VII. Průběh funkce

Postup při vyšetřování funkce.

- Na začátku.
  - Definiční obor f.
  - Sudost/lichost a periodicita.
  - Průsečíky s osami. Případně "zajímavé"hodnoty.
  - Limity v krajních bodech definičního oboru.
  - Spojitost funkce.
- První derivace.
  - Mechanický výpočet první derivace v maximálním otevřeném intervalu.
  - Určení definičního oboru f'.
  - Spočítání f' ve zbývajících bodech - vzorec využívající jednostrannou spojitost nebo případně definice (nemáme-li příslušnou jednostrannou spojitost).
  - Znaménka derivace.
  - Intervaly monotonie. Lokální extrémy f.
- Druhá derivace.
  - Mechanický výpočet druhé derivace v maximálním otevřeném intervalu.
  - Obvykle není nutné se zaobírat výpočtem jednostranných druhých derivací, nicméně v principu to možné je.
  - Znaménka druhé derivace.
  - Intervaly konvexity/konkávnosti funkce f.
- Graf.
  - Obor hodnot - ze znalosti extrémů a limit.
  - Asymptoty v nekonečnech. (Zkoumáme limity $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: k$ a $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) =: q$, asymptota, pak má tvar $kx+q$. Totéž v $-\infty$.)
  - Náčrtek grafu.

Příklad 1. [Zahřívací příklady] Vyšetřete průběh funkce f:

(a) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.
(b) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.
(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.
(d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.
(e) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{x^2+1}$.
(f) $f(x) = \frac{x^4+8}{x^3+1}$.
(g) $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-|x|}$.
(h) $f(x) = 2x - \tan x$.
(i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}e^{-x}$.
(j) $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.
(k) $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$.
(l) $f(x) = \frac{|x+1|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.
(m) $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.
(n) $f(x) = \sin x + \cos^2 x$.
(o) $f(x) = |\sin x| + \cos 2x$.
(p) $f(x) = e^{-x^2+3x-7}$.
(q) $f(x) = \arcsin(\cos^2 x)$.
(r) $f(x) = \arctan \frac{x+1}{x-1}$.
(s) $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$.
(t) $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.
(u) $f(x) = |x| + \arctan |x-1|$.
(v) $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.
(w) $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$.
(x) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{x^2-1}}$.

Příklad 2. [Zkouškové příklady] Vyšetřete průběh funkce f:

(a) $f(x) = |x+3| + 2\arctan|x+1|$.
(b) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x + 1}$ pro $x \geq 0$.
(c) $f(x) = \frac{4^x - 12}{(2^x-9)^2}$.
(d) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x-3}}$.
(e) $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^3}\right)$.
(f) $f(x) = \sqrt[4]{|x^4 - 5x^2 + 4|}$.
(g) $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2-2}}$.
(h) $f(x) = \arctan \frac{2}{x} + \log(x^2+4) - \frac{x}{4}$.
(i) $f(x) = \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\sin x + \frac{3}{\sqrt{2}}}$.
(j) $f(x) = \arctan\left(\frac{8x}{x^2-25}\right)$.
(k) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 7x}$.
(l) $f(x) = \frac{x\sqrt[9]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-3}}$.
(m) $f(x) = xe^{-\frac{1}{\log^2 x}}$.