Příklad. Vyřešme $\log(\cos x) - \alpha \in (0, +\infty)$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešíme tedy nerovnost $\log(\cos x) > \alpha$; kvůli přítomnosti logaritmu budeme hledat jen mezi těmi x, která splňují $\cos x > 0$, tj. pouze v intervalech $I_k = \big(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro tato x a (zatím libovolné α) nerovnost přepíšeme do tvaru

$$\cos x > e^{\alpha}.$$

- Je-li $\alpha \geq 0$, tak žádná x danou nerovnost nesplňují (neboť obor hodnot funkce cos na I_k je $(0, 1]$).
- Pro $\alpha < 0$ vyřešíme raději rovnost (stejně jako kdybyste si místo $x^2 > 1$ nejdříve spočetli $x^2 = 1$). Na $\cos x = e^{\alpha}$ tedy aplikujeme funkci arccos a dostaneme dvě sady řešení pro $k \in \mathbb{Z}$ (stejně jako v příkladu z I.I.(vi)):

  $$\begin{aligned} x &= \arccos e^{\alpha} + 2k\pi, \\ &= 2\pi - \arccos e^{\alpha} + 2k\pi. \end{aligned}$$

  Po zanesení do obrázku grafu či jednotkové kružnice (což zde dělat nebudu) je jasné, že řešením z I_k jsou „vnitřní části“ ve tvaru

  $$x \in (-\arccos e^{\alpha} + 2k\pi, \arccos e^{\alpha} + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

  Můžete si udělat tabulku, ale ta je triviální. △

Příklad. Vyřešme $\alpha \sin x \in (1, +\infty)$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pro $x \in \mathbb{R}$ řešíme nerovnost tvaru $\alpha \sin x > 1$.

- Pro $\alpha = 0$, žádné x tuto nerovnost nesplňuje.
- Je-li $\alpha > 0$, tak bez problémů vydělíme a obdržíme $\sin x > \frac{1}{\alpha}$.
  - Pro $\alpha \leq 1$ je $\frac{1}{\alpha} \geq 1$ a tedy nerovnost nemá řešení.
  - Pro $\alpha > 1$ je $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ a můžeme invertovat příslušnou krajní rovnost, tj. v krajním případě by platilo, že pro $k \in \mathbb{Z}$ máme (viz. poznámka o inverzních funkcích)

    $$\begin{aligned} x &= \arcsin \frac{1}{\alpha} + 2k\pi, \\ &= \pi - \arcsin \frac{1}{\alpha} + 2k\pi. \end{aligned}$$

    Po zanesení do obrázku grafu či jednotkové kružnice (což zde dělat nebudu) je jasné, že řešením jsou body

    $$x \in \Big(\arcsin \frac{1}{\alpha} + 2k\pi, \pi - \arcsin \frac{1}{\alpha} + 2k\pi\Big),\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Je-li $\alpha < 0$, tak vydělíme a obdržíme $\sin x < \frac{1}{\alpha}$.
  - Pro $\alpha \geq -1$ je $\frac{1}{\alpha} \leq -1$ a nerovnost nemá řešení.
  - Pro $\alpha < -1$ je $0 > \frac{1}{\alpha} > -1$ a můžeme invertovat příslušnou rovnost a dostaneme formálně stejná řešení. Z obrázku je nyní jasné, že řešením nerovnice jsou body

    $$x \in \Big\langle 2k\pi, \arcsin \frac{1}{\alpha} + 2k\pi\Big) \cup \Big(\pi - \arcsin \frac{1}{\alpha} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\Big\rangle,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dohromady máme, že

$$\begin{aligned} |\alpha| \leq 1 &: x \in \emptyset, \\ \alpha > 1 &: x \in \Big(\arcsin \frac{1}{\alpha} + 2k\pi, \pi - \arcsin \frac{1}{\alpha} + 2k\pi\Big),\ k \in \mathbb{Z}, \\ \alpha < -1 &: x \in \Big\langle 2k\pi, \arcsin \frac{1}{\alpha} + 2k\pi\Big) \cup \Big(\pi - \arcsin \frac{1}{\alpha} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\Big\rangle,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

△