II. Suprema a infima množin

Shrnutí teorie. Číslo $s \in \mathbb{R}$ se nazývá **supremum množiny** M (píšeme $s = \sup M$), jestliže platí:

(1) $\forall x \in M : x \leq s$ (s je horní závora M) a

(2) $\forall s' < s\ \exists x \in M : x > s'$ (s je nejmenší horní závora).

Pokud existuje číslo patřící do množiny M splňující (1), tak ho značíme $\max M$ (**maximum množiny** M). Podmínka (2) pak platí triviálně, tj. $\sup M = \max M$ (tj. suprema se nabývá).

Obdobně $i = \inf M \in \mathbb{R}$ je **infimum množiny** M, pokud platí:

(3) $\forall x \in M : x \geq i$ (i je dolní závora M) a

(4) $\forall i' > i\ \exists x \in M : x < i'$ (i je největší dolní závora).

Pokud existuje číslo patřící do množiny M splňující (3), tak ho značíme $\min M$ (**minimum množiny** M). Podmínka (4) pak platí triviálně, tj. $\inf M = \min M$ (tj. infnima se nabývá).

Není-li $\emptyset \neq M$ omezená shora (zdola), zavádíme $\sup M = +\infty$ ($\inf M = -\infty$).

Tvrzení. Buď $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ shora (zdola) omezená množina. Pak má množina M supremum (infimum).

Tvrzení. Platí tzv. **Archimédova vlastnost**, tj.: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < n$.

V následujících příkladech najděte (existují-li) suprema a infima zadaných množin. Dále rozhodněte o (ne)existenci jejich maxim a minim.

Příklad 1. (Konečné diskrétní množiny, intervaly a jejich sjednocení)

(a) $A = \emptyset$.

(b) $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$.

(c) $C = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$.

(d) $D = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 0\}$.

(e) $E = \langle -2, 5)$.

(f) $F = (1, 4\rangle \cup \{-3\}$.

(g) $G = (-2, 0\rangle \cup \{1\} \cup ((2, 4\rangle \cap (3, 4))$.

(h) $H = \{x \in \mathbb{R};\ x^4 < 16\}$.

(i) $I = \{x \in \mathbb{R};\ \frac{1}{x-1} > 2\}$.

(j) $J = \{x \in \mathbb{R};\ ||x-1| - |x-2|| < 1\}$.

(k) $K = \{\arctan x;\ x \geq -1\}$.

(l) $L = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi)\}$.

(m) $M = \{\sin x;\ x \in (0, \pi)\}$.

(n) $N = \{x \in \mathbb{R};\ x \sin x < 1\}$.

Příklad 2. (Nekonečné diskrétní množiny)

(a) $A = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $B = \{\frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $C = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$.

(d) $D = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{Z}\}$.

(e) $E = \{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k};\ n \in \mathbb{N}\}$.

(f) $F = \{(-1)^n + \frac{1}{1+n};\ n \in \mathbb{N}\}$.

(g) $G = \{\frac{n}{n+m};\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$.

(h) $H = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}\}$.

(i) $I = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$.

(j) $J = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$.

(k) $K = \{4^{(-1)^j 3^k};\ j, k \in \mathbb{Z}\}$.

(l) $L = \{\cos\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi;\ n \in \mathbb{N}\}$.

(m) $M = \{\cos\left(2n + \frac{1}{2n}\right)\pi;\ n \in \mathbb{N}\}$.

(n) $N = \{\cos\left(2n - 1 + \frac{1}{2n-1}\right)\pi;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Příklad 3. (Bonus) Uvažujte funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ a číslo $N \in \mathbb{N}$. Definujme posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ předpisem $x_n = \frac{2n}{N}$, jde o tzv. dělení intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

(1) Spočítejte sup a inf funkce f na intervalech $I_n := \langle x_n, x_{n+1}\rangle$, $n = 0, \dots, N-1$.

(2) Vyjádřete $\overline{S_N} := \sum_{n=0}^{N-1}(x_{n+1} - x_n) \cdot \sup\limits_{x \in I_n} f(x)$ a $\underline{S_N} := \sum_{n=0}^{N-1}(x_{n+1} - x_n) \cdot \inf\limits_{x \in I_n} f(x)$.

Měl by se hodit vzorec pro $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Rozmyslete si, co to vlastně sčítáme (třeba pro $N = 5$).

(3) Spočítejte $\inf\limits_{N \in \mathbb{N}} \overline{S_N}$ a $\sup\limits_{N \in \mathbb{N}} \underline{S_N}$. Mělo by vyjít v obou případech stejné číslo, a to $\frac{8}{3}$.

Právě jste tedy spočítali, že plocha mezi grafem x^2 a osou x na úseku $\langle 0, 2\rangle$ je rovna právě tomuto číslu. Jedná se o tzv. Riemannův integrál, symbolicky $(\mathcal{R})\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$.

Výsledky - II. Suprema a infima množin

Příklad 1. (Konečné diskrétní množiny, intervaly a jejich sjednocení)

(a) Supremum ani infimum neexistuje.

(b) $\max B = 7, \min B = 1$.

(c) $\sup C = +\infty$, $\inf C = 0$, minimum neexistuje.

(d) $\max D = 0$, $\inf D = -\infty$.

(e) $\sup E = 5$, maximum neexistuje, $\min E = -2$.

(f) $\max F = 4, \min F = -3$.

(g) $\sup G = 4$, $\inf G = -2$, maximum ani minimum neexistuje.

(h) $\sup H = 2, \inf A = -2$, maximum ani minimum neexistuje.

(i) $\sup I = \frac{3}{2}, \inf I = 1$, maximum ani minimum neexistuje.

(j) $\sup J = 2$, $\inf J = 1$, maximum ani minimum neexistuje.

(k) $\sup K = \frac{\pi}{2}$, maximum neexistuje, $\min K = -\frac{\pi}{4}$.

(l) $\max L = 1, \min L = -1$.

(m) $\max M = 1, \inf M = 0$, minimum neexistuje.

(n) $\sup N = +\infty$, $\inf N = -\infty$. (Uvědomte si, co to dělá třeba pro hodnoty $x = \pm\frac{k\pi}{2}$.)

Příklad 2. (Nekonečné diskrétní množiny)

(a) $\max A = 1, \inf A = 0$, minimum neexistuje.

(b) $\sup B = 1$, maximum neexistuje, $\min B = \frac{1}{2}$.

(c) $\max C = \frac{5}{6}, \inf C = 0$, minimum neexistuje.

(d) $\sup D = +\infty$ a $\inf D = 0$, minimum neexistuje.

(e) $\max E = \frac{2}{3}, \inf E = \frac{1}{2}$, minimum neexistuje.

(f) $\max F = \frac{4}{3}, \inf F = -1$, minimum neexistuje.

(g) $\sup G = 1, \inf G = 0$, maximum ani minimum neexistuje.

(h) $\sup H = +\infty$, $\inf H = -\infty$.

(i) $\sup I = +\infty$, $\min I = 3$.

(j) $\max J = 0$, $\inf J = -\infty$.

(k) $\sup K = +\infty$, $\inf K = 0$, minimum neexistuje.

(l) $\max L = 1, \inf L = -1$, minimum neexistuje.

(m) $\sup M = 1$, maximum neexistuje a $\min M = 0$.

(n) $\max N = 1, \inf N = -1$, minimum neexistuje.