Program cvičení z Matematiky 1 ZS24/25

I Středoškolská matematika

Příklad I. (Rovnice, nerovnice)

(i) $\frac{x-3}{x+1} \geq \frac{x+7}{x+2}$.
Vyjde $x \in (-\infty, -2) \cup \langle -\frac{13}{9}, -1)$.

(ii) $||3-x|-1| + |x-4| = 2$.
Vyjde $x \in \langle 2, 3\rangle \cup \{5\}$.

(iii) $\log(x^4 - x^3) - 2\log x \leq \log 6$. Definiční obor a poznámka o monotonii ovlivňující změnu nerovnítka.
Vyjde $x \in (1, 3\rangle$.

(iv) $27^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 2 \cdot 3^{x+1}$.
Vyjde $x = \log_9(3 \pm \sqrt{6})$.

(v) $2\sin^2(2x+1) + 3\sin(2x+1) < -1$.
Vyjde $x \in \left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{12}\pi + k\pi, -\frac{1}{2} + \frac{11}{12}\pi + k\pi\right) \setminus \{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(vi) $\cos 2x + 2\alpha\cos x + 1 = 0$.
Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, řešením. Pro $\alpha \in \langle -1, 1\rangle$ ještě navíc $x = \arccos(-\alpha) + 2k\pi$ a $2\pi - \arccos(-\alpha) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad II. (Grafy) Známe grafy základních funkcí x^n, $\sqrt[n]{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, a^x, $\log_a x$.

(i) $f(x) = \left|\frac{1}{3^{|x-2|}} - 3\right|$.

(ii) $f(x) = \left|\frac{x-1}{2x+4}\right|$.

Pozn. *(Inverzní funkce) Máme* $f : \mathcal{D}_f \ni x \to y \in \mathcal{H}_f$

(i) $f(x) = e^x$.

(ii) $f(x) = x^2$.

(iii) $f(x) = \tan x$.

(Konec 1. cvičení)

Přiděláme tabulku hodnot a komentář ohledně $\tan x = \alpha$.

(iv) $f(x) = \arccos x$. *Viz příklad I(vi), tj.* $\cos x = \alpha$.

(v) $f(x) = \arcsin x$. *Jen obrázek a* $\sin x = \alpha$.

Příklad III. (Indukce)

(i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\sum_{k=0}^{n} (2k-3)k^2 = \frac{n(n+1)}{2}(n^2 - n - 1)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) $2^n < n!$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $n > 3$.

Příklad IV. (Výroková logika, kvantifikátory)

(i) $\exists x \in \mathbb{Z} : 5x + 1 = 0$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 1 \Rightarrow x \geq 2$.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{N} : x = y \vee y < x$.

(iv) $\forall n \in \mathbb{Z}\, \exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : (x \cdot f(x) = |x| \wedge f(0) = n)$. Speciálně pro $n = 0$ jde o $f = \operatorname{sign}$.

(v) $\{\alpha \in \mathbb{R}; \left|x + \frac{\pi}{12}\right| < \frac{\pi}{12} \Rightarrow \cot x \leq \alpha\} = \langle -\sqrt{3}, +\infty)$.

(vi) Z Příkladu 9: b, c, e. Vynecháno.

Příklad. Vyřešme $(\alpha - 1)x^2 + 2x - 1 \geq 0$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Konec 2. cvičení)

II Suprema a infima

Příklad I. (Intervaly)

(i) $A = (-\infty, 2\rangle$.

(ii) $B = (1, 3)$.

(iii) $C = \{\cos x; 0 \leq x < \pi\} = (-1, 1\rangle$.

(iv) $D = \{t \in \mathbb{R}; \frac{t}{t+2} \leq 3t\} = (-2, -5/3\rangle \cup \langle 0, +\infty)$.

Příklad II. (Nekonečné diskrétní)

(i) $A = \{\frac{n+2}{n+3}; n \in \mathbb{N}\}$. $\sup A = 1$ a $\min A = \frac{3}{4}$.

(ii) $B = \{1 - \sum_{k=0}^{n} 4^{-k}; n \in \mathbb{N}\} = \{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}; n \in \mathbb{N}\}$. $\max B = -\frac{1}{4}$ a $\inf B = -\frac{1}{3}$.

(iii) $C = \{\sin 2\pi(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}); n \in \mathbb{N}\}$. $\min C = -1$ a $\sup C = 0$.

III Posloupnosti

Příklad I. (Definice, oscilace a AL)

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} 7^n = +\infty$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \cos \pi n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$ neexistuje dle vybrané posloupnosti.

(v) $\lim_{n\to\infty} \sin \pi n = 0$. Specifikum posloupností (oproti $\sin x$).

(vi) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$ dle policajtů. Uděláno společně s $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

(Konec 3. cvičení)

(vii) $\lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{n} + \frac{7n+5}{n} + \frac{n}{n^2} = 5$. Výraz $\frac{\infty}{\infty}$ nemůže mít obecně smysl - upravit.

Příklad II. (Vytýkání) chceme (dominantní člen) (1 + smetí)

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 3n^3 + 6n + 2}{2n^3 - \sqrt{n^3} - n} = -\frac{3}{2}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(n + \sqrt{n^2 - 3n + 1})}{n\sqrt{n^3 + 1}} = 0$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^{23} - (2n)^{23}}{(n+2)^{23} - (n-1)^{23}} = 2^{22}$.

Příklad III. (Rozdíly odmocnin) Vzorec pro $A^p - B^p$ nám zlikviduje odmocniny pro $A, B = \sqrt[p]{\text{něco}}$.

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3n} - \sqrt{n^4 - n}}{\sqrt{2n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2n^2 + 1}} = -4\sqrt{2}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^{48} + n} - \sqrt[3]{n^{48} + n^2})((n^3 + 3)^{12} - (n^4 + 4n)^9) = -6$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-\sqrt{4n^2-6}}{\sqrt{n^2-2n}-\sqrt[3]{n^3-3n^2}} = 3.$

Příklad IV. (Škála) Používáme $n^{\text{něco}} \ll \text{něco}^n \ll n! \ll n^n$.

(Konec 4. cvičení)

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^n+n^5+(n+1)!}{2+n(n^6+2(n!))} = \frac{1}{2}.$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{4^n+n^4} - \sqrt{4^n+2^n} = -\frac{1}{2}.$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^{4n-2}+n!}-n^{2n-1}}{\sqrt[3]{n^{3n}+(n+1)!}-\sqrt[3]{n^{3n}+n!}} = \frac{3}{2}.$

Příklad V. (n-tá odmocnina a celá část) Používáme 2Policajty a limitní vlastnosti $\sqrt[n]{\cdot}$ či vlastnosti $\lfloor\cdot\rfloor$.

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}-\sqrt{3^n-2^n}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n+\sin(n!)}{(n+2)^{n+1}-\arctan 2^n}} = 1.$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+\lfloor 2\sqrt{n}\rfloor+\cdots+\lfloor n\sqrt{n}\rfloor} = 2.$ $x-1 < \lfloor x\rfloor \le x.$

(Konec 5. cvičení)

(iv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^n-n^3-e^n} = \alpha$, kde $\alpha > e$. Odhad s pomocí definice + částečné limitění.

(v) $\lim_{n\to\infty} \lfloor \sqrt[n]{\alpha^n-n^3-e^n}\rfloor = \{3,7\}$ pro $\alpha \in \{\pi, 8\}$. Nelze prohazovat limitu a operaci.

IV Limity funkcí

Motivační obrázek.

Příklad I. (Definice a to, co již známe) Zopakujeme definici.

(i) $\lim_{x\to 2_+} \sqrt{2x+5} = 3$, volme $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon+6)$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, volme $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

(iii) $\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{x-\alpha}$ neexistuje, existují jednostranné.

(iv) $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ neexistuje díky volbě $x = 2\pi n$ a $x = \frac{\pi}{2}+2\pi n$.

(v) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7+2x^3-4x}{5x^3-3x^2+1} = \frac{2}{5}.$

(vi) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2e^x} - \frac{2\log^2 x}{x} + \frac{1}{\log x^2} + \frac{\cos x}{x} = 0.$

(vii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-4}-\sqrt{2x+1}} = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$. Potřebujeme VOLSF(S).

(viii) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+\frac{x}{2^x}} + e^{\frac{1}{3-x}} = 2$. Opět VOLSF(S) - silný nástroj.

Příklad II. (Spojitost)

(i) $\lim_{x\to 1} e^{2x+3} + \tan\frac{\pi x}{4} + \frac{2x^2}{x+1} + \sqrt[3]{x^3-1} = e^5+2.$

(ii) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4} = \frac{1}{2}$. Čitatel buď je, či není nula.

(iii) $\lim_{x\to 3_+} \frac{(x^2-x-6)^2}{(x-3)^3} = +\infty.$

(iv) $\lim_{x\to 0_-} \frac{x}{\sqrt{x^2-x^3}} = -1$. Pozor na odmocninu ze čtverce.

(Konec 6. cvičení)

(v) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+4}} = -\sqrt{2}$.

Příklad III. (Známé limity a složené funkce) Převádíme na skupinu pěti známých limit pomocí VOLFS(P).

(i) $\lim_{x\to -\frac{3}{2}} \frac{e^{2x+3}-1}{2\sin(2x+3)} = \frac{1}{2}$. Jde o to, kam jdou argumenty, ne o to, ve kterém bodě děláme limitu.

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos[x(x^2-1)]}{x^4-1} = 0$. Vnitřní funkce s více kořeny. Pozor na základní limitu pro cos.

(iii) $\lim_{x\to -2_+} \frac{x\tan(\sin(x+2))}{\log^2(\sqrt{x+2}+1)} = -2$. Periodická vnitřní funkce + AL na mocniny.

Pozn. *(Podmínka (P) neplatí automaticky) Např.* $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ *splňuje* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ *dle 2Policajtů či součinu nulové a omezené. Nicméně* $g(x) \neq 0$ *není splněna na žádném* $P_\delta(+\infty)$ *(stačí vzít* $x = k\pi$ *pro dost velké* $k \in \mathbb{N}$*). Podobně i třeba pro* $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ *pro* $x \to 0$*.*

(iv) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\arctan(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2+1})} = \frac{2}{5}$. Jde i v nekonečnech, inverzní funkce.

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - e^{\sin^4 x}}{\arcsin^2(\tan^2 x)} = -\frac{3}{2}$. Přičtení ± 1, řetězení výrazů.

(Konec 7. cvičení)

(vi) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{1+\cos x}-\sin x}-e}{\log(e^x+x^2)} = -\frac{1}{2e}$. Odmocniny, vytknutí z exponenciály, derivování vnitřní funkce.

Příklad IV. (Exponenciální trik) Využíváme $a^b = e^{b\log a}$, pro $a > 0$, a předešlé metody.

(i) $\lim_{x\to+\infty} (2 + x + \sqrt[3]{x})^{\frac{1}{\log(3+\sqrt{x})}} = e^2$. Logaritmus v nekonečnu.

(ii) $\lim_{x\to 0_+} (\frac{1+\arctan x}{\cos 2\sqrt{x}})^{\frac{1}{x^\alpha}} \in \{1, e^5, +\infty\}$ pro $\alpha \in \{<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, >\frac{1}{2}\}$.

(iii) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x + \cos 2x)^{\frac{1}{\cot x - 1}} = e$. Posunutí argumentu, derivování vnitřní funkce.

Příklad V. (Heine) Můžeme převést limitu posloupnosti na limitu funkce (pokud vyjde limita).

(i) $\lim_{n\to\infty} \log\left(1 - \sin\frac{7}{2+n^2}\right) \frac{n^4+2n-3}{n^2+8n} = -7$. Heine s $x_n = n$.

Pozn. *(Vztahy pro inverzní goniometrické funkce) Z vhodného trojúhelníku jsme nahlédli, že* $\frac{\pi}{2} = \arctan a + \arctan\frac{1}{a}$ *pro* $a > 0$*. Navíc i, že* $\arctan\frac{1}{a} = \operatorname{arccotan} a$*. Podobně i pro* arcsin*,* arccos*.*
Hodí se např. v 21/22B.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \arcsin^2\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan 3n^2}} = e^{12}$. Heine s $x_n = \frac{1}{n}$.

(Konec 8. cvičení)

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 2\sqrt{n^2+1}-\sin 2n}{\sqrt{\cos\frac{3}{\sqrt{n}}-\cos\frac{5}{\sqrt{n}}}} = 0$. Heine s $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ či $x_n = \sqrt{n}$.

Pozn. *(Součtové vzorečky) Už jsme použili (také např. v 22/23D), že*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\beta\sin\alpha.$$

Vhodnou manipulací ($\beta = x - y$*,* $\alpha = x + y$*) docílíme například (hodí se v 21/22E), že*

$$\sin 2x - \sin 2y = 2\sin(x-y)\cos(x+y).$$

Normální písemky jsou třeba 21/22A, D; 22/23A, B, C; 19/20A, B, C, D; 18/19A, C, D, E.

V Derivace

Připomenutí motivačního obrázku.

Příklad I. (Sčítání, násobení a skládání)

(i) $f(x) = 7 \arctan x + \frac{1}{x^2} + (x^3 + 2x + 8)e^x$. Vyjde $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{x^3} + (x^3 + 3x^2 + 2x + 10)e^x$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. V počátku nemá smysl řešit.

(ii) $f(x) = x \arccos x + \frac{3x^2}{1-x^2}$. Vyjde $f'(x) = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{6x}{(1-x^2)^2}$ pro $x \in (-1, 1)$. Kdyby nebyly vyloučeny body ± 1, tak je musíme zkoumat, protože je tam arccos definován.

(iii) $f(x) = e^{(x^3+2x)^6} + \arctan \frac{x}{1+x^2}$. Vyjde $f'(x) = 6(3x^2+2)(x^3+2x)^5 e^{(x^3+2x)^6} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

(iv) $f(x) = \log^2(\cos^3 4x)$. Vyjde $f'(x) = -24 \frac{\sin 4x}{\cos 4x} \log(\cos^3 4x)$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(v) $f(x) = \begin{cases} \sin x, x \leq 0 \\ \cos x - 1, x > 0 \end{cases}$. Vyjde $f'(x) = \begin{cases} \cos x, x < 0 \\ -\sin x, x > 0 \end{cases}$. Je třeba zkoumat zvlášť derivaci v nule, buď z definice nebo pomocí VOLD. Vyjde $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = 1$, takže $f'(0)$ neexistuje. Pro $\cos x - 1 + x$ by už to ale vyšlo. Odloženo na později.

Příklad II. (Problémové body)

(i) $f(x) = \sin |x^3(x^2 - 1)|$. Vyjde $f'(x) = (3x^2(x^2 - 1) + 2x^4) \operatorname{sign}(x^3(x^2 - 1)) \cos |x^3(x^2 - 1)|$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$. Díky spojitosti můžeme použít VOLD a snadno spočteme, že $f'_+(0) = 0 = f'_-(0)$, $f'_+(1) = 2$, $f'_-(1) = -2$. Lze užít sudost. Takže $f'(0) = 0$ a $f'(\pm 1)$ neexistuje.

(Konec 9. cvičení)

(ii) $f(x) = \operatorname{sign}(x^2 + 3x + 2)(3^{x^3+2x^2+x} - 1)$. Funkce je zjevně spojitá mimo $x = -2, -1$. Ukáže se, že v -1 je spojitá, ale v -2 není. Vyjde $f'(x) = \operatorname{sign}(x^2 + 3x + 2) \log 3 \cdot 3^{x^3+2x^2+x}(3x^2 + 4x + 1)$ mimo tyto body. Pomocí VOLD snadno spočteme, že $f'_\pm(-1) = 0$, a tedy $f'(-1) = 0$. Z definice vidíme, že $f'_\pm(-2) = \pm\frac{1-3^{-2}}{0_\pm} = +\infty$, a tedy $f'(-2) = +\infty$.

(iii) $f(x) = (2x^2+x-1)\lfloor \frac{2}{\pi} \arcsin x - \frac{1}{3} \rfloor$. Jistě je $\mathcal{D}_f = \langle -1, 1 \rangle$. Jelikož $f(x) = \{-2(2x^2+x-1), -(2x^2+x-1), 0\}$ na $\{-1 \leq x < -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$ a f je tady spojitá zprava na $\mathcal{D}_f$ a v $\frac{1}{2}$ i zleva. Máme $f'(x) = \{-2(4x+1), -(4x+1), 0\}$ na $\{-1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x < 1\}$. Použitím VOLD dostáváme, že $f'_-(1) = 0$, $f'_+(-1) = 6$, $f'_+(\frac{1}{2}) = 0$, $f'_-(\frac{1}{2}) = -3$, $f'_+(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\sqrt{3} - 1$. Z definice je $f'_-(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{0_-} = -\infty$. Takže $f'(\frac{1}{2})$, $f'(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ neexistují.

(iv) $f(x) = \sqrt[3]{\min\{x^2 - 6, x\}}$. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Snadno zjistíme, že $f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ pro $x < -2$ a $x > 3$, $\frac{2x}{3(x^2-6)^{\frac{2}{3}}}$ pro $-2 < x < \sqrt{6}$ a $\sqrt{6} < x < 3$. Snadno spočteme, že $f'_\pm(\sqrt{6}) = +\infty$. Dále máme, že $f'_-(-2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$ a $f'_+(-2) = -\frac{4}{3\sqrt[3]{4}}$, podobně $f'_-(3) = \frac{2}{\sqrt[3]{9}}$ a $f'_+(3) = \frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$. To znamená, že $f'(\sqrt{6}) = +\infty$, ale $f'(-2)$ ani $f'(3)$ neexistují.

Poslány obrázky s grafy těchto funkcí spolu s komentářem.

(Konec 10. cvičení)

VI Průběh funkce

Příklad I. Všechny dosud naučené nástroje chceme využít k vyšetření průběhu funkcí.

(i) $f(x) = (x^2 - 2x - 3)e^{-|x|}$. Minimum v zubu (nestačí nulová derivaci). Ne úplně příjemná čísla.

Předehra. Funkce je definovaná a spojitá na celém $\mathbb{R}$. Má průsečíky $[-1, 0]$, $[3, 0]$ a $[0, -3]$. Kvůli jejich rozmístění není sudá, lichá, ani periodická.

Limity. Díky škále je limita v $\pm\infty$ rovna 0; triviální asymptota $y = 0$ v $+\infty$ i $-\infty$.

První derivace. Pro $x > 0$ dostaneme $f'(x) = (-x^2 + 4x + 1)e^{-x}$ a $f'_+(0) = 1$. Jediný relevantní nulový bod je $a = 2 + \sqrt{5}$. Pro $x < 0$ dostaneme $f'(x) = (x^2 - 5)e^x$ a $f'_-(0) = -5$. Takže $f'(0)$ neexistuje, f zde má zub. Nulový bod na této části je $b = -\sqrt{5}$. Funkce tedy roste na $(-\infty, b\rangle$, $\langle 0, a\rangle$ a klesá na $\langle b, 0\rangle$, $\langle a, +\infty)$. Lokální maxima jsou v bodech $[b, f(b)]$ a $[a, f(a)]$, lokální minimum je v $[0, -3]$ a je tedy i globální. Jelikož $f(a) < f(b) = 2(1 + \sqrt{5})e^{-\sqrt{5}}$, tak v $[b, f(b)]$ je globální maximum. Díky spojitosti máme, že $\mathcal{H}_f = \langle -3, 2(1 + \sqrt{5})e^{-\sqrt{5}}\rangle$.

Druhá derivace. Pro $x > 0$ dostaneme $f''(x) = (x^2 - 6x + 3)e^{-x}$. Nulové body jsou $c, d = 3 \pm \sqrt{6}$. Pro $x < 0$ dostaneme $f''(x) = (x^2 + 2x - 5)e^x$ s jediným nulovým bodem $e = -1 - \sqrt{6}$. Ze znamének derivace nahlédneme, že f je konvexní na $(-\infty, e)$, $(0, d)$, $(c, +\infty)$ a konkávní na $(e, 0)$, (d, c). Inflexní body odpovídají $x = c$, d, e. Bod 0 není inflexní bod (chceme, aby $f'(a) \in \mathbb{R}$).

Kreslíme graf. Hodí se, že $e < b < -1 < 0 < d < 3 < a < c$.

Pozn. *Monotonie a konvexita je vždy separátně na jednotlivých intervalech, tj. např.* $\tan x$ *je rostoucí na* $\big(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$. *Ne na* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\big)$.

(ii) $f(x) = x\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$. Asymptoty, obor hodnot a konvexita.

Předehra. Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a funkce je zde spojitá. Kvůli tvaru definičního oboru nemůže být sudá, lichá a ani periodická. Snadno nahlédneme, že jediným průsečíkem s osami je počátek.

Limity. Standardně zjistíme, že limity v nekonečnech jsou $\pm\infty$ a limita v jedné zprava je $+\infty$, zleva naopak $-\infty$. Funkce má v $\pm\infty$ asymptotu ve tvaru $y = x + \frac{1}{3}$ (rozdíl odmocnin).

První derivace. Přímočaře spočteme, že

$$f'(x) = \left[\Big(\frac{x^4}{x-1}\Big)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\Big(\frac{x^4}{x-1}\Big)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{4x^3(x-1) - x^4}{(x-1)^2} = \frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{3x^4 - 4x^3}{3(x-1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{3x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}}{3(x-1)^{\frac{4}{3}}} \text{ v } \mathcal{D}_f.$$

Vidíme, že $f'(x) = 0$ právě v bodech $x = 0$, $\frac{4}{3}$. Zjevně tedy funkce roste na intervalech $(-\infty, 0\rangle$, $\langle\frac{4}{3}, +\infty)$, naopak klesá na $\langle 0, 1), (1, \frac{4}{3}\rangle$. V bodě 0 je tedy lokální maximum s hodnotou 0 a naopak v bodě $\frac{4}{3}$ je lokální minimum s hodnotou $\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$. Díky spojitosti a Bolzanově větě tedy máme, že $\mathcal{H}_f = (-\infty, 0\rangle \cup \langle\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}, +\infty)$.

Druhá derivace. Máme, že

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{9(x-1)^{\frac{8}{3}}}\Big[\big(4x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}\big) \cdot 3(x-1)^{\frac{4}{3}} - \big(3x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}\big) \cdot 4(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big] \\
&= \frac{1}{9x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{10}{3}}}\Big[\big(4x - \frac{4}{3}\big) \cdot 3(x-1)^2 - \big(3x^2 - 4x\big) \cdot 4(x-1)\Big] \\
&= \frac{1}{9x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{7}{3}}}\Big[\big(12x - 4\big) \cdot (x-1) - \big(12x^2 - 16x\big)\Big] \\
&= \frac{1}{9x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{7}{3}}}\Big[12x^2 - 12x - 4x + 4 - 12x^2 + 16x\Big] \\
&= \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{7}{3}}}\,.
\end{aligned}$$

O znaménku tedy rozhoduje druhá závorka ve jmenovateli. Dostáváme tedy, že f je konvexní na $(1, +\infty)$ a konkávní na $(-\infty, 1)$. Bod 1 není inflexní, protože není v definičním oboru.

Kreslíme graf.