

IV. Limity posloupností

Připomenutí.

Definice. (Limita posloupnosti) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že L je **vlastní limita posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (či $-\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (či } < K).$$

Limity jsou jednoznačně určené.

Tvrzení. (O vybrané posloupnosti) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel s limitou $A \in \mathbb{R}$. Buď posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom už $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$.

Tvrzení. (Aritmetika limit) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a mějme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$, má-li RHS smysl.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$, má-li RHS smysl.
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, má-li RHS smysl.

Tvrzení. (Dva policajti / Sendvič) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel splňující

- (a) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$ a
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \in \mathbb{R}$,

potom je $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

Tvrzení. (Limita součinu omezené a mizející posloupnosti) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující

- (a) $\{a_n\}_n$ je omezená a
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

potom je $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Tvrzení. (O posloupnosti s kladnými členy) Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel a $m \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = a^m \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[m]{a}$.

Příklad 1. [Elementární] Určete limity a ověřte je z definice:

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2$. | (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3$. | (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n$. | (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$. | (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n$. |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$. | (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}$. | (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(-n)$. |
| (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n$. | (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$. | (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n$. |
| (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} 7^n$. | (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}$. | (o) $\lim_{n \rightarrow \infty} n!$. |

Příklad 2. [Skákající znaménka] Určete limity:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$. (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi n) \cdot n^{\frac{3}{4}}$. (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n)$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$. (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi n}{2}$.
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n$. (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n$. (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$.

Příklad 3. [Racionální funkce & odmocniny] Určete limity:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} -n^7 + 13n^4 - 123n + 12$. (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+11} - \sqrt{n}$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n-6}{n+2}$. (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}$.
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4-2n^3+n}{5n^4+2n^2}$. (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt[3]{n}$.
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n}{2n^3-n^2+2}$. (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}$. (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n-2}$.
 (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^3+1}}{n-1}$. (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-3} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2-1} - \sqrt{(n+2)^2}}$.
 (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+11} + \sqrt{n}$. (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}$.

Příklad 4. [Růstové škály] Dokažte následující:

- (a) Pro n velká platí $n^3 \leq 2^n \leq n! \leq n^n$. (f) Pro $a > 1, b > 0$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$.
 (b) Pro $a > 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$. (g) Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.
 (c) Pro $1 > a > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$. (h) Pro $a > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
 (d) Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. (i) Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
 (e) Pro $a > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. (j) Pro $a > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$.

Příklad 5. [Mocninné funkce & n -té odmocniny] Určete limity:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n$. (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$. (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + n} - n$.
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n+2^n+3^n+4^n+5^n}{(5,0001)^n}$. (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3n+2} \cdot 2^n - \sqrt{3n^2+2n}}$.
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$. (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$.
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$. (o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2^n]{2^n+5^n}}{\sqrt[2^n]{6^n+\sqrt{n}}}$.
 (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n+n^7+1}{n^8+n!}$. (p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3+2\sqrt[2^n]{2n}}$.
 (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+n^5+(n+1)!}{n(n^6+n!)^n}$. (q) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}$.
 (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2i}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$. (r) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n+3^n \sin 2^n}{5^n+4^n \cos(n!)}}$.
 (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}$.
 (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4+2^n+3^n}$.

Příklad 6. [Mix předchozího] Bud' $a, b, c > 0$, určete limity:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + (-1)^{n+1}}{n}$. (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$. (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}$.
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$. (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$. (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$.
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{a^{2n}+b^{2n}}}$.

Příklad 7. [Éčko] Určete limity:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$. (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$.
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$. (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

Příklad 8. [Celá část] Určete limity:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n$. (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n \rfloor$. (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sqrt{n^3+1}| + |\sqrt{n^3-1}|}{\sqrt[3]{1^n+2^n+\dots+n^n}}$.
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}$. (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[3]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt{n} \rfloor}$.

Příklad 9. [Zkouškové příklady] Určete limity:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt[4]{n^4+n^3}}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt[3]{n^3+2n}}$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\sqrt[n]{n^{2n} + (2n)^n}}{\sqrt[n]{n^{3n} + (3n)^n}}$.
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{99} - \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{33}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{99} - \left(8 + \frac{12}{n}\right)^{33}}$.
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^4 + \sqrt[3]{n}} - \sqrt[3]{n^4}\right) (\lfloor \sqrt[3]{n+1} \rfloor + 2\lfloor \sqrt[3]{n-1} \rfloor + \dots + n\lfloor \sqrt[3]{n + (-1)^{n+1}} \rfloor)$.
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n + \cos \frac{3}{n}}}{\sqrt[n]{n^2 + \sin \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{n}}$.
 (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{4n} + (4n)^n} \left(\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)^{18} - \left(4 + \frac{4}{n^2}\right)^9 \right)$.
 (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^{48} + n} - \sqrt[3]{n^{48} + n^2})((n^3 + 3)^{12} - (n^4 + 4n)^9)$.
 (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1^1 + 2^2 + \dots + n^n)}{\sqrt{n^4 + 2n^3} \log n - \sqrt{n^4 - n^3}}$.
 (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(\sqrt{n^2 + \sin^2 n} - \sqrt{n^2 - \cos^2 n})}{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}$.
 (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[n]{n^{\log n} + e^n + (\log n)\sqrt{n}} \right]$.
 (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right)$.
 (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n + 1)}{\sqrt[3]{n^3 + 2n^2}}$.
 (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(10^{n^2} + 10^n + n^2) \sin \frac{2n}{n^3 + n}$.
 (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + 15n)^{10} - (n^2 + 10)^{15}}{(n^3 + 2n^2 + 1)^9 - (n+1)^{27}}$.
 (o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n + \left(\frac{3n+1}{n+3}\right)^n}$.

Výsledky - IV. Limity posloupností

Příklad 1. [Elementární]

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|------------------------|
| (a) 2. | (e) ∞ . | (i) 0. | (m) $-\frac{\pi}{2}$. |
| (b) ∞ . | (f) ∞ . | (j) ∞ . | (n) ∞ . |
| (c) 0. | (g) 0. | (k) 0. | (o) ∞ . |
| (d) ∞ . | (h) 0. | (l) ∞ . | |

Příklad 2. [Skákající znaménka]

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| (a) Neexistuje. | (d) Neexistuje. | (g) 0. |
| (b) 0. | (e) 0. | (h) Neexistuje. |
| (c) Neexistuje. | (f) Neexistuje. | (i) 0. |

Příklad 3. [Racionální funkce & odmocniny]

- | | | | |
|---------------------|---------------------|-----------------|---------------------|
| (a) $-\infty$. | (e) $\frac{1}{2}$. | (i) 0. | (m) 0. |
| (b) ∞ . | (f) 0. | (j) ∞ . | (n) $\frac{1}{2}$. |
| (c) $\frac{1}{5}$. | (g) ∞ . | (k) Neexistuje. | |
| (d) 0. | (h) 0. | (l) 1. | |

Příklad 4. [Růstové škály]

- (a) Indukce a $3n^2 + 3n + 1 \leq n^3$ pro n velká.
- (b) Z definice.
- (c) Z definice.
- (d) Triviální rozepsáním.
- (e) Rozepsání a Archimédova vlastnost. Nebo limitní podílové kritérium ($a > 1$).
- (f) Limitní podílové kritérium.
- (g) Ukažte $n! \geq n^{\frac{n}{2}}$ pro n sudé a $n! \geq n^{\frac{n-1}{2}}$ pro n liché.
- (h) Bernoulliho nerovnost pro $x = \sqrt[n]{a} - 1$ a exponent n .
- (i) Bernoulliho nerovnost pro $x = \sqrt[n]{a} - 1$ a exponent $\frac{n}{2}$, nebo $\frac{n-1}{2}$.
- (j) Triviálně pomocí (h).

Příklad 5. [Mocninné funkce & n -té odmocniny]

- | | | | |
|---------------------|--------|----------------------------|---------------------|
| (a) ∞ . | (f) 0. | (k) 0. | (p) 0. |
| (b) 0. | (g) 1. | (l) 0. | (q) $\frac{2}{3}$. |
| (c) 0. | (h) 0. | (m) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. | (r) $\frac{4}{5}$. |
| (d) $\frac{1}{3}$. | (i) 1. | (n) 1. | |
| (e) 0. | (j) 3. | (o) $\frac{5}{\sqrt{6}}$. | |

Příklad 6. [Mix předchozího]

- | | | |
|----------------------|---------------------|--|
| (a) Neexistuje. | (e) 1. | (i) $\max\{a, b, c\}$. |
| (b) $-\frac{1}{2}$. | (f) 1. | (j) $\min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$. |
| (c) $\frac{1}{2}$. | (g) 0. | |
| (d) $\frac{1}{3}$. | (h) $\frac{1}{2}$. | |

Příklad 7. [Éčko]

- | | | |
|-------------|---------------------|-----------------------|
| (a) e . | (c) \sqrt{e} . | (e) $\frac{1}{e^2}$. |
| (b) e^2 . | (d) $\frac{1}{e}$. | (f) 1. |

Příklad 8. [Celá část]

- | | | |
|--------|---------------------|----------------|
| (a) 1. | (c) 2. | (e) ∞ . |
| (b) 0. | (d) $\frac{x}{2}$. | (f) 2. |

Příklad 9. [Zkouškové příklady]

- | | | |
|---------------------|------------------------|-----------------------|
| (a) $\frac{1}{6}$. | (f) $9 \cdot 2^{16}$. | (k) 1. |
| (b) 1. | (g) -6 . | (l) $\log 3$. |
| (c) 2^{-97} . | (h) 1. | (m) $2 \log 10$. |
| (d) $\frac{1}{6}$. | (i) $\frac{1}{2}$. | (n) $\frac{125}{3}$. |
| (e) $\frac{9}{2}$. | (j) 2. | (o) 3. |