty)$ .. $\min() = x+1$ a $-1 \le x+1 \le 1$
  $\iff x \in [-2, 0]$
  $\rightsquigarrow x \in \emptyset$. Tedy $\underline{\underline{D_f = \left[-2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}}$

Fci f můžeme přepsat do tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \arccos(x+1) , & x \in [-2, -\frac{1}{2}] \\ \arccos(2x^2) , & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \end{cases}$$

Derivace pak prostě je

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{1-(1+x)^2}} , & x \in (-2, -1/2) \\ \dfrac{-4x}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} , & x \in (-1/2, 1/\sqrt{2}) . \end{cases}$$

Zbývá derivace v krajních bodech:

Využijeme spojitost a spočteme tam derivace jako jednostranné limity

- $f'_+(-2) = \lim\limits_{x \to -2+} f'(x) = \underline{\underline{-\infty}}$

(v podstatě triviální aritmetika "$-1/0$")

- $f'_-(1/\sqrt{2}) = \lim\limits_{x \to 1/\sqrt{2}-} f'(x) = \underline{\underline{-\infty}}$

- $f'_+(-1/2) = \lim\limits_{x \to -1/2+} f'(x) = \dfrac{-4 \cdot (-1/2)}{\sqrt{1-(1/2)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-1/4}}$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{\sqrt{3}}}}$$

- $f'_-(-1/2) = \lim\limits_{x \to -1/2-} f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(1-1/2)^2}} = \underline{\underline{\dfrac{-2}{\sqrt{3}}}}$.

Tedy $f'(-1/2)$ neexistuje.

Příklad (4a).

$$f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^3}\right)$$

arccot x ...

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f je zde spojitá coby složení spoj. fcí

Průsečíky: $x=0$ .. $y = \operatorname{arccot} 1 = \pi/4$

$y=0$ $\quad 0 = \operatorname{arccot} \frac{1}{1-x^3}$ není řešení ($\operatorname{arccot} > 0$)

Limity:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{\text{spoj}}{=} \operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{\text{spoj}}{=} \operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$$

(To vlastně dává i ~~lim~~ asymptoty)

$$\lim_{x\to1-} f(x) \overset{\text{sp}}{=} \operatorname{arccot} \frac{1}{0_+} = 0$$

$$\lim_{x\to1+} f(x) \overset{\text{sp}}{=} \operatorname{arccot} \frac{1}{0_-} = \pi$$

Všude využíváme VOLSF(S) a triv. limity $\frac{1}{1-x^3}$

Zjevně není sudá, lichá ani periodická (např. protože chybí bod 1)

Derivace:

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x^3}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{1-x^3}\right)' = -\frac{(1-x^3)^2}{(1-x^3)^2+1} \cdot \frac{-(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$$

$$= \frac{-3x^2}{1+(1-x^3)^2}, \quad x \in D_f.$$

Vidíme, že $f' < 0$ na D_f, tedy f klesá na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$.

Nemá tedy ani žádné lokální extrémy.

$$f''(x) = \frac{1}{(1+(1-x^3)^2)^2}\left[-6x(1+1-2x^3+x^6)+3x^2\cdot 2(1-x^3)(-3x^2)\right]$$

$$= \frac{-12x+12x^4-6x^7-18x^4+18x^7}{(1+(1-x^3)^2)^2}$$

$$= 6x\,\frac{2x^6-x^3-2}{(1+(1-x^3)^2)^2}, \quad x \in D_f$$

Kořeny čitatele: $2y^2 - y - 2 = 0$ $\quad y_{1,2} = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{17}\right)$

$x^3 = y \rightsquigarrow x_1 = \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{17}}{4}}$

$x_2 = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{17}}{4}}$

Tedy $f''(x) = \frac{6x}{(\ )^2}(x-x_1)(x-x_2)\underbrace{\overbrace{(x-\bar{x}_3)(x-x_3)}^{>0}\overbrace{(x-\bar{x}_4)(x-x_4)}^{>0}}_{>0}$

$- \quad + \quad - \quad +$

$x_1 \quad 0 \quad 1 \quad x_2$

$- \quad - \quad + \quad +$

$- \quad + \quad + \quad +$

$- \quad - \quad - \quad +$

f je konvexní na intervalech $(x_1, 0), (x_2, +\infty)$

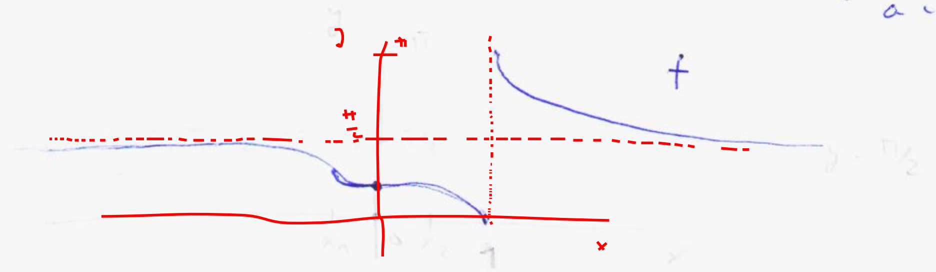
konkávní $(-\infty, x_1), (0, 1), (1, x_2)$

Inflexní body (kde se mění konv./konk.) jsou tedy zjevně body $x_1, 0, x_2$

Graf:

$H_f = (0, \pi/2) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Díky spojitosti f a větě o nabývání mezihodnot.



Pozn. $\cdot\ f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{1-x^3}\right)$, $x \in D_f$

$\cdot\ \frac{1}{1-x^3} > 0 \iff x \in (-\infty, 1)$

Tedy $f(x) = \begin{cases} \arctan(1-x^3), & x < 1 \\ \arctan(1-x^3) + \pi, & x > 1 \end{cases}$

(Alternativní zápisy)

Příklad (1b).

$$f(x) = \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\sin x + \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

$\sin x < \frac{3}{\sqrt{2}}$, neboť $3/\sqrt{2} > 1$, tj. f je def. na celém $\mathbb{R}$ $(D_f = \mathbb{R})$

a jakožto podíl spojitých funkcí je f spojitá (na $\mathbb{R}$).

Zjevně je 2π-periodická. Budeme tedy f zkoumat na intervalu $[0, 2\pi]$.

$\cdot\ x = 0,\ y = \frac{-1/2}{3/\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3\sqrt{2}}.$ $(= f(0) = f(2\pi))$

$\cdot\ y = 0 \iff \sin x = 1/2$, tj. $x = \pi/6$ a $\frac{7}{6}\pi$

$$f'(x) = \frac{\cos x\,[\sin x + 3/\sqrt{2}] - \cos x\,[\sin x - 1/2]}{(\sin x + 3/\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{\cos x\,\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)}{(\sin x + 3/\sqrt{2})^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

$f' > 0 \iff \cos x > 0 \iff x \in (0, \pi/2) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$

Vidíme tedy, že f je rostoucí na intervalech $[0, \frac{\pi}{2}]$ a $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ a klesající na $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.

V bodě $\frac{\pi}{2}$ je lok. maximum a v $\frac{3}{2}\pi$ je lok. minimum.

Tyto extrémy jsou zjevně i globální (periodicita, omezenost)

$$f(\pi/2) = \frac{1/2}{1 + 3/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 6} = h$$

$$f(3\pi/2) = \frac{-3/2}{-1 + 3/\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{-2\sqrt{2} + 6} = d$$

$\Rightarrow H_f = [d, h]$ díky větě o nabývání mezihodnot (f je sp.)

Je evidentní, že f nemá asymptoty (případně topořebné spočtěme limity.)

Spočteme druhou derivaci

$$f''(x) = \left[\frac{\cos x \cdot \left(3/\sqrt{2} + 1/2\right)}{\left(\sin x + 3/\sqrt{2}\right)^2}\right]' =$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \frac{-\sin x \cdot \left(\sin x + 3/\sqrt{2}\right)^2 - 2\cos x \cdot \left(\sin x + 3/\sqrt{2}\right)\cos x}{\left(\sin x + 3/\sqrt{2}\right)^4}$$

$$= \underbrace{\frac{3/\sqrt{2} + \frac{1}{2}}{\left(\sin x + 3/\sqrt{2}\right)^3}}_{>0} \left[-\sin x \left(\sin x + 3/\sqrt{2}\right) - 2\cos^2 x\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'' > 0 \iff \sin^2 x - \sin x \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 > 0$$

$$y^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} y - 2 > 0$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{9}{2} + 8}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \pm \frac{5}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} 2\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$y \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(2\sqrt{2}, \infty\right)$$

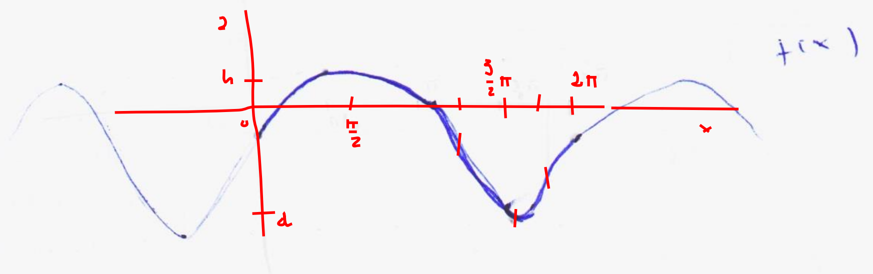
$y = \sin x$ ... $\sin x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ tj. $x \in \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$

Proto je f konvexní na $\left(\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$

konkávní na $\left(0, \frac{5}{4}\pi\right)$ a $\left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right)$

Inflexní body tedy jsou $\frac{5}{4}\pi$ a $\frac{7}{4}\pi$.

Graf.



Zjevně není ani sudá, ani lichá.