

## IV. Limity funkcí

### Shrnutí teorie.

**Definice.** (Limita funkce) Řekneme, že číslo  $A \in \mathbb{R}^*$  je **limitou** reálné funkce  $f$  v bodě  $c \in \mathbb{R}^*$  (tento fakt zapisujeme jako  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ ), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P_\delta(c) : f(x) \in B_\varepsilon(A).$$

Přičemž pro  $c \in \mathbb{R}$  symbol  $P_\delta(c)$  značí množinu  $(c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ , tj. **prstencové  $\delta$ -okolí** bodu  $c$ . Podobně  $B_\delta(c)$  reprezentuje  $(c - \delta, c + \delta)$ , tj.  **$\delta$ -okolí bodu**  $c$ . Pro  $c$  z rozšířené reálné přímky značíme  $P_\delta(+\infty) = (\frac{1}{\delta}, +\infty) = B_\delta(+\infty)$ , podobně i okolí bodu  $-\infty$ .

Stejně jako u posloupností máme také větu jednoznačnosti limity (existuje-li), o aritmetice limit a větu o dvou polícajtech. Nakonec máme ještě následující verzi škály (pouze pro  $x \rightarrow +\infty$ ).

**Tvrzení.** (Škála:  $\log^{\text{něco}} x \ll x^{\text{něco}} \ll \text{něco}^x$  pro  $x \rightarrow +\infty$ ) Platí:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^\beta} = 0 \text{ pro } \alpha, \beta > 0.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0 \text{ pro } a > 1 \text{ a } \beta > 0.$$

**Definice.** (Spojitost funkce) Řekneme, že funkce  $f$  je **spojitá v bodě**  $c \in \mathbb{R}$ , jestliže  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

Limity a spojitost se také dají zkoumat pouze z jedné strany, tj. zleva a zprava. Vše funguje analogicky.

**Tvrzení.** (Limita složené funkce) Buď  $c, A, B \in \mathbb{R}^*$  a pro reálné funkce  $f$  a  $g$  necht' platí  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = A$  a  $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ . Necht' dále platí alespoň jedna z následujících podmínek:

$$(P) \exists \delta > 0 \forall x \in P_\delta(c) : g(x) \neq A.$$

$$(S) \text{ Funkce } f \text{ je spojitá v bodě } A.$$

Potom je  $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = B$ . Speciálně máme:

(Afinní substituce) Jsou-li  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  a  $b \in \mathbb{R}$ , pak  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{y \rightarrow \frac{c-b}{a}} f(ay + b)$ .

**Tvrzení.** (Znamé limity) Z přednášky víme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1.$$

Dále známe limity v krajních bodech definičních oborů funkcí  $\exp$ ,  $\log$ ,  $\cotg$ ,  $\arctan$ ,  $\operatorname{arccotg}$ .

Zmíníme, že důsledkem jsou (to už musíte vysvětlit) speciálně limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{\arccos^2 x} = \frac{1}{2}.$$

Nakonec se hodí znát, že obecná mocnina se pro  $a > 0$  a  $b \in \mathbb{R}$  zavádí jako  $a^b = e^{b \log a}$ .

**Tvrzení.** (Heine) Necht'  $c, A \in \mathbb{R}^*$  a pro reálnou funkci  $f$  platí  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ . Buď  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  posloupnost prvků z  $\mathcal{D}_f$  taková, že  $x_n \neq c, \forall n \in \mathbb{N}$ , a splňující  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$ . Potom platí  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$ .

Známe-li derivace, tak máme ještě jeden, někdy užitečný, výsledek.

**Tvrzení.** (l'Hospital) Necht' funkce  $f$  a  $g$  mají na jistém prstencovém okolí bodu  $a \in \mathbb{R}^*$  vlastní derivace a existuje  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Necht' platí jedna z podmínek:

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty.$$

Potom existuje i limita podílu funkcí  $f$  a  $g$  a platí rovnost  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Příklad 1.** (Elementární) Uhodněte limity a ověřte je z definice:

- |                                                    |                                                  |                                           |                                             |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 3)$ .             | (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ .     | (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$ . | (g) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x)$ .    |
| (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2}$ . | (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$ . | (f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x$ .   | (h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ . |

**Příklad 2.** (Spojitost, vytýkání a AL) Určete limity:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x. & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x-1}}. & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x-1}. & \text{(j)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-2x}{2x^3+x^2-3x}. \\
 \text{(b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}. & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+3x+5-\frac{1}{x}}{8x^3+4x^2-3}. & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}. & \text{(k)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}. \\
 \text{(c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x+1}. & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow -7} \frac{-3}{7+x}. & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}. & \text{(l)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}.
 \end{array}$$

**Příklad 3.** (Odmocniny) Určete limity:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}. & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}. & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}. \\
 \text{(b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}. & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}. & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}. \\
 \text{(c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{4x^2-x}. & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}. & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{9+x}-2}.
 \end{array}$$

**Příklad 4.** (Goniometrické funkce) Určete limity:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}. & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}. & \text{(m)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}. \\
 \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 - \cos 4x^2}. & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}. & \text{(n)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}. \\
 \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{8x}}. & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right). & \text{(o)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(x - \frac{\pi}{4})^2}. \\
 \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos x}. & \text{(j)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}. & \text{(p)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5} \arcsin(\sqrt{x^5+1} - \sqrt{x^5-1})}. \\
 \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}. & \text{(k)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}. & \text{(q)} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sin x} \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}. \\
 \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}. & \text{(l)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}. & \text{(r)} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{x^3 \cos x - x}}{x \cdot \cos(\arctan(\frac{1}{x^2}))}.
 \end{array}$$

**Příklad 5.** (Mocninné funkce & logaritmy) Určete limity:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x^3)}{x^3}. & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}. & \text{(k)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1-x+x^2)}{\log(x^{10}+x+1)}. \\
 \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \log \frac{x}{\sin x}. & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\log(x+1) - \log x). & \text{(l)} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{e - e^{x^2-3}}{\cos \sqrt{x-2}-1}. \\
 \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}. & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x}. & \text{(m)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{1+\sin^2 x}}{\log(\cos x)}. \\
 \text{(d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \left( 1 - \frac{2}{x^2} \right). & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 - \arctan x)}{\log(x^2 + \arctan x)}. & \text{(n)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\log(x^2+4) - \log(x^2)}}{\frac{\pi}{2} + \arctan x}. \\
 \text{(e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)}. & \text{(j)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)}. & \text{(o)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{x-1} + \sqrt[3]{\cos(\pi x)}}{\log^2 x}.
 \end{array}$$

**Příklad 6.** (Exponenciální trik) Určete limity:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}. & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+\log x}{\log x} \right)^{\log x}. & \text{(k)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+e^{x^3})^{\sqrt{x^2+5x} - \sqrt{x^2-3x}}. \\
 \text{(b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{2x}. & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x \cdot 2^x}{1+x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}. & \text{(l)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (2 \cos x)^{\frac{\sqrt{3}}{\pi-3x}}. \\
 \text{(c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}. & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \left( \tan \left( x + \frac{\pi}{8} \right) \right)^{\tan 2x}. & \text{(m)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^x - \sqrt{1+\sin^3 x}}{x^3}. \\
 \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\cot^2 x}. & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+\tan x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}. & \text{(n)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 \sin^2 x)^{\frac{1}{\sin x - \cos x}}. \\
 \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 0+} (e^x - 1)^{\frac{\tan^2 x}{x}}. & \text{(j)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}. & \text{(o)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4^{\tan x} + \cos x}{2} \right)^{\cot x}.
 \end{array}$$

**Příklad 7.** (Heine) Určete limity:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}. & \text{(d)} \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \sin \frac{n+1}{2n^2+1}. & \text{(g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(\sqrt{n^2+\sin^2 n} - \sqrt{n^2-\cos^2 n})}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}. \\
 \text{(b)} \lim_{x \rightarrow \pi} 3 \frac{1}{\sin x}. & \text{(e)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4n^2+1} \log \left( \frac{2+n}{1+n} \right). & \text{(h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+1} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan n \right). \\
 \text{(c)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^n. & \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n+1)}{\sqrt[3]{n^3+2n^2}}. & \text{(i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n+\cos \frac{3}{n}}}{\sqrt[6]{n^2+\sin \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{n}}.
 \end{array}$$

## Výsledky - IV. Limity funkcí

### Příklad 1. (Elementární)

- |        |                 |                 |                 |
|--------|-----------------|-----------------|-----------------|
| (a) 6. | (c) Neexistuje. | (e) 0.          | (g) 20.         |
| (b) 1. | (d) $+\infty$ . | (f) $+\infty$ . | (h) Neexistuje. |

### Příklad 2. (Spojitost, vytýkání a AL)

- |        |                            |                 |                                       |
|--------|----------------------------|-----------------|---------------------------------------|
| (a) 1. | (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . | (g) 6.          | (j) $\frac{2}{3}$ .                   |
| (b) 0. | (e) $\frac{1}{5}$ .        | (h) $-\infty$ . | (k) $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ . |
| (c) 0. | (f) Neexistuje.            | (i) $+\infty$ . | (l) 6.                                |

### Příklad 3. (Odmocniny)

- |                     |                       |                        |
|---------------------|-----------------------|------------------------|
| (a) $+\infty$ .     | (d) $\frac{1}{2}$ .   | (g) $\frac{1}{144}$ .  |
| (b) $-1$ .          | (e) $\frac{4}{3}$ .   | (h) $\frac{3}{2}$ .    |
| (c) $\frac{1}{4}$ . | (f) $-\frac{1}{16}$ . | (i) $\frac{112}{27}$ . |

### Příklad 4. (Goniometrické funkce)

- |                            |                            |                       |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------|
| (a) 5.                     | (g) 4.                     | (m) $\frac{4}{3}$ .   |
| (b) $\frac{1}{8}$ .        | (h) $-1$ .                 | (n) $-\frac{1}{12}$ . |
| (c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . | (i) $\frac{1}{2}$ .        | (o) Neexistuje.       |
| (d) $\sqrt{2}$ .           | (j) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . | (p) 1.                |
| (e) 2.                     | (k) $-3$ .                 | (q) 2.                |
| (f) $\frac{1}{2}$ .        | (l) $\frac{1}{4}$ .        | (r) $-\frac{1}{6}$ .  |

### Příklad 5. (Mocninné funkce & logaritmy)

- |                     |                               |                             |
|---------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| (a) 3.              | (f) $-\frac{1}{2}$ .          | (k) $\frac{1}{5}$ .         |
| (b) 0.              | (g) 1.                        | (l) $8e$ .                  |
| (c) $\frac{1}{2}$ . | (h) $e$ .                     | (m) $\frac{7}{6}$ .         |
| (d) $-2$ .          | (i) $\frac{3}{2}$ .           | (n) 2.                      |
| (e) 0.              | (j) $\frac{\log 3}{\log 2}$ . | (o) $1 + \frac{\pi^2}{6}$ . |

### Příklad 6. (Exponenciální trik)

- |                            |                     |                      |
|----------------------------|---------------------|----------------------|
| (a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ . | (f) $e$ .           | (k) 1.               |
| (b) $e^6$ .                | (g) $\frac{2}{3}$ . | (l) $e$ .            |
| (c) $e^3$ .                | (h) 0.              | (m) $-1$ .           |
| (d) $e$ .                  | (i) 1.              | (n) $e^{\sqrt{2}}$ . |
| (e) 1.                     | (j) 1.              | (o) 2.               |

### Příklad 7. (Heine)

- |                       |                     |                     |
|-----------------------|---------------------|---------------------|
| (a) Neexistuje.       | (d) $\frac{1}{2}$ . | (g) $\frac{1}{2}$ . |
| (b) Neexistuje.       | (e) 2.              | (h) 1.              |
| (c) $\frac{1}{e^2}$ . | (f) $\log 3$ .      | (i) $\frac{9}{2}$ . |