I. Středoškolská matematika

Příklad 1. (Rovnice) Řešte následující rovnice v $\mathbb{R}$:

(a) $\sin 2x = \cos x$.

(b) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$.

(c) $e^x + 12e^{-x} = 7$.

(d) $1 - |\sin x| = \cos^2 x$.

(e) $||x-1|-2| = 3$.

(f) $|x-4| + |2x-1| = |-x| + 3$.

(g) $2^{4x+1} + 3\cdot 2^{2x+1} - 8 = 0$.

(h) $2\log_2^2 x = \log_2 8 - \log_2 x^5$.

(i) $3\cdot 9^{-t^2} = \frac{27^t}{9}$.

(j) $\frac{|x|-2}{x+3} = \frac{x+1}{x-2}$.

(k) $\cos^2(4x-1) + 2\sin(4x-1) = 2$.

(l) $2\sin x + \cos x = 1$.

Příklad 2. (Nerovnice) Řešte následující nerovnice v $\mathbb{R}$:

(a) $\frac{x+2}{x^2+3x-4} \geq \frac{3}{x-2}$.

(b) $(x+2)(x-2) \leq 2x-5$.

(c) $\log_{\frac{1}{6}}(x^2-3x+3) \leq 0$.

(d) $|x+1| - |x+3| < 1$.

(e) $\frac{x-2}{x+3} \geq |x+1|$.

(f) $8^x - 4^{x+1} + 3\cdot 2^x < 0$.

(g) $\tan(2x-1) \leq \sqrt{3}$.

(h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} > 3\cdot 9^{-|x|}$.

(i) $||2x-1|-3| \leq 2$.

(j) $\log|x+1| - 2\log(x+2) < \log 2$.

(k) $2 - \cos 2x - 3\sin x < 0$.

(l) $\arccos(-x^2+4x-1) > \frac{\pi}{3}$.

Příklad 3. (Grafy) Načrtněte grafy následujících funkcí:

(a) $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$.

(b) $f(x) = 1 - |\sin 2x|$.

(c) $f(x) = |e^{|x+2|} - \pi|$.

(d) $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$.

(e) $f(x) = |\log(2x-1)| - 2$.

(f) $f(x) = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

Příklad 4. (Parametry) Řešte (ne)rovnice v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $|x| + |x+1| < \alpha$.

(b) $\alpha x^2 + 2x - \alpha + 2 = 0$.

(c) $-1 < \alpha e^x \leq 0$.

(d) $\log_{\frac{1}{2}}(\alpha x^2 + 1) \geq 2$.

(e) $x^2 + 4x + 1 + |\alpha+1| < 0$.

(f) $\frac{1}{9^{x+1}} < 3^{x^2-\alpha}$.

(g) $\sin 2x < \alpha$.

(h) $\cos^2 x + 2\sin x < \alpha + 2$.

Příklad 5. (Indukce) Pomocí matematické indukce dokažte následující výroky.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. (Zkuste dokázat i přímo)

(b) Součet prvních n lichých čísel je roven n^2.

(c) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pro $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$. (Zkuste dokázat i přímo)

(d) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

(e) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

(f) Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, platí $(1 - \frac{1}{2^2})\cdot(1 - \frac{1}{3^2})\cdots(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$.

(g) Nerovnost $3^n < n!$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 6$.

(h) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x > -1$ platí nerovnost $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

(i) Pro jakékoliv $n \in \mathbb{N}$ existují $a, b \in \mathbb{N}$ splňující $13^n = a^2 + b^2$.

Příklad 6. (Množiny) Určete následující množiny:

(a) $A = \{a \in \mathbb{R}; (\forall x \in \mathbb{R})(\log(x^2+a) \geq 1)\}$.

(b) $B = \{b \in \mathbb{R}; (\forall x \in (0, +\infty))(x \geq 2 \Rightarrow \left|\arcsin \frac{b}{x}\right| \geq \frac{\pi}{6})\}$.

(c) $C = \{c \in \mathbb{R}; (\forall x \in \mathbb{R})(|x-2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - 4x + c > 0)\}$.

Příklad 7. (Tabulky) Tabulkovou metodou dokažte, že jsou následující výroky tautologie, tzn. jsou vždy pravdivé (bez ohledu na pravdivostní hodnotu jednotlivých částí výroku):

(a) $\neg(\neg A) \iff A$. (Zákon dvojí negace)

(b) $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$. (Princip obměny)

(c) $A \vee (\neg A)$. (Princip vyloučení třetího)

(d) $\neg(A \Rightarrow B) \iff (A \wedge \neg B)$. (negace implikace)

(e) $(A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee B)$. (alternativa implikace)

(f) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. (tranzitivita implikace)

Příklad 8. (Negace) Znegujte následující výroky a rozhodněte o jejich pravdivosti:

(a) I do not like this list.

(b) Všichni velociraptoři umí otevřít okno.

(c) Někteří savci kladou vejce.

(d) Pokud má rád kočky, tak nemá rád psy.

(e) $\exists x \in \mathbb{N} : 2 < x < 3$.

(f) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$.

(g) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$.

(h) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\, \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{Q} : y \leq x \wedge x < y + 1$.

(j) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{N} : y \leq x \wedge x < y + 1$.

(k) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N}\, \forall z \in \mathbb{N} : z > x \Rightarrow z > y$.

(l) $\exists a, b \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R} : x > a \Rightarrow -x^2 + bx \leq 0$.

Příklad 9. (Logické zápisy) Nechť M znační množinu všech mužů a Z množinu všech žen. Uvažujme nyní následující výrokové formy: $S(m, z)$: „Muž m je manželem ženy z“, $L_1(m, z)$: „Muž m miluje ženu z“, $L_2(m, z)$: „Žena z miluje muže m“. Zapište nyní symbolicky (kvantifikátory, logické spojky a právě definované formy) následující výroky:

(a) Existuje vdaná žena.

(b) Existuje ženatý muž. (Totéž co předchozí?)

(c) Každý ženatý muž miluje svou manželku.

(d) Každou ženu miluje nějaký muž.

(e) Každá žena má nejvýše jednoho manžela.

(f) Každý muž má nejvýše jednu manželku. (Totéž co předchozí?)

(g) Existují nevěrné (tj. milují jiného muže než je jejich manžel) manželky.

Příklad 10. (Hádanky) Hádanky z ostrova poctivců a padouchů: Jdete kolem tří obyvatel ostrova (A, B a C) a položíte otázku: „Kolik je mezi vámi poctivců?“.

(a) A něco zamumlá, a tak se zeptáte obyvatele B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že mezi námi je jediný poctivec.“ Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?

(b) Nyní A řekne: „Buď já jsem padouch nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(c) Dejme tomu, že A řekne: „Já jsem padouch, ale B ne.“ Co jsou A a B?

(d) A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se někdo zeptá C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co C odpoví?

Příklad 11. (Bonus) Odvoďte si, či si najděte jak na to, následující goniometrické vztahy.

(a) Pythagorova věta.

(b) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha$ a $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(c) Vztahy pro dvojnásobné a poloviční úhly funkcí sin a cos.

(d) Vyjádřete funkci $\sin 4x$ (či $\cos 4x$) pomocí násobků $\sin x$ a $\cos x$ (a jejich mocnin).

(e) Ukažte, že $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ a $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(f) Pro $x > 0$ ukažte, že platí:

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin x + \arccos x, \quad \frac{\pi}{2} = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}\ , \quad \arctan\frac{1}{x} = \operatorname{arccot} x.$$

Výsledky - I. Středoškolská matematika

Příklad 1. (Rovnice)

(a) $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $x = \frac{4}{3}$.

(c) $x \in \{\log 3, \log 4\}$.

(d) $x \in \{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$.

(e) $x \in \{-4, 6\}$.

(f) $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 4 \right\rangle$.

(g) $x = 0$.

(h) $x \in \{\frac{1}{8}, \sqrt{2}\}$.

(i) $t = \frac{1}{4}[-3 \pm \sqrt{33}]$.

(j) $x \in \left\{\frac{1}{8}, -1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$.

(k) $x \in \left\{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(l) $x \in \{2k\pi, \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 2. (Nerovnice)

(a) $x \in (-\infty, \frac{1}{4}(-9 - \sqrt{145})] \cup (-4, \frac{1}{4}(-9 + \sqrt{145})] \cup (1, 2)$.

(b) $x = 1$.

(c) $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

(d) $x \in (-\frac{5}{2}, \infty)$.

(e) $x \in [\frac{1}{2}(-5 - \sqrt{21}), -3)$.

(f) $x \in (0, \log_2 3)$.

(g) $x \in (\frac{1}{2}(1 - \frac{\pi}{2}) + \frac{k\pi}{2}, \frac{1}{2}(1 + \frac{\pi}{3}) + \frac{k\pi}{2}], k \in \mathbb{Z}$.

(h) $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

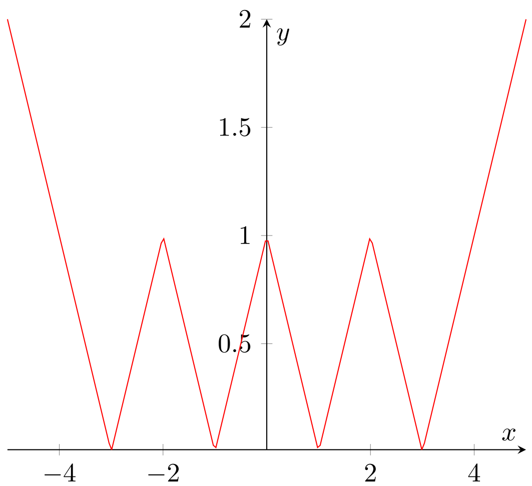
(i) $x \in [-2, 0] \cup [1, 3]$.

(j) $x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, +\infty)$.

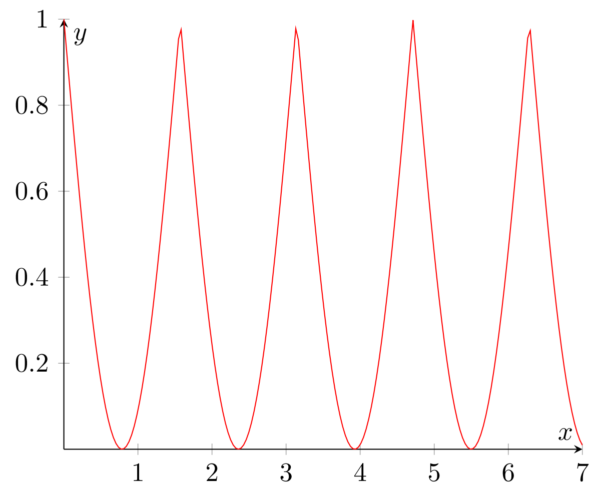
(k) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \right]$.

(l) $x \in \left[0, 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(2 + \frac{\sqrt{10}}{2}, 4\right]$.

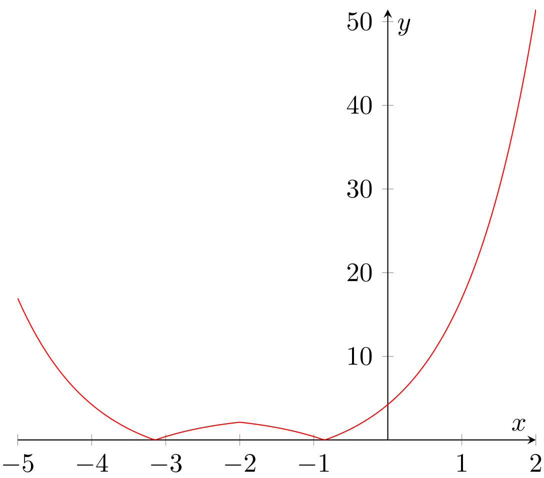
Příklad 3. (Grafy)

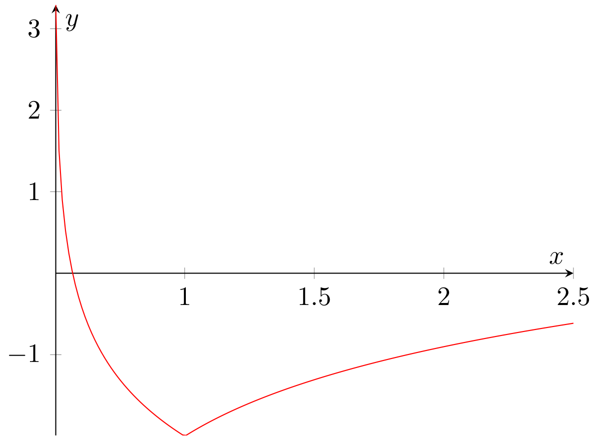


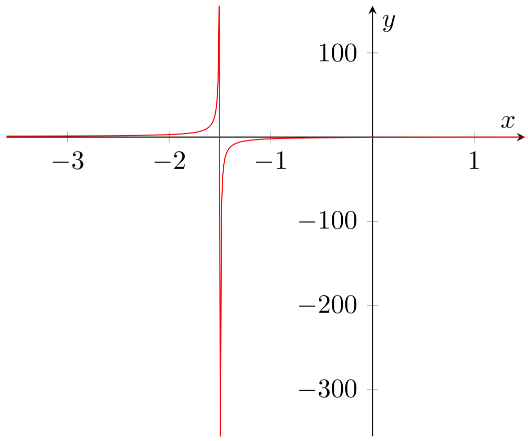
(a)

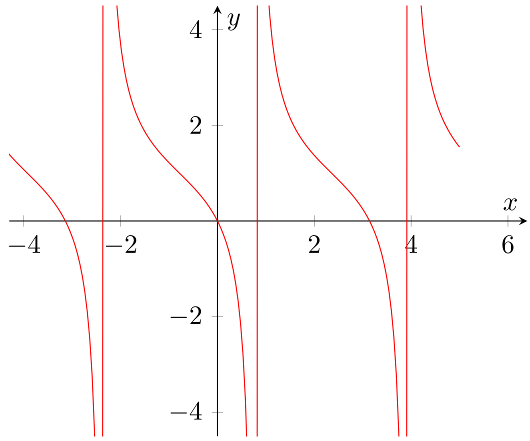


(b)

(c) 

(e) 

(d) 

(f) 

Příklad 4. (Parametry)

(a) $\alpha \in (\infty, 0] \cup (0, 1]:$ bez řešení, $\alpha > 1 : x \in \left(-\frac{1}{2}(\alpha+1), -1\right) \cup [-1, 0] \cup \left(0, \frac{1}{2}(\alpha-1)\right)$.

(b)

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &: x = -1, \\ \alpha = 1 &: x = -1, \\ \alpha \notin \{0,1\} &: x_{1,2} = \frac{1}{\alpha}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 2\alpha + \alpha^2}\right]. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \alpha > 0 &: \text{ žádné řešení}, \\ \alpha = 0 &: x \in \mathbb{R}, \\ \alpha < 0 &: x \in \left(-\infty, \log\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right). \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \alpha \geq 0 &: \text{ žádné řešení}, \\ \alpha < 0 &: x \in \left(-\sqrt{-\frac{1}{\alpha}}, -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{\alpha}}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{\alpha}}, \sqrt{-\frac{1}{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \alpha < 1 &: x \in \mathbb{R}, \\ \alpha = 1 &: x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \\ \alpha > 1 &: x \in (-\infty, -1 - \sqrt{\alpha - 1}) \cup (-1 + \sqrt{\alpha - 1}, +\infty) \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\alpha \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 2, +\infty) &: \text{ žádné řešení,} \\
\alpha \in (-4, -1\rangle &: x \in (-2 - \sqrt{4+a}, -2 + \sqrt{4+a}), \\
\alpha \in (-1, 2) &: x \in (-2 - \sqrt{2-a}, -2 + \sqrt{2-a}).
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
\alpha > 1 &: x \in \mathbb{R}, \\
\alpha \in \langle -1, 1\rangle &: x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{1}{2}\arcsin\alpha + k\pi \right) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\alpha + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\rangle, \\
\alpha < -1 &: \text{ žádné řešení.}
\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
\alpha > 0 &: x \in \mathbb{R}, \\
\alpha = 0 &: x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\
\alpha \leq -4 &: \text{ žádné řešení,} \\
\alpha \in (-4, 0) &: x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\pi - \arcsin(1 - \sqrt{-\alpha}) + 2k\pi, 2\pi + \arcsin(1 - \sqrt{-\alpha}) + 2k\pi).
\end{aligned}$$

Příklad 6. (Množiny)

(a) Množinou je interval $\langle e, +\infty)$.

(b) Množinou je $\langle -2, -1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$.

(c) Množinou je interval $(4, +\infty)$.

Příklad 8. (Negace)

(a) I like this list. Odpověď je individuální.

(b) Někteří velociraptoři neumí otevřít okno. Údajně platí negace (viz Google).

(c) Žádný savec neklade vejce. Platí původní výrok (ptakopysk).

(d) Má rád kočky i psy. Odpověď je individuální.

(e) $\forall x \in \mathbb{N} : 2 \geq x \vee x \geq 3$. Platí negace.

(f) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y \geq 0 \wedge x + y < 0$. Platí negace.

(g) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y \neq 1$. Platí negace.

(h) $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\, \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y \neq 1$. Platí původní výrok.

(i) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{Q} : y > x \vee x \geq y + 1$. Platí původní výrok.

(j) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{N} : y > x \vee x \geq y + 1$. Platí negace.

(k) $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}\, \exists z \in \mathbb{N} : z > x \wedge z \leq y$. Platí původní výrok.

(l) $\forall a, b \in \mathbb{N}\, \exists x \in \mathbb{R} : x > a \wedge -x^2 + bx > 0$. Platí původní výrok.

Příklad 9. (Logické zápisy)

(a) $\exists z \in Z\, \exists m \in M : S(m, z)$.

(b) $\exists m \in Z\, \exists z \in M : S(m, z)$. (Vskutku.)

(c) $\forall m \in M\, \forall z \in Z : S(m, z) \Rightarrow L_1(m, z)$.

(d) $\forall z \in Z\, \exists m \in M : L_1(m, z)$.

(e) $\forall z \in Z\, \forall m_1, m_2 \in M : (S(m_1, z) \wedge S(m_2, z)) \Rightarrow m_1 = m_2$.

(f) $\forall m \in M\, \forall z_1, z_2 \in Z : (S(m, z_1) \wedge S(m, z_2)) \Rightarrow z_1 = z_2$. (Nikoliv.)

(g) $\exists z_1, z_2 \in Z\, \exists m_1, m_2, m_3, m_4 \in M : (z_1 \neq z_2 \wedge m_1 \neq m_2 \wedge m_3 \neq m_4 \wedge S(m_1, z_1) \wedge L_2(m_2, z_1) \wedge S(m_3, z_2) \wedge L_2(m_4, z_2))$.

Příklad 10. (Hádanky)

(a) B je padouch a C je poctivec.

(b) A i B jsou poctivci.

(c) A i B jsou padouši.

(d) Ano.

Příklad 11. (Bonus)

(a) Uvažujte pravoúhlý trojúhelník ABC, s pravým úhlem u vrcholu C. Veďte kolmici z vrcholu C na přeponu (tj. výška). Dostanete tak dva menší trojúhelníky a podstatné je, že jsou oba podobné danému ABC (proč?). To znamená, že víte cosi o rovnosti poměrů délek stran. Manipulací vzniklých dvou rovnic dostanete závěr.

(b) Uvažujte pravoúhlý trojúhelník ABC, s pravým úhlem u vrcholu C, úhlem α u A a délkou přepony rovnou 1. Vytvořte další pravoúhlý trojúhelník ACD, s pravým úhlem u vrcholu D a úhlem β u A. Vyjádřete délky všech stran pomocí úhlů sinů a cosinů úhlů α a β. (Bude se vám hodit vést kolmici z vrcholu B na stranu AD.) Takhle dostane výsledek pro případ, kdy α, $\beta > 0$ a $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Pro ostatní hodnoty to plyne z periodicity a sudosti/lichosti funkcí sin a cos. Nakonec, vzorec pro rozdíl $\sin(\alpha - \beta)$, plyne přepsáním $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ a použitím již dokázaného.

(c) Pro první část použijte 11(b) (nebo Moivreovu větu). Pro druhou si uvědomte, že $x = 2 \cdot \frac{x}{2}$ a použijte první část.

(d) Použijte 11(b) (nebo Moivreovu větu).

(e) Vyjděte ze vzorců v 11(b) a vhodně s nimi manipulujte.

(f) Připomeňte si, co znamená např. $\arcsin x$ v kontextu trojúhelníku. Následně si nakreslete vhodný pravoúhlý trojúhelník, jedna strana bude mít délku 1.