VI. Průběhy funkcí

Postup při vyšetřování průběhu funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Předehra.
  - Definiční obor f a spojitost.
  - Průsečíky s osami (pokud to lze, může vyplynout z extrémů). Případně „zajímavé“ hodnoty.
  - Sudost/lichost a periodicita. Často je z tvaru $\mathcal{D}_f$ či nesymetrie průsečíků jasné, že nemůže být to či ono. Nebo je naopak zjevné, že je např. sudá (co se děje po dosazení $-x$?).

  Je-li f sudá/lichá, tak se omezím na množinu $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty)$ a zkoumám vlastnosti funkce zde. Je-li f periodická, tak se omezím na nějaký interval, který má délku této periody.
- Limity
  - Spočítáme limity v krajních bodech definičního oboru. Typicky se jedná o hodnoty v $\pm\infty$ a v pár bodech vyřazených z definičního oboru. Obvykle není problematické.
  - Asymptoty v nekonečnech. Zkoumáme limity $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: k$ a $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) =: q$, asymptota, pak má tvar $kx+q$. Totéž v $-\infty$. Můžeme získat celkem žádnou (k či q neexistují), jednu nebo dvě různé asymptoty.
  - Načrtnu si kostru grafu. Vidím definiční obor, průsečíky, limity. To mi říká, že funkce někde určitě roste/klesá, někde musí mít extrém daného typu. (Sem se průběžně vracíme.)
- První derivace.
  - Mechanický výpočet první derivace v maximálních otevřených intervalech.
  - Určení definičního oboru f'.
  - Spočítání f' ve zbývajících bodech - vzorec využívající jednostrannou spojitost (Věta 45) nebo případně definice (nemáme-li příslušnou jednostrannou spojitost).
  - Znaménka f', její kořeny.
  - Intervaly monotonie (Věta 44). (Separátně na jednotlivých intervalech, ne na sjednocení.)
  - Lokální extrémy f. Z nich vyčteme globální extrémy a určíme $\mathcal{H}_f$ (Věta 31).
- Druhá derivace.
  - Mechanický výpočet druhé derivace v maximálních otevřených intervalech.
  - Obvykle není nutné se zaobírat výpočtem jednostranných druhých derivací, ale šlo by to.
  - Znaménka f''. (Často se vytknou kladné faktory a není tedy třeba pracovat s celým výrazem.)
  - Intervaly konvexity/konkávnosti funkce f (Věta 48). (Opět separátně.)
  - Inflexní body.
- Graf.
  - Uspořádání důležitých bodů: Průsečíky, extrémy, inflexní body, singulární body (tj. vyjmuté body z $\mathcal{D}_f$). Naznačím asymptoty (k nim se musí funkce přimykat).
  - Náčrtek grafu: Musí být vidět změna konvexity a konkavity; v extrémech je vidět extrém. Pokud jsme využili sudost/lichost/periodicitu, tak načrtneme graf i ve vynechané části.
  - Pokud to nejde nakreslit, tak je někde chybu (např. vlastní limita v nekonečnu a přitom má být funkce konvexní či funkce klesá do $+\infty$).

Příklad 1. (Průběh funkce)

(a) $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

(b) $f(x) = x + 2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-2}}$.

(c) $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2-2}}$.

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 7x}$.

(e) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x-3}}$.

(f) $f(x) = \arctan\left(\frac{8x}{x^2-25}\right)$.

(g) $f(x) = |x| - 3\arctan(x+2)$.

(h) $f(x) = (3^{x+2|x|} - 9)^2$.

(i) $f(x) = \frac{4^x-12}{(2^x-9)^2}$.

Výsledky - VI. Průběhy funkcí

Příklad 1. (Průběh funkce)

(a) $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Snadno máme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, funkce je zde spojitá. Průsečíky s osami jsou $[\pm 1, 0]$ a $[0, -\pi/2]$. Vidíme, že f není periodická ani lichá, ale je sudá.

Limity v krajních bodech vyjdou $\frac{\pi}{2}$, díky AL a spojitosti. Dále stačí zkoumat funkci pouze pro $x \geq 0$. Má triviální asymptotu $y = \frac{\pi}{2}$.

První derivace vyjde $f'(x) = \frac{4x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2}{x^2+1}$ pro $x > 0$. Díky spojitosti f lze derivaci zprava dopočítat pomocí limity a vyjde $f'_+(0) = 2$ (zleva tedy vyjde -2, derivace v počátku neexistuje). Funkce zde tedy roste. V $x = 0$ je tedy lokální (a globální) minimum. Díky spojitosti je $\mathcal{H}_f = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Druhá derivace je nyní snadná, totiž $f''(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2} < 0$ pro $x > 0$. Funkce je tedy konkávní na $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Nemá ale inflexní bod (neboť v nule nemá smysl první derivace). Kreslíme graf.

$\triangle$

(b) $f(x) = x + 2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-2}}$.

Snadno zjistíme, že $\mathcal{D}_f = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. Průsečíkem s osami je jediný bod a to $[-\sqrt{6}, 0]$ (ve výpočtu si všimneme, že x musí být záporné). Není tedy sudá, lichá a ani periodická.

Limity v $\pm\infty$ bodech vyjdou $\pm\infty$, díky AL a VOLSF(S). Jednostranné limity v $\pm\sqrt{2}$ vyjdou $+\infty$. Asymptota vyjde $y = x + 2$.

První derivace vyjde $f'(x) = 1 - \frac{4x}{(x^2-2)^2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-2}}}$ pro $x \in \mathcal{D}_f$. Jednostranné limity derivace v krajních bodech vyjdou $+\infty$ (ale není to hodnota jednostranné derivace). Okamžitě vidíme, že $f' > 0$ pro $x < 0$, a tedy f roste na $(-\infty, -\sqrt{2})$ a nabývá zde všech hodnot z $\mathbb{R}$ díky spojitosti. Tedy $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$. Pouze pro $x > 0$ se může derivace nulovat. Řešíme rovnici $1 = \frac{4}{(x^2-2)^{3/2}}$. Vyjde $a = \sqrt{2 + 2\sqrt[3]{2}} > 0$ (dává smysl). Na $(\sqrt{2}, a)$ je tedy f klesající, na $(a, +\infty)$ rostoucí (to je vidět z chování limity v $+\infty$). Hodnota tohoto lokálního minima je nějaké kladné číslo (napravo není žádný průsečík).

Druhá derivace je nyní

$$f''(x) = -\frac{4}{[\cdots]^2} \cdot \left[1 \cdot (x^2-2)^2\sqrt{\cdots} - x\left(2(x^2-2) \cdot 2x\sqrt{\cdots} + (x^2-2)^2 \frac{1}{2\sqrt{\cdots}} \cdot \frac{-4x}{(x^2-2)^2} \right) \right],$$

a tedy $f'' > 0 \Leftrightarrow [] < 0$, tedy kdy $(x^2-2)^2\sqrt{\cdots} - 4x^2\left((x^2-2)\sqrt{\cdots} - (x^2-2)^2 \cdot \frac{1}{2(x^2-2)^2\sqrt{\cdots}}\right) < 0$, což je ekvivalentní s $(x^2-2)^2 - 4x^2(x^2-2) - 2x^2\frac{x^2-2}{x^2} < 0$, a tedy $(x^2-2)(x^2-2-4x^2-2) < 0$, což znamená, že $-3x^2 - 4 < 0$, a to platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy i pro $x \in \mathcal{D}_f$. Funkce f je tedy konvexní na celém svém definičním oboru. Proto nemá žádný inflexní bod. Kreslíme graf.

$\triangle$

(c) $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2-2}}$.

Zjevně je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$ a funkce je zde spojitá. Jediným průsečíkem s osami je počátek. Funkce tedy není periodická a můžeme si povšimnout, že je lichá a není sudá. Funkci budeme tedy zkoumat na $\langle 0, +\infty) \setminus \{\sqrt{2}\}$.

Limity. Z AL ihned dostáváme, že limita v $+\infty$ je $+\infty$. Obdobně je limita v $\sqrt{2}$ zprava, resp. zleva rovna $+\infty$, resp. 0. Asymptota v $+\infty$ vyjde jako přímka $y = x$. Díky lichosti tedy máme limitu v $-\infty$ rovnu $-\infty$, limitu v $-\sqrt{2}$ zprava rovnu 0 a zleva rovnu $-\infty$. Asymptota v $-\infty$ je opět $y = x$.

První derivace. Snadno spočítáme, že $f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-2}}\left[1 - \frac{2x^2}{(x^2-2)^2}\right]$, což dává smysl v celém definičním oboru. Derivace je nulová právě v bodech, které odpovídají řešení bikvadratické rovnice $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$. Ta má kořeny

$$a = -\sqrt{3+\sqrt{5}}, \quad b = -\sqrt{3-\sqrt{5}}, \quad c = \sqrt{3-\sqrt{5}}, \quad d = \sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

Nahlédneme, že f roste na intervalech $[0, c], [d, +\infty)$ a klesá na $[c, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, d]$. Z lichosti roste na $(-\infty, a], [b, 0]$ a klesá na $[a, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, b]$. Z toho máme, že v bodech a, c jsou lokální maxima, zatímco v bodech b, d jsou lokální minima. Jelikož $f(c) < f(d)$, pravá část grafu nám tedy dá (díky spojitosti) $\langle 0, f(c)\rangle \cup \langle f(d), +\infty)$. Z lichosti je tedy $\mathcal{H}_f = (-\infty, -f(d)\rangle \cup \langle -f(c), f(c)\rangle \cup \langle f(d), +\infty)$.

Druhá derivace. Přímočaře dostáváme, že

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x^2-2}} \left[\frac{-2x}{(x^2-2)^2} \left(1 - \frac{2x^2}{(x^2-2)^2} \right) - \frac{4x(x^2-2)^2 - 2x^2 \cdot 2(x^2-2) \cdot 2x}{(x^2-2)^4} \right],$$

a tedy $f''(x) > 0$ právě tehdy, když $[] > 0$. Řešíme tedy

$$\begin{aligned} -2x(x^4 - 6x^2 + 4) - 4x(x^2-2)(x^2 - 2 - 2x^2) &> 0 \\ -x[x^4 - 6x^2 + 4 + 2(x^2-2)(-x^2-2)] &> 0 \\ x[x^4 - 6x^2 + 4 + 2(-x^4+4)] &< 0 \\ x[-x^4 - 6x^2 + 12] &< 0 \\ x[x^4 + 6x^2 - 12] &> 0. \end{aligned}$$

Jeden inflexní bod je tedy 0, pak ještě dva další, které vyjdou jako (reálné) kořeny právě nalezené bikvadratické rovnice. Konkrétně jde o $\overline{e} = -\sqrt{\sqrt{21}-3}$ a $\overline{f} = \sqrt{\sqrt{21}-3}$. Poznamenejme, že $\overline{f} < \sqrt{2}$ (a z lichosti $-\sqrt{2} < \overline{e}$). Funkce je tedy konvexní na $(\overline{f}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, +\infty)$ a konkávní na $(0, \overline{f})$. Z lichosti je f konvexní na $(\overline{e}, 0)$ a konkávní na $(-\infty, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \overline{e})$. Kreslíme graf, poznamenejme, že $a(=-d) < -\sqrt{2} < \overline{e}(=-\overline{f}) < b(=-c) < 0 < c < \overline{f} < \sqrt{2} < d$.

△

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 7x}$.

Okamžitě vidíme, že funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je zde spojitá. Z rozkladu polynomu vidíme, že jediným průsečíkem je počátek. Evidentně není periodická a není sudá ani lichá (viz $f(1) = \sqrt[3]{13}$ a $f(-1) = -\sqrt[3]{3}$).

Limity. Z AL vidíme, že limita v $\pm\infty$ je $\pm\infty$. Standardně spočteme, že asymptota v $+\infty$ i $-\infty$ je přímka $y = x + \frac{5}{3}$. Díky spojitosti už nyní víme, že $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$.

První derivace. Snadno nalezneme $f'(x) = \frac{3x^2+10x+7}{3\sqrt[3]{x^2(x^2+5x+7)^2}}$ pro $x \neq 0$. Pomocí jednostranných limit (a spojitosti) spočítáme, že $f'(0) = +\infty$. Vidíme, že derivace se nuluje v bodech $-\frac{7}{3}$ a -1. Evidentně tedy f roste na $(-\infty, -\frac{7}{3}\rangle, \langle -1, +\infty)$ a klesá na $\langle -\frac{7}{3}, -1\rangle$. V bodě $-\frac{7}{3}$ je lokální maximum a v -1 je lokální minimum.

Druhá derivace. Přímočaře získáme, že (pro $x \neq 0$)

$$f''(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4(x^2+5x+7)^4}} \left[(6x+10)(x(x^2+5x+7))^{\frac{2}{3}} - (3x^2+10x+7) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2+5x+7) + x(2x+5)}{\sqrt[3]{x(x^2+5x+7)}} \right]$$

a tedy $f'' > 0$ právě tehdy, když $[] > 0$. To znamená, že

$$\begin{aligned} (6x+10)\sqrt[3]{x^2(x^2+5x+7)^2} - (3x^2+10x+7) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2+10x+7}{\sqrt[3]{x(x^2+5x+7)}} &> 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x(x^2+5x+7)}} \cdot \left[(3x+5) \cdot x(x^2+5x+7) - \frac{1}{3}(3x^2+10x+7)^2 \right] &> 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \left[(9x^2+15x)(x^2+5x+7) - (3x^2+10x+7)^2 \right] &> 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \left[9x^4 + 60x^3 + 138x^2 + 105x - (9x^4 + 60x^3 + 100x^2 + 42x^2 + 140x + 49) \right] &> 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \left[-4x^2 - 35x - 49 \right] &> 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \left[4x^2 + 35x + 49 \right] &< 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (x+7)(4x+7) &< 0. \end{aligned}$$

Získáváme tedy dva inflexní body, a to $-7, -\frac{7}{4}$. Bod 0 není inflexní, protože v něm není konečná první derivace, ale ke změně chování v tomto bodě dochází. Dohromady tedy je funkce f konvexní na $(-\infty, -7), \left(-\frac{7}{4}, 0\right)$ a konkávní na $\left(-7, -\frac{7}{4}\right), (0, +\infty)$. Kreslíme graf, poznamenejme, že $-7 < -\frac{7}{3} < -\frac{7}{4} < -1 < 0$.

△

(e) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x-3}}$.

Evidentně je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ a funkce je zde spojitá. Není proto sudá, lichá ani periodická. Jediným průsečíkem s osami je počátek.

Limity. Pomocí AL vyjde limita v $\pm\infty$ rovna $\pm\infty$, limita v 3 zprava je $+\infty$ a zleva naopak $-\infty$. Funkce nemá asymptoty (limita $\frac{f(x)}{x}$ je nula, ale limita $f(x)$ není reálné číslo.).

První derivace. Snadno získáme $f'(x) = \frac{x-6}{3(x-3)^2 \sqrt[3]{\frac{x}{(x-3)^2}}}$, což dává smysl v $\mathcal{D}_f \setminus \{0\}$. Standardně spočítáme $f'_{\pm}(0) = \mp\infty$, a derivace v počátku tedy neexistuje. Vidíme, že f roste na $(-\infty, 0\rangle, \langle, +\infty)$ a klesá na intervalech $\langle, 3), (3, 6\rangle$. Funkce f má lokální maximum v 0 s $f(0) = 0$ a lokální minimum v 6 s $f(6) = \sqrt[3]{12}$. Díky spojitosti dostáváme, že $\mathcal{H}_f = (-\infty, 0\rangle \cup \langle \sqrt[3]{12}, +\infty)$.

Druhá derivace. V $\mathcal{D}_f \setminus \{0\}$ získáme

$$f''(x) = \left(\frac{x-6}{3(x(x-3)^4)^{\frac{1}{3}}}\right)' = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{8}{3}}} \left[1 \cdot x^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{4}{3}} - (x-6)\frac{(x-3)^4 + x \cdot 4(x-3)^3}{3x^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{8}{3}}}\right],$$

a $f'' > 0$ právě tehdy, když $[] > 0$, což je ekvivalentní s

$$\begin{aligned}
x^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{4}{3}} - (x-6)\frac{(x-3)^{\frac{4}{3}} + 4x(x-3)^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}} &> 0 \\
\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}\left[3x(x-3)^{\frac{4}{3}} - (x-6)\left((x-3)^{\frac{4}{3}} + 4x(x-3)^{\frac{1}{3}}\right)\right] &> 0 \\
(x-3)^{\frac{1}{3}}\left[3x(x-3) - (x-6)(x-3+4x)\right] &> 0 \\
(x-3)^{\frac{1}{3}}\left[3x^2 - 9x - (x-6)(5x-3)\right] &> 0 \\
(x-3)^{\frac{1}{3}}\left[3x^2 - 9x - (5x^2 - 33x + 18)\right] &> 0 \\
(x-3)^{\frac{1}{3}}(-2x^2 + 24x - 18) &> 0 \\
(x-3)^{\frac{1}{3}}(x^2 - 12x + 9) &< 0.
\end{aligned}$$

Zjišťujeme, že máme dva inflexní body a to $a = 6 - 3\sqrt{3}$, $b = 6 + 3\sqrt{3}$. Bod 3 není inflexní, protože nepatří do definičního oboru, dochází zde ale ke změně znaménka. Dohromady tedy máme, že f je konvexní na intervalech $(-\infty, 0), (0, a), (3, b)$ a konkávní na $(a, 3), (b, +\infty)$. Kreslíme graf.

△

(f) $f(x) = \arctan\left(\frac{8x}{x^2-25}\right)$.

Snadno nahlédneme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 5\}$ a f je zde spojitá. Z tvaru definičního oboru není periodická. Jediným průsečíkem je zjevně počátek. Můžeme si všimnout, že je lichá a není sudá. Stačí se tedy omezit na $\langle 0, +\infty) \setminus \{5\}$.

Limity. Díky AL a vlastností funkcí vidíme, že limita v $+\infty$ je 0 a limita v 5 zprava, resp. zleva je $\frac{\pi}{2}$, resp. $-\frac{\pi}{2}$. Díky lichosti je limita v $-\infty$ rovna 0 a v bodě -5 je limita zprava, resp. zleva rovna $\frac{\pi}{2}$, resp. $-\frac{\pi}{2}$. Funkce f má v $+\infty$ i $-\infty$ triviální asymptotu $y = 0$.

První derivace. Snadno získáme, že $f'(x) = \frac{-8(x^2+25)}{(x^2-25)^2+64x^2}$, což dává smysl na celém $\mathcal{D}_f$ a vidíme, že všude je $f' < 0$. To znamená, že f klesá na $(-\infty, -5), (-5, 5), (5, +\infty)$. Z toho plyne, že funkce nemá žádné lokální extrémy a díky spojitosti dostáváme, že $\mathcal{H}_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Druhá derivace. Standardně získáme

$$f''(x) = \frac{-8}{((x^2-25)^2 + 64x^2)^2}\left[2x((x^2-25)^2 + 64x^2) - (x^2+25)(2(x^2-25) \cdot 2x + 128x)\right],$$

a tedy $f'' > 0$ právě tehdy, když $[] < 0$. To je ekvivalentní nerovnosti

$$\begin{aligned}
x\left[(x^4 - 50x^2 + 25^2 + 64x^2) - (x^2+25)(2x^2 - 50 + 68)\right] &< 0 \\
x\left[x^4 + 14x^2 + 25^2 - (x^2+25)(2x^2+14)\right] &< 0 \\
x\left[x^4 + 14x^2 + 25^2 - (2x^4 + 64x^2 + 25 \cdot 14)\right] &< 0 \\
x\left[-x^4 - 50x^2 + 25 \cdot (25 - 14)\right] &< 0 \\
x\left(x^4 + 50x^2 - 275\right) &> 0 \\
x(x^2+55)(x^2-5) &> 0.
\end{aligned}$$

Dostáváme tak tři inflexní body, a to $-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}$. Vidíme, že je f konvexní na $(\sqrt{5}, 5), (5, +\infty)$ a konkávní na $(0, \sqrt{5})$. Díky lichosti je konvexní i na $(-\sqrt{5}, 0)$ a konkávní na $(-\infty, -5), (-5, -\sqrt{5})$. Kreslíme graf.

△

(g) $f(x) = |x| - 3\arctan(x+2)$.

Vidíme, že funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je zde spojitá. Průsečík s osou y má hodnotu $-3\arctan 2 < 0$. Průsečíky s osou x jsou řešení rovnice $|x| = 3\arctan(x+2)$. To řešit neumíme, můžeme tedy jít dál, něco o tom vyplyne později. (Dá se ale nahlédnout, že jedno řešení máme pro $x > 0$ a druhé pro $x < 0$. To druhé navíc musí být pro $x > -2$.) Zjevně ale není periodická.

Limity. Triviálně platí, že limita v $\pm\infty$ je $+\infty$. Funkce má v $+\infty$ asymptotu tvaru $y = x - \frac{3\pi}{2}$ a v $-\infty$ asymptotu $y = -x + \frac{3\pi}{2}$.

První derivace. Snadno nalezneme, že $f'(x) = \operatorname{sign}(x) - \frac{3}{1+(x+2)^2}$ pro $x \neq 0$. Rutinně spočteme, že $f'_{\pm}(0) = \pm 1 - \frac{3}{5}$, takže derivace v 0 neexistuje. Vidíme, že $f' > 0$ pro $x > 0$ a $f' < 0$ pro $x < 0$. Takže f roste na intervalu $[0, +\infty)$ a klesá na $(-\infty, 0]$. V bodě 0 je lokální minimum a $f(0) = -3\arctan 2 < 0$. Zjevně musí jít i o globální minimum. Máme tedy $\mathcal{H}_f = \langle -3\arctan 2, +\infty)$.

Druhá derivace. Ihned získáme, že

$$f''(x) = \frac{6(x+2)}{(1+(x+2)^2)^2} \text{ pro } x \neq 0.$$

(V 0 nemá ani smysl zkoumat druhou derivaci). Evidentně je tedy v -2 inflexní bod a funkce je konvexní na $(-2, 0), (0, +\infty)$ a konkávní na $(-\infty, -2)$. Je tedy zjevné, že funkce není sudá ani lichá. Kreslíme graf.

$\triangle$

(h) $f(x) = (3^{x+2|x|} - 9)^2$.

Zjevně je f spojitá na celém $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Průsečíky s osami jsou $[-2, 0]$, $\left[\frac{2}{3}, 0\right]$, $[0, 64]$, vidíme tak, že f není sudá, lichá ani periodická.

Limity. Ihned máme, že limity v $\pm\infty$ jsou $+\infty$. Díky škále má $\frac{f(x)}{x}$ limitu $\pm\infty$, f tedy nemá asymptoty.

První derivace. Přímočaře získáme $f'(x) = 2\log 3 \cdot (1 + 2\operatorname{sign} x) \cdot 3^{x+2|x|} \cdot (3^{x+2|x|} - 9)$ pro $x \neq 0$. Díky spojitosti dostáváme $f'_+(0) = -48\log 3$ a $f'_-(0) = 16\log 3$. Derivace v nule tedy neexistuje. Jelikož se závorka nuluje pro $x \in \{-2, \frac{2}{3}\}$, tak rychle vidíme, že f roste na $\langle -2, 0\rangle$, $\langle \frac{2}{3}, +\infty)$ a klesá na intervalech $(-\infty, -2\rangle, \langle 0, \frac{2}{3}\rangle$. Funkce má tedy v $x = 0$ lokální maximum a lokální minima v $x \in \{-2, \frac{2}{3}\}$. Lokální minima jsou zároveň globální. Díky spojitosti dostáváme $\mathcal{H}_f = [0, +\infty)$.

Druhá derivace. Mimo $x = 0$ získáme, že

$$f''(x) = 2\log^2 3 \cdot (1 + 2\operatorname{sign} x)^2 \cdot 3^{x+2|x|} \cdot (2 \cdot 3^{x+2|x|} - 9).$$

Okamžitě vidíme, že f konvexní na $(-\infty, -\log_3 \frac{9}{2}), (\frac{1}{3}\log_3 \frac{9}{2}, +\infty)$ a konkávní na $(-\log_3 \frac{9}{2}, 0), (0, \frac{1}{3}\log_3 \frac{9}{2})$. Inflexní body jsou $x = -\log_3 \frac{9}{2}$ a $\frac{1}{3}\log_3 \frac{9}{2}$. Kreslíme graf, poznamenejme, že $-2 < -\log_3 \frac{9}{2} < 0 < \frac{1}{3}\log_3 \frac{9}{2} < \frac{2}{3}$.

$\triangle$

(i) $f(x) = \frac{4^x - 12}{(2^x - 9)^2}$.

Ihned vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{\log_2 9\}$ a f je zde spojitá. Kvůli tvaru definičního oboru nemůže být sudá, lichá a ani periodická. Snadno nalezneme průsečíky s osami, kterými jsou body $\left[0, -\frac{11}{64}\right]$, $\left[\frac{1}{2}\log_2 12, 0\right]$.

Limity. Přímočaře získáme, že limita v $+\infty$ je 1 a v $-\infty$ vyjde $-\frac{4}{27}$, máme tedy také triviální asymptoty $y = 1$ a $y = -\frac{4}{27}$. Rovněž jednoduše máme, že limita ve vynechaném bodě je (z obou stran) rovna $+\infty$.

První derivace. Snadno zjistíme, že $f'(x) = \frac{6\log 2 \cdot 2^x}{(2^x - 9)^3}(4 - 3 \cdot 2^x)$. Je tedy jasné, že f roste na $\langle \log_2 \frac{4}{3}, \log_2 9)$ a klesá na $(-\infty, \log_2 \frac{4}{3}\rangle$, $(\log_2 9, +\infty)$. V bodě $\log_2 \frac{4}{3}$ je lokální (a i globální) minimum s hodnotou $-\frac{92}{23^2} = -\frac{4}{23}$. Díky spojitosti dostáváme $\mathcal{H}_f = \langle -\frac{4}{23}, +\infty)$.

Druhá derivace. Máme

$$f''(x) = \frac{6\log 2}{(2^x - 9)^6}\left[(2^x(4 - 3 \cdot 2^x))'(2^x - 9)^3 - 2^x(4 - 3 \cdot 2^x) \cdot 3(2^x - 9)^2 2^x \log 2\right],$$

a tedy $f'' > 0$ právě tehdy, když $[] > 0$. Řešíme tedy nerovnost

$$\begin{aligned}
(4 \cdot 2^x \log 2 - 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2\log 2)(x^2 - 9)^3 &> (4 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{2x}) \cdot 3\log 2 \cdot (2^x - 9)^2 \cdot 2^x \\
(4 - 3 \cdot 2^x \cdot 2)(2^x - 9) &> (4 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{2x}) \cdot 3 \\
4 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{2x} - 36 + 54 \cdot 2^x &> 12 \cdot 2^x - 9 \cdot 2^{2x} \\
3 \cdot 2^{2x} + 46 \cdot 2^x - 36 &> 0.
\end{aligned}$$

Řešením kvadratické rovnice s $y = 2^x$ je $y_{1,2} = \frac{-23 \pm \sqrt{637}}{3}$, smysl má jen pozitivní kořen, což dává $a = \log_2 \frac{-23+\sqrt{637}}{3}$ a jedná se o inflexní bod. Dostáváme, že funkce f je konvexní na $(a, \log_2 9)$, $(\log_2 9, +\infty)$ a konkávní na $(-\infty, a)$. Kreslíme graf, poznamenejme, že $0 < a < \log_2 \frac{4}{3} < \frac{1}{2} \log_2 12 < \log_2 9$ a $1 > -\frac{4}{27} > -\frac{11}{64} > -\frac{4}{23}$.

$\triangle$