

V. Limity funkcí

Shrnutí teorie.

Definice. (Limita funkce) Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}^*$ je limitou reálné funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P_\delta(c) : f(x) \in B_\varepsilon(A).$$

Příčemž pro reálná $c \in \mathbb{R}$ symbol $P_\delta(c)$ značí množinu $(c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$, tj. prstencové δ -okolí bodu c . Podobně $B_\delta(c)$ reprezentuje $(c - \delta, c + \delta)$, tj. δ -okolí bodu c . Pro c z rozšířené reálné roviny značíme $P_\delta(+\infty) = (\frac{1}{\delta}, +\infty) = B_\delta(+\infty)$, podobně i okolí bodu $-\infty$.

Nastává-li situace situace definovaná výše, tak píšeme $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

Limity jsou jednoznačně určené.

Dále je dobré vědět co je spojitost funkce v bodě. Souvislost s jednostrannými limitami. Opět platí věta o aritmetice limit jako u posloupností a také věta o limitě a uspořádání, jejímž důsledkem je věta o dvou policajtech. Máme ale dvě nové věty.

Tvrzení. (Heine) Necht' $c, A \in \mathbb{R}^*$ a pro reálnou funkci f platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$. Bud' $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost prvků z \mathcal{D}_f taková, že $x_n \neq c, \forall n \in \mathbb{N}$, a splňující $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$. Potom platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$.

Příklad: Víme-li, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, tak dle této věty máme, že i $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$, neboť vezmeme posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, která má za limitu číslo 0.

Tvrzení. (Limita složené funkce) Bud' $c, A, B \in \mathbb{R}^*$ a pro reálné funkce f a g necht' platí $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = A$ a $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ a platí alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) $\exists \delta > 0 \forall x \in P_\delta(c) : g(x) \neq A$.

(S) Funkce f je spojitá v bodě A .

Potom je $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = B$.

Příklad (P): Položme $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, máme $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$. Vezměme třeba $g(x) = x^2 - 1$, máme $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0$. Vidíme, že na nějakém malém prstencovém okolí bodu -1 je g různá od 0. Platí tedy podmínka (P) výše, a platí proto $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} = 1$.

Poznamenejme, že f není v nule spojitá. Není tam totiž ani definovaná.

Příklad (S): Tentokrát vezměme funkci $f(y) = e^y$, pak $\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = e$. Podmínka (S) je zjevně splněna. Takže $\lim_{x \rightarrow c} e^{g(x)} = e$, kdykoliv $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 1$, třeba $g(x) = \frac{x}{x-1}$ a $c = +\infty$.

Tvrzení. (Známé limity)

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. | 7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$. |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. | 8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$. |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. | 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$. |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$. | 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$. |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. | 11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^\beta} = 0 \ (\alpha, \beta > 0)$. |
| 6. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$. | 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \ (\alpha > 0, a > 1)$. |

Nakonec se hodí znát, že obecná mocnina a^b , kde $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$, se zavádí pomocí exponenciály, tj. $a^b = e^{b \log a}$. Známe-li derivace, tak máme ještě jeden, někdy užitečný, výsledek.

Tvrzení. (l'Hospital) Necht' funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Necht' platí jedna z podmínek:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$.

Potom existuje i limita podílu funkcí f a g a platí rovnost $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Příklad 1. [Elementární] Určete limity a ověřte je z definice:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} x$. (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+2}$. (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$.
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$. (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$. (f) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x - 11)$.

Příklad 2. [Spojitost, základní vlastnosti, rac. funkce] Určete limity:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$. (j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$.
 (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)^2$. (k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+3x+5-\frac{1}{x}}{8x^3+4x^2-3}$.
 (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$. (l) $\lim_{x \rightarrow 2} \log(x-3)$.
 (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{7+x}$. (m) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
 (e) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{-3}{7+x}$. (n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-2x}{2x^3+x^2-3x}$.
 (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x+1}$. (o) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.
 (g) $\lim_{x \rightarrow 1} \lfloor x \rfloor - x$. (p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.
 (h) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. (q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x$.
 (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x-1}$.

Příklad 3. [Odmocniny] Určete limity:

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x-1}}$.
 (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. (j) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.
 (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$. (k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$.
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$. (l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}$.
 (e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$. (m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}]$.
 (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$. (n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2-2x-\frac{1}{x}}{3x^2+3}}$.
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.
 (h) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[3]{9+x}-2}$.

Příklad 4. [Goniometrické funkce] Určete limity:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$. (o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$.
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2}$. (p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{8x}}$. (q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x} \cdot \sin x - \sqrt{\cos x}}$.
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \log \frac{x}{\sin x}$. (r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos x}$.
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1-\cos 4x^2}$. (s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.
 (f) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot 3x$. (t) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\left| \cos \frac{1}{x} \right|}$.
 (g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$. (u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$.
 (h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2 \cos x}$. (v) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$.
 (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$. (w) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(x-\frac{\pi}{4})^2}$.
 (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$. (x) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1})$.
 (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{1-\sin x - \cos x}$. (y) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^5}}}{\arcsin(\sqrt{x^5+1} - \sqrt{x^5-1})}$.
 (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$. (z) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}$.
 (m) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$.
 (n) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$.

Příklad 5. [Mocninné funkce & logaritmy] Určete limity:

- | | |
|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{x}$. | (l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1-x+x^2)}{\log(x^{10}+x+1)}$. |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)}$. | (m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\log(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$. |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 5} -e^{-\frac{1}{x}} $. | (n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)}$. |
| (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{3-x}}$. | (o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$. |
| (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(1 - \frac{3}{x}\right)$. | (p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 - \arctan x)}{\log(x^2 + \arctan x)}$. |
| (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$. | (q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\log(x^2+4) - \log(x^2)}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x}$. |
| (g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)}$. | (r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{e^{x^2} - 1}$. |
| (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}$. | (s) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{x-1} + \sqrt[3]{\cos(\pi x)}}{\log^2 x}$. |
| (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\log(x+1) - \log x)$. | |
| (j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1+2^x) \cdot \log\left(1 + \frac{3}{x}\right)$. | |
| (k) $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x}$. | |

Příklad 6. [Exponenciální trik] Určete limity:

- | | |
|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x)(1-\sqrt{x})}$. | (j) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\cot^2 x}$. |
| (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. | (k) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \left(\tan\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right)^{\tan 2x}$. |
| (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$. | (l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$. |
| (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x$. | (m) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$. |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$. | (n) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$. |
| (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$. | (o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$. |
| (g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$. | (p) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x \cdot 2^x}{1+x \cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. |
| (h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$. | (q) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$. |
| (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+\log x}{\log x}\right)^{\log x}$. | (r) $\lim_{x \rightarrow 0+} (e^x - 1)^{\frac{\tan^2 x}{x^\alpha}}$. |
| | (s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^x - \sqrt{1+\sin^3 x}}{x^3}$. |

Příklad 7. [Heine] Určete limity:

- | |
|---|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n + \cos \frac{3}{n}}}{\sqrt[6]{n^2 + \sin \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{n}}$. |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(\sqrt{n^2 + \sin^2 n} - \sqrt{n^2 - \cos^2 n})}{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}$. |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)$. |
| (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n + 1)}{\sqrt[3]{n^3 + 2n^2}}$. |
| (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(10^{n^2} + 10^n + n^2) \sin \frac{2n}{n^3 + n}$. |

Příklad 8. [Zkouškové příklady] Určete limity:

- | |
|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - \cos^2 x) \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$. |
| (b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 \sin^2 x) \frac{1}{\sin x - \cos x}$. |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{4x} + (4x)^x - 2}{(2x)^x - 1}$. |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{\log(\cos x)}$. |

- (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + \sqrt{\tan x}}{\cos \sqrt{x}} \right)^{\frac{\sqrt{1 - \sqrt{\sin x}} - \sqrt{1 + \sqrt{\tan x}}}{x}}$.
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} - 1 \right)^{\frac{1}{\sin(x^4)}}$.
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4^{\tan x} + \cos x}{2} \right)^{\cot x}$.
- (h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \sin x)^{\frac{2}{\pi - 6x}}$.
- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)} \right)^{x \log x}$.
- (j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (2 \cos x)^{\frac{\sqrt{3}}{\pi - 3x}}$.
- (k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^{2x} - 16}{\sqrt{1 - \cos(2\pi x)}}$.
- (l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(8^x + 4^x + 2^x + 1) \cdot \cot\left(\frac{2}{x}\right) \cdot (\sqrt{x^6 + x + 3} - \sqrt{x^6 - x - 3})$.
- (m) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \right)^{\cot^2(\pi x)}$.
- (n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^{\frac{\pi}{x \cdot \operatorname{arccot}^2 x}}$.
- (o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\cos x} - 2 \cdot 3^{\sin^2 x}}{\arctan(\cot(x^2)) - \frac{\pi}{2}}$.
- (p) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\tan x)^{\sin x} \right)^{\frac{1}{\arcsin x \cdot \log x}}$.
- (q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{e^x - x - \cos x - x^2}$.
- (r) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \sqrt{\arcsin x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1 - \cos x}}}$.
- (s) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^3 \cos x - x}}{x \cdot \cos(\arctan(\frac{1}{x^2}))}$.

Příklad 9. [Teoretické příklady na zaplnění místa]

- (a) Čemu se rovná limita spojitě a liché funkce v 0?
- (b) Najděte lichou funkci, která nemá v 0 limitu.
- (c) Předpokládejme, že má omezená, lichá funkce v 0 limitu. Čemu se tato limita rovná?
- (d) Nechť má reálná funkce f v bodě x_0 vlastní limitu L . Ukažte, že potom platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|.$$

- (e) Buď $f : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ funkce, která není konstantní. Definujme funkci $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = f(\sin x)$. Dokažte, že neexistuje $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- (f) Mějme reálnou funkci f splňující $f(x) \geq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$ bod ve kterém existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}} + \sqrt{f(x)} \right].$$

Ukažte, že potom existuje i limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Výsledky - V. Limity funkcí

Příklad 1. [Elementární]

- | | | |
|-------------------------------------|----------------|--------|
| (a) 0. | (c) 1. | (e) 0. |
| (b) Neexistuje. Vyjde $\pm\infty$. | (d) ∞ . | (f) 9. |

Příklad 2. [Spojitost, základní vlastnosti, rac. funkce]

- | | | |
|-----------------|---------------------|---------------------------------------|
| (a) 1. | (g) Neexistuje. | (m) $+\infty$. |
| (b) $+\infty$. | (h) 1. | (n) $\frac{2}{3}$. |
| (c) 0. | (i) 6. | (o) $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$. |
| (d) 0. | (j) Neexistuje. | (p) 6. |
| (e) Neexistuje. | (k) $\frac{1}{8}$. | (q) $+\infty$. |
| (f) 0. | (l) Neexistuje. | |

Příklad 3. [Odmocniny]

- | | | | |
|---------------------|------------------------|----------------------------|----------------------------|
| (a) 1. | (e) $\frac{1}{144}$. | (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. | (l) 1. |
| (b) -1 . | (f) $\frac{1}{2}$. | (j) $\frac{4}{3}$. | (m) $\frac{4}{3}$. |
| (c) 0. | (g) $\frac{3}{2}$. | (k) $\frac{1}{2}$. | (n) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. |
| (d) $\frac{1}{2}$. | (h) $\frac{112}{27}$. | | |

Příklad 4. [Goniometrické funkce]

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------|------------------|
| (a) 5. | (h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. | (o) -3 . | (v) $\sqrt{2}$. |
| (b) 3. | (i) $\frac{1}{2}$. | (p) $\frac{1}{4}$. | (w) Neexistuje. |
| (c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. | (j) 2. | (q) $\frac{4}{3}$. | (x) 0. |
| (d) 0. | (k) -1 . | (r) $\sqrt{2}$. | (y) 1. |
| (e) $\frac{1}{8}$. | (l) 4. | (s) $-\frac{1}{12}$. | (z) 2. |
| (f) $\frac{1}{3}$. | (m) $\frac{1}{2}$. | (t) 0. | |
| (g) 0. | (n) $\cos a$. | (u) 1. | |

Příklad 5. [Mocninné funkce & logaritmy]

- | | | | |
|-------------------------------|----------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| (a) 3. | (f) 0. | (k) e . | (p) $\frac{3}{2}$. |
| (b) -1 . | (g) 0. | (l) $\frac{1}{5}$. | (q) 2. |
| (c) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$. | (h) $-\frac{1}{2}$. | (m) $\frac{3}{2}$. | (r) $+\infty$. |
| (d) 1. | (i) 1. | (n) $\frac{\log 3}{\log 2}$. | (s) $1 + \frac{\pi^2}{6}$. |
| (e) -3 . | (j) $3 \log 2$. | (o) $\frac{1}{2}$. | |

Příklad 6. [Exponenciální trik]

- | | | |
|----------------------------|-----------|---|
| (a) $\frac{1}{2}$. | (g) 0. | (n) 1. |
| (b) e . | (h) 0. | (o) 1. |
| (c) e^{-2} . | (i) e . | (p) $\frac{2}{3}$. |
| (d) 1. | (j) e . | (q) $\frac{1}{e}$. |
| (e) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. | (k) 0. | (r) $1 (\alpha < 2), 0 (\alpha \geq 2)$. |
| (f) e^3 . | (l) 1. | (s) -1 . |
| | (m) e . | |

Příklad 7. [Heine]

- (a) $\frac{9}{2}$. (b) $\frac{1}{2}$. (c) 1. (d) $\log 3$. (e) $2 \log 10$.

Příklad 8. [Zkouškové příklady]

- (a) \sqrt{e} . (k) Neexistuje. Vyjde $\pm \frac{32}{\pi} \sqrt{2} \log^2 2$.
(b) $e^{\sqrt{2}}$. (l) $\frac{3}{2} \log 2$.
(c) 5. (m) $e^{\frac{1}{2\pi^2}}$.
(d) $\frac{7}{6}$. (n) $\frac{1}{e^2}$.
(e) $\frac{1}{e}$. (o) $\log 18$.
(f) $\sqrt[4]{e}$. (p) e .
(g) 2. (q) 2.
(h) $e^{-\sqrt{\frac{1}{3}}}$. (r) $e^{-\sqrt[4]{2}}$.
(i) e^2 . (s) $-\frac{1}{6}$.
(j) e .