ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

Texty použité při přípravě kurzu

- Hájek, Habala, Zizler: Introduction to Banach Spaces I
- Holický: materiály z webu
- Lukeš: Zápisky z funkcionální analýzy
- Rudin: Functional Analysis
- Spurný: materiály z webu
- Taylor: Úvod do funkcionální analýzy
- Yosida: Functional Analysis

1. Banachovy a Hilbertovy prostory - základní pojmy

OZNAČENÍ

Symbol $\mathbb{F}$ bude vždy označovat množinu reálných nebo komplexních čísel.

DEFINICE

Nechť $(X,+,\cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Normou na X rozumíme zobrazení $\|\cdot\|: X \to [0,\infty)$ takové, že platí

(i) $\forall x \in X: \|x\| = 0 \iff x = 0$,

(ii) $\forall \lambda \in F \; \forall x \in X: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(iii) $\forall x,y \in X: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dvojici $((X,+,\cdot),\|\cdot\|)$ nazýváme normovaným lineárním prostorem.

ZNAČENÍ

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak značíme:

- $B(x,r) = \{y \in X;\ \|x-y\| < r\}$
- $B_X = \{x \in X;\ \|x\| \leq 1\}$,
- $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$,
- $Y \subset\subset X$: Y je vektorový podprostor X (ne nutně uzavřený)

VĚTA 1.1

Nechť $(X,\|\cdot\|)$ je NLP. Potom platí

(i) Zobrazení $\rho: X\times X \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\rho(x,y) = \|x-y\|$ je metrika na X.

(ii) Zobrazení

$$\begin{aligned} +: X\times X \to X, &\qquad (x,y) \mapsto x+y, \\ \cdot: F\times X \to X, &\qquad (\lambda,x) \mapsto \lambda x, \\ \|\cdot\|: X \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto \|x\| \end{aligned}$$

jsou spojitá, přičemž na $X\times X$ uvažujeme metriku

$\sigma((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{\|x_1-y_1\|, \|x_2-y_2\|\}$.

DŮKAZ

(i) Snadné, viz také MA2a.

(ii) Nechť $x_0, y_0 \in X$ a $\varepsilon > 0$. Pokud $x \in B(x_0, \varepsilon)$ a $y \in B(y_0, \varepsilon)$, pak

$$\|(x+y) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < 2\varepsilon.$$

Pokud $\lambda_0 \in \mathbb{F}$, $x_0 \in X$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \min\{\varepsilon, 1\}$. Pokud $x \in B(x_0, \varepsilon)$ a $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, potom

$$\begin{aligned}\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| &= \|\lambda x - \lambda x_0 + \lambda x_0 - \lambda_0 x_0\| \\ &\leq |\lambda| \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \cdot \|x_0\| \\ &\leq (|\lambda_0| + 1)\varepsilon + \varepsilon \cdot \|x_0\| = (|\lambda_0| + 1 + \varepsilon)\|x_0\|.\end{aligned}$$

Spojitost normy. Pokud $x_0 \in X$ a $\varepsilon > 0$. Potom položíme $\delta = \varepsilon$ a pro $x \in B(x_0, \delta)$ máme

$$\big|\|x\| - \|x_0\|\big| \leq \|x - x_0\| < \delta = \varepsilon.$$

■

DEFINICE

Řekneme, že normovaný lineární prostor $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův, jestliže (X, ρ), kde $\rho(x,y) = \|x - y\|$, je úplný metrický prostor.

PŘÍKLADY

- $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \ell_p, c_0, \mathcal{C}(K)$, kde K je neprázdný metrický kompaktní prostor
- $c_{00} = \{\{x_n\};\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : x_n = 0\}$, $\|x\| = \|x\|_\infty$, není Banachův

DEFINICE

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že tyto normy jsou ekvivalentní, pokud existují kladné konstanty $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $c_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2$.

VĚTA 1.2

Nechť $(X, \|\cdot\|_1)$ a $(X, \|\cdot\|_2)$ jsou NLP. Potom je ekvivalentní

(i) normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní,

(ii) existují kladné konstanty $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a_1 B_{(X, \|\cdot\|_1)} \subseteq B_{(X, \|\cdot\|_2)} \subseteq a_2 B_{(X, \|\cdot\|_1)}.$$

POZNÁMKA

Je-li $A \subset X$, $c \in \mathbb{F}$, potom $cA = \{c \cdot a;\ a \in A\}$.

DŮKAZ

(i) ⇒ (ii) Označme $B_1 = B_{(X, \|\cdot\|_1)}$ a $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$.
Nechť $c_1, c_2 > 0$ jsou takové, že

$$\forall x \in X:\ c_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2.$$

Dokážeme $\frac{1}{c_2} B_2 \subseteq B_1 \subseteq \frac{1}{c_1} B_2$. Pro $x \in B_2$ máme $\|\frac{1}{c_2}x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq 1$, tj. $\frac{1}{c_2}x \in B_1$. Pro $x \in B_1$ máme $\|x\|_2 \leq \frac{1}{c_1}\|x\|_1 \leq \frac{1}{c_1}$, tj. $x \in \frac{1}{c_1} B_2$.

(ii) ⇒ (i) Pro libovolné $x \in X$, $x \neq 0$, platí

$$\left\| a_1 \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 \leq 1 \quad \text{a} \quad \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_1 \leq a_2,$$

odtud

$$a_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq a_2\|x\|_2.$$

Pro $x = 0$ poslední nerovnosti také platí. ∎

DŮSLEDEK 1.3

Nechť $(X, \|\cdot\|_1)$ a $(X, \|\cdot\|_2)$ jsou normované lineární prostory, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní. Potom $G \subset X$ je otevřená v $(X, \|\cdot\|_1)$ právě když je otevřená v $(X, \|\cdot\|_2)$.

KONEC 1. PŘEDNÁŠKY, 5.10.2010

DEFINICE

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je NLP a $A \subset X$.

- Řekneme, že mna $A \subset X$ je konvexní, jestliže platí

$$\forall x, y \in A\ \forall \alpha \in [0,1]:\ \alpha x + (1-\alpha) y \in A.$$

- Konvexní obal množiny A definujeme předpisem

$$\operatorname{co} A = \bigcap \{F \subset X;\ A \subset F,\ F \text{ je konvexní množina}\}.$$

- Uzavřený konvexní obal množiny A definujeme předpisem

$$\overline{\operatorname{co}}\, A = \bigcap \{F \subset X;\ A \subset F,\ F \text{ je uzavřená konvexní množina}\}.$$

• Lineární obal množiny A definujeme předpisem

$$\operatorname{span} A = \bigcap \{F \subset X;\ A \subset F,\ F \text{ je vektorový podprostor}\}.$$

• Uzavřený lineární obal množiny A definujeme předpisem

$$\overline{\operatorname{span}}\, A = \bigcap \{F \subset X;\ A \subset F,\ F \text{ je uzavřený vektorový podprostor}\}.$$

CVIČENÍ

(a) $\overline{\operatorname{span}}\, A = \overline{\operatorname{span} A}$, $\overline{\operatorname{co}}\, A = \overline{\operatorname{co} A}$

(b) $\overline{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$, $\operatorname{Int} \overline{B}(x,r) = B(x,r)$

VĚTA 1.4 (opakování)

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Potom $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ je norma na X.

DŮKAZ

Viz MA2b. ■

LEMMA 1.5 (opakování)

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Potom je zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \to \mathbb{F}$ spojité.

DŮKAZ

Viz MA2b. ■

VĚTA 1.6 (Jordan - von Neumann, 1935)

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Na X existuje skalární součin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ takový, že $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ pro každé $x \in X$.

(ii) Norma $\|\cdot\|$ splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tj.

$$\forall x,y \in X: \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

DŮKAZ

(i) => (ii)

Platí

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle$$
$$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$+ \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(ii) => (i)

a) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad (*)$$

$$(x,z) + (y,z) = \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2 - \|x+y-2z\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right)$$

$$= 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right) \quad (**)$$

$(0,z) = 0$ z $(*)$

$y := 0$: $\quad (x,z) = 2\left(\frac{x}{2}, z\right)$ $(***)$ $\quad \Rightarrow \quad (x,z) + (y,z) = (x+y,z)$

Pro $\alpha = \frac{m}{2^k}$, $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ máme $(\alpha x, y) = \alpha (x,y)$ ($(***)$ + linearita).

Pro $\lambda \in \mathbb{R}$ existuje λ_n v uvedeném tvaru, že $\lambda_n \to \lambda$. Potom

$$\left.\begin{aligned} (\lambda_n x, y) &\to (\lambda x, y) \\ &\shortparallel \\ \lambda_n (x,y) &\to \lambda (x,y) \end{aligned}\right\} \text{VĚTA 1.2} + (*) \Rightarrow (\lambda x, y) = \lambda (x,y)$$

b) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

a dál podobně. ∎

VĚTA 1.7

Nechť X je NLP. Potom je ekvivalentní:

(a) X je Banachův.

(b) Pro každou posloupnost (x_n) prvků X splňující $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergentní.

DŮKAZ

$\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}$ splňuje $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, potom je $\{s_n\}$ cauchyovská, neboť

$$\|s_n - s_m\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \|x_j\|, \quad n > m.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je tedy konvergentní.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská. Nalezneme psl. $\{n_k\}$ takovou, že $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \infty$, a tedy

$$s_k = x_{n_1} - x_{n_2} + x_{n_2} - x_{n_3} + \dots + x_{n_{k-1}} - x_{n_k} = x_{n_1} - x_{n_k} \to s \in X$$

Odtud $\{x_{n_k}\}$ je konvergentní k jistému x^* a tedy $\{x_n\}$ je konvergentní, neboť

$$\|x^* - x_n\| \leq \|x^* - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x_n\|.$$

■

KONEC 2. PŘEDNÁŠKY, 12.10.2010

VĚTA 1.8

Nechť X je NLP. Potom existuje Banachův prostor $\tilde{X}$ a lineární zobrazení $T: X \to \tilde{X}$ takové, že

(i) T je izometrie, tj. $\forall x, y \in X: \|Tx - Ty\| = \|x - y\|$,

(ii) $\overline{T(X)} = \tilde{X}$.

Je-li navíc X unitární, potom $\tilde{X}$ je Hilbertův. Pokud existuje Banachův prostor Y a lineární izometrie $L: X \to Y$ taková, že $\overline{L(X)} = Y$, potom existuje lineární izometrie $S: \tilde{X} \to Y$ na Y.

2. Operace s Banachovými prostory

- Nechť Z je uzavřený podprostor Banachova prostoru $(X, \|\cdot\|)$. Potom $(Z, \|\cdot\|_Z)$ je Banachův prostor.

- Nechť Z je podprostor normovaného lineárního prostoru X nad $\mathbb{F}$. Potom relace $\sim$ definovaná na X předpisem $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Z$ je relace ekvivalence. Označme třídu ekvivalence určenou prvkem $x \in X$ symbolem $[x]$ a položme $X/Z = \{[x];\ x \in X\}$. Pro $x, y \in X$, $c \in \mathbb{F}$ definujeme operace $+: X/Z \times X/Z \to X/Z$ a $\cdot: \mathbb{F} \times X/Z \to X/Z$ předpisem

$$[x] + [y] = [x+y],$$
$$c[x] = c[x].$$

- ověření korektnosti definice
- $(X/Z, +, \cdot)$ je vektorový prostor

Nechť $Y \subseteq X$ je uzavřený podprostor
Dále definujeme $\|[x]\|_{X/Y} = \inf\{\|x - y\|;\ y \in Y\}$.

Ověření vlastností normy:

- $\|[x]\| = 0 \Leftrightarrow \inf\{\|x - y\|;\ y \in Y\} = 0 \Leftrightarrow x \in Y$
- $\|\lambda[x]\| = \inf\{\|\lambda x + y\|;\ y \in Y\} = |\lambda| \cdot \inf\{\|x + \frac{1}{\lambda} y\|;\ y \in Y\}$, $\lambda \neq 0$

$$= |\lambda| \cdot \|[x]\|$$

- $\|[x_1]\| + \|[x_2]\| = \inf\{\|x_1 - y\|;\ y \in Y\} + \inf\{\|x_2 - y\|;\ y \in Y\}$

$$\|[x_1 + x_2]\| = \inf\{\|x_1 + x_2 - y_1 - y_2\|;\ y_1, y_2 \in Y\}$$

$$\leq \inf\{\|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|;\ y_1, y_2 \in Y\} = \inf\{\|x_1 - y_1\|;\ y_1 \in Y\} + \inf\{\|x_2 - y_2\|;\ y_2 \in Y\}$$

- $x \to [x]$ je lineární surjekce

DEFINICE

Nechť X je NLP, $Y \subset\subset X$ je uzavřený. Potom $(X/Y, \|\cdot\|)$ nazýváme faktorprostor X podle Y.

VĚTA 2.1

Nechť X je Banachův, $Y \subset\subset X$ je uzavřený. Potom X/Y je Banachův.

DŮKAZ

Vezměme posloupnost prvků $\{[x_n]\}$ prostoru X/Y splňující $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\| < \infty$.
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $y_n \in Y$ splňující $\|x_n - y_n\| \leq \|[x_n]\| + \frac{1}{2^n}$.
Potom $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \infty$. Položme

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n).$$

Potom

$$\|[x_1] + \dots + [x_m] - [x]\| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \to 0, \; m \to \infty.$$

Dokazované tvrzení pak plyne z VĚTY 1.7.

■

DEFINICE (algebraický součet)

Nechť X je vektorový podprostor, $A, B \subset\subset X$. Pak X je algebraickým součtem A a B, značíme $X = A \oplus B$, je-li
- $A \cap B = \{0\}$,
- $\mathrm{span}(A \cup B) = X$.

B nazýváme algebraický doplněk A.

$X = x_A + x_B$

$P_A : x \mapsto x_A \qquad P_B : x \mapsto x_B$

VĚTA 2.2

(1) P_A, P_B jsou lineární, $P_A + P_B = I$

(2) $P_A^2 = P_A$

(3) $A = \mathrm{Rng}\, P_A = \mathrm{Ker}\, P_B$, $B = \mathrm{Rng}\, P_B = \mathrm{Ker}\, P_A$

(4) je-li $P: X \to X$ lineární, $P^2 = P$, pak $X = \mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Rng}\, P$,
$P = P_{\mathrm{Rng}\, P}$, $I - P = P_{\mathrm{Ker}\, P}$

KONEC 3. PŘEDNÁŠKY, 19.10.2010

DŮKAZ

(1) $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

$$\alpha x + \beta y = \alpha x_A + \alpha x_B + \beta y_A + \beta y_B = \alpha x_A + \beta y_A + \alpha x_B + \beta y_B = (\alpha x + \beta y)_A + (\alpha x + \beta y)_B$$

(2) $x_A = x_A + \sigma$

(3) $\mathrm{Rng}\, P_A = A$ .... zřejmé

$y \in A$: $\quad y = y_A + \sigma \implies y_B = \sigma \implies A \subseteq \mathrm{Ker}\, P_B \subseteq A$

(4) $x \in \mathrm{Ker}\, P \cap \mathrm{Rng}\, P$

$$\left.\begin{array}{l} Px = \sigma \\ x = Py \end{array}\right\} \implies x = Py = P(Py) = P(x) = \sigma$$

$$x = \overbrace{(x - Px)}^{\in \mathrm{Ker}\, P} + \overbrace{Px}^{\in \mathrm{Rng}\, P}$$

$$P(x - Px) = Px - Px = \sigma$$

DEFINICE

Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení splňující $P^2 = P$ se nazývá **projekce**.

DEFINICE

Nechť X je NLP a $X = A \oplus B$. Řekneme, že X je **topologickým součtem** A a B ($X = A \oplus_t B$), jestliže P_A je spojitá. B je **topologický doplněk** A.

POZNÁMKA

(1) Každý podprostor $A \subseteq\subseteq X$ má algebraický doplněk.
(2) Ne každý uzavřený podprostor A Banachova prostoru má topologický doplněk, např. c_0 v l_∞ nemá topologický doplněk.

PLATÍ:

- $X = A \oplus_t B$, pak A, B jsou uzavřené ($A = \operatorname{Ker} P_B$, $B = \operatorname{Ker} P_A$)
- Je-li X Banachův, $X = A \oplus B$, A, B uzavřené, potom $X = A \oplus_t B$.
  [Důkaz později.]

VĚTA 2.3

Nechť X je vektorový prostor, $Y \subseteq\subseteq X$, $X = Y \oplus A$. Potom X/Y je izomorfní s A (tj. existuje lineární bijekce).

DŮKAZ

$L : a \mapsto [a]$

- L je lineární ... O.K.
- L je prosté: $[a] = o \Rightarrow a \in Y \cap A \Rightarrow a = o$
- L je na: $x \in X \Rightarrow x = \underset{\in Y}{y} + \underset{\in A}{a} \Rightarrow L(a) = [a] = [x]$. ∎

DEFINICE

Nechť X je vektorový prostor, $Y \subseteq\subseteq X$. **Kodimenze** podprostoru Y je definována jako $\dim(X/Y)$.

3. Operátory a funkcionály

VĚTA 3.1

Nechť X, Y jsou NLP a $T: X \to Y$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) T je spojité,
(ii) T je spojité v o,
(iii) existuje $C \geq 0$ takové, že $\|Tx\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$,
(iv) T je lipschitzovské,
(v) T je stejnoměrně spojité.

DŮKAZ

(i) $\Rightarrow$ (ii) O.K.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\exists \delta > 0 \ \forall x \in B(o, \delta): \|Tx\| \leq 1$

$y \in X, y \neq o$:

$$\left\|T\left(\frac{\delta}{2} \frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \leq 1 \Rightarrow \|Ty\| \leq \frac{2}{\delta}\|y\|, \quad C := \frac{2}{\delta}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq C\|x-y\|$$

(iv) $\Rightarrow$ (v) K $\varepsilon > 0$ volíme $\delta := \frac{1}{C}\varepsilon$. Potom pro $\|x-y\| < \delta$ máme

$$\|Tx - Ty\| \leq C\|x-y\| < \varepsilon.$$

(v) $\Rightarrow$ (i) O.K. ∎

DEFINICE

Nechť X, Y jsou NLP nad $\mathbb{F}$. Potom $\mathcal{L}(X,Y)$ značí množinu všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y. Na $\mathcal{L}(X,Y)$ definujeme normu předpisem

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|; x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

POZNÁMKA

(i) $\mathcal{L}(X,Y)$ je vektorový prostor

(ii) $\|\cdot\|$ je norma na vektorovém prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$

- $\forall T \in \mathcal{L}(X,Y): \|T\| < \infty$ (VĚTA 3.1)
- $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$
- $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$
- $\|T+S\| = \sup\{\|Tx+Sx\|;\ \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|Tx\| + \|Sx\|;\ \|x\| \leq 1\} \leq \|T\| + \|S\|$

KONEC 4. PŘEDNÁŠKY, 26. 10. 2010

$T \in \mathcal{L}(X,Y)$

- $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$
- $\|T\| = \sup\{\|Tx\|;\ x \in S_X\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|};\ x \in X \setminus \{0\}\right\}$

VĚTA 3.2

(i) Je-li Y Banachův, pak $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachův.

(ii) Pro operátory $S \in \mathcal{L}(X,Y)$, $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$ platí $\|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$.

DŮKAZ

(i) Je-li $\{L_n\}$ cauchyovská v $\mathcal{L}(X,Y)$, pak pro $x \in X$ je $\{L_n x\}$ cauchyovská v Y, takže je i konvergentní. Označme $Lx = \lim L_n x$. Zobrazení L je lineární a platí

$$\left| \|L_n\| - \|L_m\| \right| \leq \|L_n - L_m\|,$$

tedy $\{\|L_n\|\}$ je cauchyovská, takže konvergentní, a tedy omezená, např. konstantou $C > 0$. Potom

$$\|Lx\| = \lim \|L_n x\| \leq \lim \|L_n\| \cdot \|x\| \leq C\|x\|.$$

$L_n \to L$ v $\mathcal{L}(X,Y)$ $\quad \varepsilon > 0 \rightsquigarrow \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0: \|L_n - L_m\| < \varepsilon$

$$\|Lx - L_n x\| \leq \|Lx - L_m x\| + \|L_m x - L_n x\| < \varepsilon \cdot \|x\| + \varepsilon \cdot \|x\|$$

DEFINICE

(prostoru X na Y)

- Nechť X, Y jsou NLP. Řekneme, že $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je *izomorfismus*, pokud je T prosté, na a $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.
- Řekneme, že dva NLP X a Y jsou *izomorfní*, pokud existuje izomorfismus T prostoru X na Y.
- Řekneme, že dva NLP X a Y jsou *izometricky izomorfní*, pokud existuje $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, které je na a $\|Tx\| = \|x\|$ pro každé $x \in X$.

VĚTA 3.3

Nechť X, Y jsou NLP, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Potom T je izomorfismus, právě když existují $c_1, c_2 > 0$ takové, že

$$c_1 \|x\| \le \|Tx\| \le c_2 \|x\|.$$

DŮKAZ

$\Rightarrow$ $T \in \mathcal{L}(X,Y) \Rightarrow \exists c_2$

$T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X) \Rightarrow \exists c \quad \|T^{-1}y\| \le c\|y\|, \ y \in Y$

$\Rightarrow \|x\| \le c\|Tx\|, \ x \in X \quad \Rightarrow \exists c_1 := \frac{1}{c}.$

$\Leftarrow$ $Tx = o \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = o \Rightarrow T$ je prosté $\Rightarrow T^{-1}$ ex.

$c_1 \|T^{-1}y\| \le \|y\| \Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ ∎

DŮSLEDEK 3.4

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ opatřený normami $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní právě když $I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus.

VĚTA 3.5

Nechť X, Y jsou izomorfní NLP. Je-li X Banachův, potom je Y Banachův.

DŮKAZ

$\{y_n\}$ ... cauch v $Y \Rightarrow \{T^{-1}y_n\}$ ... cauch v $X \Rightarrow T^{-1}y_n \to x \Rightarrow y_n \to Tx$. ∎

VĚTA 3.6

Nechť X je NLP, $X = Y \oplus Z$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) $X = Y \oplus_t Z$,

(ii) zobrazení $x \mapsto (y, z)$, kde $y \in Y$, $z \in Z$, $x = y + z$, je izomorfismus X na $Y \times Z$.

DŮKAZ

(i) => (ii)

P_Y, P_Z ... spojité projekce $\quad x = P_Y x + P_Z x$

$T: x \mapsto (P_Y x, P_Z x)$ ... prosté, na, spojité

$T^{-1}: (y, z) \mapsto y + z$ ... spojité

(ii) => (i)

$$\left.\begin{array}{ll} P_Y = \pi_Y \circ T & \pi_Y(y,z) = y \\ P_Z = \pi_Z \circ T & \pi_Z(y,z) = z \\ & \text{„} T(x) = (y,z) \text{"} \end{array}\right\} \text{spojité} \Rightarrow P_Y, P_Z \ldots \text{spojité}$$

$\boxtimes$

4. Hilbertovy prostory

DEFINICE

Nechť H je unitární prostor, $A, B \subseteq H$.

- Podprostory A, B jsou ortogonální, jestliže pro každé $a \in A$, $b \in B$ platí $(a, b) = 0$. Značíme $A \perp B$.

  Ortogonální doplněk A definujeme jako

$$A^{\perp} = \{x \in H;\ (x, a) = 0 \text{ pro každé } a \in A\}.$$

VĚTA 4.1

Nechť H je unitární prostor, $A \subseteq H$. Potom $A^{\perp}$ je uzavřený.

DŮKAZ

Nechť $x_n \to x$, $x_n \in A^{\perp}$. Zvolme $a \in A$. Potom $\underset{0}{\underset{\shortparallel}{(x_n, a)}} \to (x, a)$, tedy $(x, a) = 0 \Rightarrow x \in A^{\perp}$. ∎

VĚTA 4.2

Nechť H je Hilbertův prostor, $F \subset H$ je uzavřená, konvexní a neprázdná, $x \in H$. Pak existuje právě jedno $y \in F$ takové, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$.

KONEC 5. PŘEDNÁŠKY, 2.11.2010

DŮKAZ

Platí: $\operatorname{dist}(x, F) = \operatorname{dist}(0, F - x)$

$F - x$ ... uzavřená, konvexní, $\neq \emptyset$ $\Big\} \Rightarrow$ BÚNO $x = 0$.

Označme $d = \operatorname{dist}(F, x)$.

Nalezneme (y_n) takové, že
- $y_n \in F$,
- $\|y_n\| \to d$.

Posloupnost $\{y_n\}$ je cauchyovská:

$$\|y_n - y_k\|^2 = 2\|y_n\|^2 + 2\|y_k\|^2 - \|y_n + y_k\|^2$$
$$= 2\|y_n\|^2 + 2\|y_k\|^2 - 4\|\underbrace{\tfrac{1}{2}(y_n + y_k)}_{\in F}\|^2 \leq 2\|y_n\|^2 + 2\|y_k\|^2 - 4d^2$$

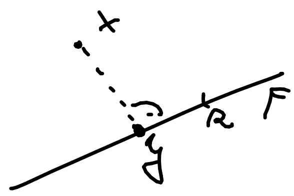
$\Rightarrow$ cauch. $\Rightarrow y_n \to y \Rightarrow \|y_n\| \to \|y\| = d$

Jednoznačnost: $\|y_1\| = \|y_2\| = d$

$$\|y_1-y_2\|^2 = 2\|y_1\|^2 + 2\|y_2\|^2 - 4\left\|\frac{y_1+y_2}{2}\right\|^2 \le 2d^2+2d^2-4d^2 = 0$$ ∎

VĚTA 4.3

Nechť H je Hilbertův prostor, $F \subseteq H$ je uzavřený, $x\in H$. Potom $y \in F$ splňuje $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x,F)$, právě když $x-y\in F^\perp$.



DŮKAZ

$\Leftarrow$ $x-y\in F^\perp$

$z\in F$: $\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2+\|y-z\|^2 \ge \|x-y\|^2$ $(x-y, \underbrace{y-z}_{\in F}) = 0$

$\Rightarrow$ Nechť $z\in F$. Chceme $(x-y,z)=0$. BÚNO $\|z\|=1$. ($z=0$ ... o.k.)

$\|x-y\|^2 \le \|x-(y+\alpha z)\|^2 = (x-y-\alpha z, x-y-\alpha z)$

$$= \|x-y\|^2 - \alpha\underbrace{(z,x-y)}_{\bar\alpha} - \bar\alpha \underbrace{(x-y,z)}_{\alpha} + |\alpha|^2\|z\|^2$$

Položme $\alpha = (x-y,z)$.

Potom $0\le -\alpha^2 \Rightarrow \alpha=0$. ∎

VĚTA 4.4 (Riesz)

Nechť H je Hilbertův a $F\subseteq H$ je uzavřený. Potom $H = F\oplus_\perp F^\perp$ a $\|P_F\|\le 1$.

DŮKAZ

- $x\in F\cap F^\perp \Rightarrow (x,x)=0 \Rightarrow x=0$
- $Q: H\to F$ ... přiřazení nejbližšího prvku v F

  $x = \underbrace{Q(x)}_{\in F} + \underbrace{x-Qx}_{\in F^\perp}$

$\Rightarrow H = F\oplus F^\perp$, $P_F = Q$

- $\|x\|^2 = \|Qx\|^2+\|x-Qx\|^2 \Rightarrow \|x\|\ge\|Qx\| = \|P_Fx\| \Rightarrow \|P_F\|\le 1$. ∎

DEFINICE

Nechť X je normovaný lineární prostor, I je neprázdná množina a $x_i \in X, i \in I$. Potom $\sum_{i \in I} x_i = x$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists A \subset I \text{ konečná } \forall B \subset I, B \text{ konečná}, A \subset B : \|x - \sum_{i \in B} x_i\| < \varepsilon.$$

POZNÁMKA

Nechť X je normovaný lineární prostor a $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$.

(i) Je-li $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$, potom $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(ii) Je-li $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ a X je Banachův, potom $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ existuje.

DEFINICE

Nechť X je unitární prostor, $A = \{a_i ; i \in I\} \subset X$. Řekneme, že A je

- ortonormální množina, jestliže
  - $\forall a, b \in A, a \neq b : (a, b) = 0$,
  - $\forall a \in A : \|a\| = 1$;
- maximální ortonormální množina, pokud je A ortonormální a $A^{\perp} = \{0\}$;
- úplná ortonormální množina, pokud je A ortonormální a $\overline{\operatorname{span} A} = X$;
- ortonormální báze, pokud je A ortonormální a pro každé $x \in X$ existují jednoznačně určené $x_i \in \mathbb{F}, i \in I$, splňující $x = \sum_{i \in I} x_i a_i$.

VĚTA 4.5

V každém Hilbertově prostoru H existuje maximální ortonormální množina. Je-li H navíc separabilní, pak je tato množina spočetná.

DŮKAZ

Množinu $\mathcal{A} = \{A \subset H ;\ A \text{ je ortonormální}\}$ uspořádáme inkluzí. Každý řetězec $R \subset \mathcal{A}$ má horní závoru v $\mathcal{A}$ (konkrétně $\cup R$). Podle Zornova lemmatu existuje $A \in \mathcal{A}$ maximální.

Pokud $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, potom $\|a_1 - a_2\| = \sqrt{2}$. Kdyby byla A nespočetná, potom $\{B(a, \frac{1}{2}); a \in A\}$ je nespočetný systém disjunktních otevřených koulí, a tedy H není separabilní. ■

VĚTA 4.6 (Besselova nerovnost)

Je-li $\{e_i\}$ ortonormální množina v Hilbertově prostoru, potom platí $\sum_i |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in H$.

DŮKAZ

Vezměme $A \subset \{e_i\}$. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i; i \in A\}$ a $y = \sum_i (x, e_i) e_i$. Potom $x - y \in Y^\perp$, a tedy $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq \|y\|^2 = \sum_{i \in A} |(x, e_i)|^2$. ■

DŮSLEDEK 4.7

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{e_i\}_{i \in I}$ je ortonormální množina. Potom je pro libovolné $x \in H$ množina $\{i \in I; (x, e_i) \neq 0\}$ spočetná.

DŮKAZ

Platí $\{i \in I; (x, e_i) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{i \in I; |(x, e_i)| \geq \frac{1}{n}\}$ a

$$\# \{i \in I; |(x, e_i)| \geq \frac{1}{n}\} \leq n^2 \|x\|^2$$ ■

VĚTA 4.8

Nechť H je Hilbertův prostor a $B = \{e_i\}$ je ortonormální množina. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) B je ortonormální báze.

(ii) B je maximální ortonormální množina.

(iii) B je úplná ortonormální množina.

(iv) Pro každé $x \in H$ platí $\|x\|^2 = \sum_i |(x, e_i)|^2$ (Parsevalova rovnost).

DŮKAZ

(i) ⇒ (ii) Pokud $x = \sum x_i e_i$, pak $x_j = (x, e_j)$. [Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $A \subseteq I$ konečnou, že $\|x - \sum_{i \in I} x_i e_i\| < \varepsilon$ pro každé $C \supseteq A$. Zvolme $j \in I$ a položme $C = A \cup \{j\}$. Potom

$$\varepsilon > \|x - \sum_{i \in C} x_i e_i\| \geq |(x - \sum_{i \in C} x_i e_i, e_j)| = |(x, e_j) - x_j|.]$$

Nechť $x \in B^\perp$ a $x = \sum_{i \in B} x_i e_i$. Potom $x_i = 0$, a tedy $x = 0$.

(ii) ⇒ (iii) Nechť B není úplná. Potom existuje $x \in (\overline{\operatorname{span}}\, B)^\perp$, $\|x\| = 1$. Potom $B \cup \{x\}$ je ortonormální, což je spor s maximalitou B.

(iii) ⇒ (iv) Víme $\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$ (VĚTA 4.6). Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou $A \subseteq I$ a $c_i \in I$, $i \in A$ takové, že $\|x - \sum_{i \in A} c_i e_i\| < \varepsilon$ podle (iii). Položme $Z = \overline{\operatorname{span}}\{e_i;\, i \in A\}$. Potom $\|x - \sum_{i \in A} (x, e_i) e_i\| < \varepsilon$ a dále

$$\|x\|^2 = \|x - \sum_{i \in A} (x, e_i) e_i\|^2 + \|\sum_{i \in A} (x, e_i) e_i\|^2 \leq \varepsilon + \sum_{i \in A} |(x, e_i)|^2.$$

(iv) ⇒ (i) Nechť $x \in H$. Chceme $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou $A \subseteq I$ takovou, že pro každou $C \supseteq A$ konečnou máme

$$\sum_{i \in C} |(x, e_i)|^2 \geq \|x\|^2 - \varepsilon.$$

Potom pro libovolnou konečnou C splňující $A \subseteq C$ platí

$$\|x - \sum_{i \in C} (x, e_i) e_i\|^2 + \|x\|^2 - \varepsilon \leq \|x - \sum_{i \in C} (x, e_i) e_i\|^2 + \|\sum_{i \in C} (x, e_i) e_i\|^2 = \|x\|^2.$$

Odtud $\|x - \sum_{i \in C} (x, e_i) e_i\| < \sqrt{\varepsilon}$. ∎

KONEC 6. PŘEDNÁŠKY, 9. 11. 2010

PŘÍKLAD (prostor $\ell_2(\Gamma)$)

1, $\Gamma \neq \emptyset$, $\ell_2(\Gamma) = \{x : \Gamma \to \mathbb{F};\ \sum |x_\gamma|^2 < \infty\}$, $\|x\| = \left(\sum |x_\gamma|^2\right)^{1/2}$

- $\ell_2(\Gamma)$ je NLP
- $\ell_2(\Gamma)$ je úplný
- $(x,y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \overline{y_\gamma}$

2, $L^2(0,2\pi)$ $\langle f,g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\overline{g}$ $\{e^{inx};\ n \in \mathbb{Z}\}$ ... maximální ON množina

VĚTA 4.9. (Riesz-Fischer)

Nechť H je Hilbertův prostor. Pak existuje Γ takové, že H je isometricky izomorfní s $\ell_2(\Gamma)$.

DŮKAZ

Nechť $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je maximální ON mna. Definujme $T: H \to \ell_2(\Gamma)$ předpisem

$$Tx = ((x, e_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}.$$

- T je do $\ell_2(\Gamma)$ ... $\sum_{\gamma \in \Gamma} |(x, e_\gamma)|^2 = \|x\|^2 < \infty$
- T je lineární ... O.K.
- T je izometrie ... $\sum_{\gamma \in \Gamma} |(x, e_\gamma)|^2 = \|x\|^2$
- T je na $\quad f_\gamma = \chi_{\{\gamma\}} \in \ell_2(\Gamma)$

$T e_\gamma = f_\gamma \Rightarrow \operatorname{Rng} T \supseteq \operatorname{span}\{f_\gamma\}$

$$\Rightarrow \operatorname{Rng} T = \overline{\operatorname{Rng} T} \supseteq \overline{\operatorname{span}\{f_\gamma\}} = H \qquad \blacksquare$$

KONEC 7. PŘEDNÁŠKY, 16.11.2010

5. Konečně dimenzionální prostory

Na cvičení již bylo:

Je-li X NLP, $\dim X = n$, potom

- X je izomorfní $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$
- X je úplný
- B_X je kompaktní
- každé dvě normy na X jsou ekvivalentní
- $L: X \to Y$ (NLP) je spojité.

LEMMA 5.1 (Riesz)

Je-li Y vlastní uzavřený podprostor NLP X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

DŮKAZ

$\varepsilon > 0 \quad z \in X \setminus Y, \ \operatorname{dist}(x, Y) = d > 0 \quad$ (Y je uzavřený)

$z \to y \in Y \quad \|z - y\| \leq d + \varepsilon'$

$$x = \frac{z - y}{\|z - y\|}$$

$\|x\| = 1$

$$\|x - u\| = \left\| \frac{z - y}{\|z - y\|} - u \right\| = \frac{1}{\|z - y\|} \, \| z \underbrace{- y - \|z - y\| u}_{\in Y} \| \geq \frac{d}{d + \varepsilon'} > 1 - \varepsilon.$$

■

PŘÍKLAD

$Y = \{ x \in c_0 ; \sum \frac{x_n}{2^n} = 0 \}$

$y \in S_{c_0} \qquad \|y - x\| = \sup |y_n - x_n| = 1$

$\qquad \Rightarrow \exists n_0 : |y_{n_0} - x_{n_0}| = 1$

VĚTA 5.2

Nechť X je NLP. Potom B_X je kompaktní, právě když $\dim X < \infty$.

DŮKAZ

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že B_X je kompaktní, ale $\dim X = \infty$.
Zkonstruujeme posloupnost $\{x_n\}$ prvků B_X takovou, že

- $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$.

$n=1$: zvolíme $x_1 \in B_X$.
$n \rightsquigarrow n+1$: Položíme $Y := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Prostor Y je uzavřený ($\dim Y < \infty$) a vlastní ($\dim X = \infty$). Podle Rieszova lemmatu existuje $x_{n+1} \in B_X$ takové, že $\operatorname{dist}(x_{n+1}, Y) \geq \frac{1}{2}$.

Potom máme $\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{2}$ pro každé i, j, $i \neq j$. Z takové posloupnosti nelze vybrat konvergentní podposloupnost.

$\Leftarrow$ Bylo na cvičení. ∎

6. Hahn-Banachova věta a její důsledky

DEFINICE

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $p: X \to \mathbb{R}$. Řekneme, že p je **pozitivně homogenní sublineární funkcionál**, jestliže platí

- $\forall x \in X \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0: \ p(\alpha x) = \alpha p(x)$,
- $\forall x, y \in X: \ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Jestliže navíc $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a $x \in X$, pak se p nazývá **pseudonorma**.

VĚTA 6.1 (algebraická verze Hahn-Banachovy věty)

Nechť X je reálný vektorový prostor, $M \subseteq X$, $p: X \to \mathbb{R}$ je pozitivně homogenní a sublineární, $f: M \to \mathbb{R}$ je lineární a $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in M$. Potom existuje $\Lambda: X \to \mathbb{R}$ takové, že

- $\forall x \in M: \Lambda x = f(x)$,
- $\forall x \in X: \ -p(-x) \leq \Lambda x \leq p(x)$.

DŮKAZ

Krok číslo 1 $\quad M \neq X$, $x_1 \in X \setminus M$.

$$M_1 = \operatorname{span}(M \cup \{x_1\}) = \{x + t x_1; \ x \in M, t \in \mathbb{R}\}$$

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y), \quad x, y \in M$$

$$f(x) - p(x - x_1) \leq p(x_1 + y) - f(y)$$

$\alpha := \sup\{f(x) - p(x - x_1); \ x \in M\} \in \mathbb{R}$

$$f(x) - \alpha \leq p(x - x_1) \qquad (*)$$

$$f(y) + \alpha \leq p(y + x_1) \qquad (**)$$

$f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$, $f_1(x + t x_1) = f(x) + t\alpha$

$f_1(x) = f(x)$, $x \in M$

$t > 0$ $\quad x \rightsquigarrow t^{-1}x \sim$ (*)

$\quad\quad\quad y \rightsquigarrow t^{-1}y \sim$ (**)

$t^{-1}f(x) - \alpha \le p(t^{-1}x - x_1) = t^{-1}p(x - t x_1) \Rightarrow f(x) - t\alpha \le p(x - t x_1)$

$t^{-1}f(y) + \alpha \le p(t^{-1}y + x_1) = t^{-1}p(y + t x_1) \quad\quad f_1(x - t x_1) \le p(x - t x_1)$

$f(y) + t\alpha \le p(y + t x_1) \quad\quad f_1(-x) \le p(-x) \quad\quad -f_1(x) \le p(-x)$

$f_1(y + t x_1) \le p(y + t x_1) \quad\quad f_1 \le p$ na M_1

Krok číslo 2 (Zornovo lemma)

$\mathcal{P} = \{(M', f');\ M \subseteq M' \subseteq\subseteq X,\ f : X' \to \mathbb{R}$ lineární$,\ f'|_M = f,\ f' \le p$ na $M_1\}$

$(M', f') \le (M'', f'') \overset{def}{\Leftrightarrow} M' \subseteq\subseteq M''\ \&\ f''|_{M'} = f'$

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ ... řetězec

$\tilde{M} := \bigcup\{M';\ \exists f' : (M', f') \in \mathcal{R}\}$

$\tilde{M} \subseteq\subseteq X$

$\tilde{f} : \tilde{M} \to \mathbb{R} \quad\quad \tilde{f}(x) = f'(x) \quad x \in M',\ (M', f') \in \mathcal{R}$

$(\tilde{M}, \tilde{f}) \in \mathcal{P}$ a $(M', f') \le (\tilde{M}, \tilde{f})\ \forall (M', f') \in \mathcal{R}$

$(Y, \Lambda) \in \mathcal{P}$ ... maximální prvek

Krok číslo 1 $\Rightarrow Y = X$

$-\Lambda(x) = \Lambda(-x) \le p(-x) = p(-x) \Rightarrow \Lambda(x) \ge -p(-x)$ ∎

KONEC 8. PŘEDNÁŠKY, 23.11.2010

VĚTA 6.2 (komplexní verze)

Nechť p je pseudonorma na lineárním prostoru X nad $\mathbb{F}$, $Y \subseteq X$ a $f: Y \to \mathbb{F}$ je lineární a $|f| \leq p$ na Y. Pak existuje $\Lambda: X \to \mathbb{F}$ lineární taková, že $|\Lambda| \leq p$ na X a $\Lambda|_Y = f$.

DŮKAZ

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} -p(-x) \leq \Lambda(x) \leq p(x) \\ \quad \| \\ -p(x) \end{array}\right\} \Rightarrow |\Lambda(x)| \leq p(x)$$

$\mathbb{F} = \mathbb{C}$: $\quad u := \operatorname{Re} f \quad \exists U: U|_Y = u, \; |U(x)| \leq p(x)$

$$f(x) = u(x) - i u(ix)$$

$$z = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Re}(iz)$$

$$\Lambda(x) = U(x) - i U(ix) \qquad \Lambda|_Y = f$$

$$\alpha \Lambda x = |\Lambda x|$$

$$\Lambda(\alpha x) = U(x) \leq p(x)$$

∎

DEFINICE

Nechť X je NLP. Duálním prostorem rozumíme $\mathcal{L}(X, \mathbb{F})$. Značíme X^*.

VĚTA 6.3 (Hahn-Banach)

Nechť $Y \subseteq X$ a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ splňující $\|F\| = \|f\|$ a $F|_Y = f$.

DŮKAZ

$p(x) := \|f\| \cdot \|x\|$ ... pseudonorma $\exists F: X \to \mathbb{F}$, $F|_Y = f$

$|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$

$\|F\| \geq \|f\|$ ... zřejmé!

∎

VĚTA 6.4

Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Speciálně, X^* odděluje body, tj. $\forall x, y \in X, x \neq y\ \exists f \in X^*: f(x) \neq f(y)$.

DŮKAZ

$Y := \operatorname{span}\{x\}$ $\quad f_0 : Y \to \mathbb{F}$, $f(\lambda x) = \lambda \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

Výpočet normy f_0

$$|f_0(\lambda x)| = |\lambda \|x\|| = |\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\|,\ \lambda \in \mathbb{F}$$

Odtud $\|f\| = 1$. Položme $p(y) = \|y\|$. Pak existuje $f : X \to \mathbb{F}$ lineární takové, že

- $|f(y)| \leq \|y\|$,
- $f|_Y = f_0$.

Odtud $f \in S_{X^*}$ a $f(x) = f_0(x) = \|x\|$.

Oddělování bodů. $x, y \in B_X, x \neq y$ $\quad \exists f \in S_{X^*}: f(x-y) = \|x-y\| \neq 0$, tj. $f(x) \neq f(y)$. $\blacksquare$

VĚTA 6.5

Nechť X je NLP, $Y \subset\subset X$ je uzavřený a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f = 0$ na Y a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y)$.

DŮKAZ

Označme $d := \operatorname{dist}(x, Y)$. Položme $M := \operatorname{span}(Y \cup \{x\})$ a $f_0(y + \alpha x) = \alpha d$. Potom pro $\alpha \neq 0, y \in Y$ máme

$$|f_0(y + \alpha x)| = |\alpha d| \leq |\alpha| \left\|\frac{y}{\alpha} + x\right\| = \|y + \alpha x\|$$

Pokud $\alpha = 0$, pak $|f_0(y)| = |0| \leq \|y\|$. Máme tedy $\|f_0\| \leq 1$. Nechť $y_n \in Y, n \in \mathbb{N}$ a $\|x - y_n\| \to d$. Potom $f\left(\frac{x - y_n}{\|x - y_n\|}\right) = \frac{d}{\|x - y_n\|} \to 1$, a tedy $\|f\| = 1$.
Nechť f rozšiřuje f_0 a $\|f\| = \|f_0\| = 1$. Potom f splňuje požadované vlastnosti. $\blacksquare$

DŮSLEDEK 6.6

Nechť X je NLP a $Y \subset\subset X$. Pokud platí implikace

$$\forall f \in X^* : f|_Y \Rightarrow f = 0,$$

pak je Y hustý v X.

DŮKAZ

Pokud $\overline{Y} \neq X$, pak zvolíme $x \in X \setminus \overline{Y}$ a aplikujeme předchozí větu. ∎

VĚTA 6.7

Nechť X je NLP, $Y \subset\subset X$.

(a) Je-li $\dim Y < \infty$, pak má Y topologický doplněk.

(b) Je-li Y uzavřený a $\operatorname{codim} Y < \infty$, pak má Y topologický doplněk.

DŮKAZ [NA CVIČENÍ]

(a) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze Y. Podle VĚTY 6.5 existují $f_i \in X^*$ takové, že $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Potom

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

je spojitá projekce na Y.

$$P^2(x) = P\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, Pe_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i = P(x).$$

(b) Nechť $[e_1], \dots, [e_m]$ je báze X/Y $(e_1, \dots, e_m \in X)$. $X = Y \oplus \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_m\}$ Podle VĚTY 6.5 existují $f_i \in (X/Y)^*$ takové, že $f_i([e_j]) = \delta_{ij}$.

Potom

$$Px = \sum_{i=1}^{m} f_i([x])\, e_i$$

je spojitá projekce. [zobrazení $x \mapsto [x]$ je spojité a lineární. $(\|[x]\| \leq \|x\|)$.]

Platí:

$$Pe_j = e_j,$$

takže $P^2 = P$. $\operatorname{Rng} P = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_m\}$, $\operatorname{Ker} P = Y$. ■

<u>VĚTA 6.8</u> (oddělování množin)

Nechť X je NLP, $A, B \subset X$ jsou konvexní, disjunktní a neprázdné.

(i) Pokud je A otevřená, pak existuje $\Lambda \in X^*$ a $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall a \in A\ \forall b \in B:\ \operatorname{Re} \Lambda a < c \leq \operatorname{Re} \Lambda b.$$

(ii) Pokud A je kompaktní a B uzavřená, pak existuje $\Lambda \in X^*$ a $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall a \in A\ \forall b \in B:\ \operatorname{Re} \Lambda a < c < \operatorname{Re} \Lambda b.$$

BEZ DŮKAZU

KONEC 9. PŘEDNÁŠKY, 30. 11. 2010

7. Duální prostory a reflexivita

DEFINICE

Nechť X je NLP. Kanonické vnoření ε prostoru X do X^{**} definujeme jako $\varepsilon(x)(x^*) = x^*(x)$, $x \in X$, x^*.

POZNÁMKA

Zobrazení $\varepsilon(x)$ je lineární a platí

$$\|\varepsilon(x)\| = \sup\{|\varepsilon(x)(x^*)|;\ x^* \in B_{X^*}\}$$
$$= \sup\{|x^*(x)|;\ x^* \in B_{X^*}\} = \|x\|$$

VĚTA 7.1

Nechť X je NLP. Potom ε je izometrický izomorfismus do X^{**}.

DŮKAZ

- $\varepsilon(x) \in X^{**}$ Viz POZNÁMKA.
- ε je lineární

$$\varepsilon(x+y)(x^*) = x^*(x+y) = x^*(x) + x^*(y) = \varepsilon(x)(x^*) + \varepsilon(y)(x^*),$$
$$\varepsilon(\alpha x)(x^*) = x^*(\alpha x) = \alpha x^*(x) = \alpha\, \varepsilon(x)(x^*).$$

- ε je izometrie Viz POZNÁMKA; $\|\varepsilon(x)\| = \|x\|$. ∎

VĚTA 1.8

Nechť X je NLP. Potom existuje Banachův prostor $\tilde{X}$ a lineární zobrazení $T: X \to \tilde{X}$ takové, že

(i) T je izometrie, tj. $\forall x, y \in X: \|Tx - Ty\| = \|x - y\|$,

(ii) $\overline{T(X)} = \tilde{X}$.

Je-li navíc X unitární, potom $\tilde{X}$ je Hilbertův. Pokud existuje Banachův prostor Y a lineární izometrie $L: X \to Y$ taková, že $\overline{L(X)} = Y$, potom existuje lineární izometrie $S: \tilde{X} \to Y$ na Y.

DŮKAZ

X je NLP

Položme $\tilde{X} = \overline{\varepsilon(X)}^{X^{**}}$, $T = \varepsilon$. Potom je T izometrický izomorfismus, T(X) je husté v $\tilde{X}$ a $\tilde{X}$ je uzavřený v úplném prostoru, tedy je úplný.
Dokažme „jednoznačnost" T. Nechť Y je Banachův a $L: X \to Y$ je lineární izometrie na hustý podprostor Y. Definujme $U: T(X) \to L(Y)$ předpisem $U(x) = LT^{-1}$. Zobrazení U je lineární izometrie a lze ji rozšířit na lineární izometrii S prostoru $\tilde{X}$ na Y takto

$$S\tilde{x} = \lim Ux_n, \text{ kde } x_n \to x.$$

Je třeba ověřit:

- korektnost definice,
- $S|_{T(X)} = U$,
- linearitu S,
- izometričnost S.

X je unitární

Použijeme stejný postup jako výše. Unitarita $\tilde{X}$ plyne použitím rovnoběžníkového pravidla. ∎

DEFINICE

Řekneme, že X je *reflexivní*, jestliže $\varepsilon X = X^{**}$.

VĚTA 4.2 (Fréchet - Riesz)

Nechť H je Hilbertův prostor. Pro $y \in H$ označme $f_y(x) = (x, y)$. Potom $T : y \mapsto f_y$ je *sdružené* lineární izometrie H na H^*.

DŮKAZ

Ze cvičení víme, že $f_y \in H^*$ a $\|f_y\| = \|y\|$, tedy T je izometrie do H^*.

Linearita T.

$$T(y_1 + y_2)(x) = (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) = T(y_1)(x) + T(y_2)(x).$$

Sdruženost T.

$$T(\alpha y)(x) = (x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y) = \bar{\alpha}\, T(y)(x)$$

T je na. Nechť $f \in H^*$. Pokud $f = 0$, pak $T(0) = f$. Nechť $f \neq 0$. $\operatorname{Ker} f$ je uzavřený podprostor. $H = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} f^{\perp}$, $\operatorname{Ker} f \subsetneq H$.
Pro nenulové $x_1, x_2 \in \operatorname{Ker} f^{\perp}$ platí $f(x_1) = \alpha f(x_2)$ pro jisté $\alpha \in \mathbb{F}$, a tedy $f(x_1 - \alpha x_2) = 0$, tj. $x_1 - \alpha x_2 \in \operatorname{Ker} f$. Platí tedy $\dim \operatorname{Ker} f^{\perp} = 1$.
Vezmeme $z \in \operatorname{Ker} f^{\perp}$, $\|z\| = 1$ a položíme $y = \overline{f(z)}\, z$. Potom pro $x \in H$ platí

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x' + \alpha z) = \alpha f(z) = \alpha (z, \overline{f(z)} z) \\ &= \alpha (z, y) = (\alpha z, y) = (x' + \alpha z, y) = (x, y), \quad x' \in \operatorname{Ker} f. \end{aligned}$$

■

DŮSLEDEK 4.3

Je-li H Hilbertův, potom je H^* Hilbertův.

DŮKAZ

Plyne z VĚTY 4.2 a rovnoběžníkového pravidla. Je-li T jako výše, potom platí $(Tx, Ty)_{H^*} = (y, x)$.

■

KONEC 10. PŘEDNÁŠKY, 7.12.2010

VĚTA 4.4

Nechť H je Hilbertův prostor. Potom je H reflexivní.

DŮKAZ

Nechť $x^{**} \in H^{**}$. Hledáme $x \in X$ takové, že $\varepsilon(x) = x^{**}$. Definujme $y^* \in H^*$ předpisem

$$y^*(z) = \overline{x^{**}(Tz)},$$

kde $T : H \to H^*$ je zobrazení z předchozí věty.

- y^* je lineární ... snadné
- $\|y^*\| \leq \|x^{**}\|$ ... snadné

$\Rightarrow y^* \in H^*$

Nechť $T_1 : H \to H^*$, $T_2 : H^* \to H^{**}$ jsou zobrazení z VĚTY 4.2. Platí

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

$$(T_1x, T_1y) = \frac{1}{4}\left(\|T_1x + T_1y\|^2 - \|T_1x - T_1(y)\|^2 + i\|T_1x + iT_1y\|^2 - i\|T_1x - iT_1y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x-iy\|^2 - i\|x+iy\|^2\right)$$

$$= (y,x)$$

$\varepsilon = T_2 \circ T_1$

$z^* = T_1 z$

$\varepsilon(x)(z^*) = \varepsilon(x)(T_1 z) = T_1 z(x) = (x,z)_H$

$T_2 \circ T_1(x)(z^*) = T_2(T_1 x)(T_1 z) = (T_1 z, T_1 x)_{H^*} = (x,z)_H$ ∎

PŘÍKLADY (důkazy na cvičení) $\simeq$ = sdružené lineární izometrie na

(a) $(\mathbb{F}^m, \|\cdot\|_2)^* \simeq (\mathbb{F}^m, \|\cdot\|_2)$ $\quad x \in \mathbb{F}^m \mapsto f_x(z) = (z, \overline{x})$ $\quad \overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_m)$

(b) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)^* \simeq (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ $\quad x \in \ell_1 \mapsto f_x(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z_m \overline{x}_m$

(c) $(\ell_1, \|\cdot\|_1)^* \simeq (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ $\quad x \in \ell_\infty \mapsto f_x(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z_m \overline{x}_m$

(d) $(\ell^p)^* \simeq \ell^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q\in(1,\infty)$

(e) $(L^p(X,S,\mu))^* \simeq L^q(X,S,\mu)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q\in(1,\infty)$

(f) $(L^1(X,S,\mu))^* \simeq L^\infty(X,S,\mu)$, μ je σ-konečná

(g) $C(K)^* \simeq \mathcal{M}(K)$ = Radonovy míry na K

K je kompaktní metrický prostor

$L_\mu(g) = \int g\,d\mu$

(h) $(\ell^\infty)^* \simeq \mathcal{M}(\beta\mathbb{N})$

REFLEXIVNÍ PROSTORY

$\mathbb{F}^n$, ℓ^p, $L^p(X,S,\mu)$ $(p\in(1,\infty))$

NEREFLEXIVNÍ PROSTORY

c_0, ℓ^1, ℓ^∞, $L^1([0,1])$, $\mathcal{C}([0,1])$, Jamesův prostor

VĚTA 4.5 (James) [CVIČENÍ]

Nechť X je Banachův prostor. Pak je ekvivalentní:

(i) X je reflexivní.

(ii) každý $f\in X^*$ nabývá na B_X svého maxima.

„DŮKAZ" Nechť $f\in X^*$.

$\Rightarrow$ Existuje $x^{**}\in X^{**}$ takový, že $\|x^{**}\|=1$, $x^{**}(f)=\|f\|$. Pak existuje $x\in X$ takový, že $\varepsilon(x)=x^{**}$, neboť X je reflexivní. Potom platí

$$\|f\| = x^{**}(f) = \varepsilon_x(f) = f(x),\quad \|x\| = \|x^{**}\| = 1.$$

$\Leftarrow$ Velmi těžké! ■

VĚTA 7.6 (vlastnosti reflexivity)

Nechť X je NLP.

(i) Je-li X reflexivní, pak je úplný.

(ii) Banachův prostor X je reflexivní, právě když X^* je reflexivní.

(iii) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

(iv) Jsou-li X, Y reflexivní, pak je $X \times Y$ reflexivní.

(v) Je-li $Y \subset\subset X$ uzavřený a X je reflexivní, pak X/Y je reflexivní.

(vi) Je-li X isomorfní s Y a X je reflexivní, pak je i Y reflexivní.

DŮKAZ

(i) $X \simeq X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{F})$

(ii) $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, bend left, "\varepsilon_1"] & X^* \arrow[rr, bend right, "\varepsilon_2"'] & X^{**} & X^{***} \end{tikzcd}$$

$x^* \dashrightarrow \mathbb{F}$, $\quad x^{***} \dashrightarrow \mathbb{F}$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 : X \to X^{**} \\ \varepsilon_2 : X^* \to X^{***} \end{array}\right\} \text{kanonická vnoření}$$

Chceme dokázat, že ε_2 je na. Vezměme $x^{***} \in X^{***}$. Položme $x^* = x^{***} \circ \varepsilon_1$. Ukážeme, že $\varepsilon_2(x^*) = x^{***}$. Zvolme libovolné $x^{**} \in X^{**}$. Pak existuje $x \in X$ splňující $\varepsilon_1(x) = x^{**}$. Potom máme

$$\varepsilon_2(x^*)(x^{**}) = x^{**}(x^*) = \varepsilon_1(x)(x^*) = x^*(x),$$
$$x^{***}(x^{**}) = x^{***}(\varepsilon_1(x)) = x^*(x).$$

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $\varepsilon_1(X) \subsetneq X^{**}$. Podprostor $\varepsilon_1(X)$ je uzavřený (isometrický obraz Banachova prostoru). Existuje tedy $x^{***} \in S_{X^{***}}$, že $x^{***}|_{\varepsilon_1(X)} = 0$. Potom existuje $x^* \in X^*$ takové, že $\varepsilon_2(x^*) = x^{***}$, neboť X^* je reflexivní. Potom máme pro libovolné $x \in X$

$$0 = x^{***}(\varepsilon_1(x)) = \varepsilon_2(x^*)(\varepsilon_1(x)) = \varepsilon_1(x)(x^*) = x^*(x).$$

Pak tedy $x^* = 0$, a proto $x^{***} = 0$, což je spor. ■

8. Úplnost v Banachových prostorech

VĚTA 8.1 (Baireova, opakování)
Nechť (X,ρ) je úplný metrický prostor a $G\subset X$ je otevřená a neprázdná.
Potom je G druhé kategorie v (X,ρ).

VĚTA 8.2 (princip stejnoměrné omezenosti)
Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{G}\subset\mathcal{L}(X,Y)$.
Pak je ekvivalentní:

(i) $\mathcal{G}$ je omezená, tj. $\sup\{\|L\|;\, L\in\mathcal{G}\}<\infty$.

(ii) Pro každé $x\in X$ platí $\sup\{\|Lx\|;\, L\in\mathcal{G}\}<\infty$.

DŮKAZ

(i) => (ii) Položme $K:=\sup\{\|L\|;\, L\in\mathcal{G}\}$. Potom pro pevně zvolené $x\in X$ máme $\|Lx\|\le\|L\|\cdot\|x\|\le K\cdot\|x\|$.

(ii) => (i) Položme $F_n:=\{x\in X;\ \forall L\in\mathcal{G}: \|Lx\|\le n\}$. Potom platí:

- $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=X$
- $F_n=\bigcap_{L\in\mathcal{G}}\{x\in X;\, \|Lx\|\le n\}$ a je tedy uzavřená.

Podle Baireovy věty existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{Int}\overline{F_{n_0}}=\operatorname{Int}F_{n_0}\neq\emptyset$.
Existuje tedy $x_0\in X$, $r>0$ takové, že $\overline{B}(x_0,r)\subseteq F_{n_0}$. Zvolme $y\in B_X$.
Potom můžeme psát $y=\frac{1}{r}(x_0+ry-x_0)$, a tedy

$$\|Ly\|\le\frac{1}{r}\left(\|L(x_0+ry)\|+\|Lx_0\|\right)\le\frac{2n_0}{r}. \qquad \blacksquare$$

VĚTA 8.3 (Banach-Steinhaus)
Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor, $L_n\in\mathcal{L}(X,Y)$, že $\lim L_nx$ existuje pro každé $x\in X$. Potom $Lx=\lim L_nx$ splňuje $L\in\mathcal{L}(X,Y)$.

DŮKAZ

· L je lineární ... snadné

· L je spojité. Pro každé $x \in X$ máme $\sup\{\|L_n x\|;\ n \in \mathbb{N}\} < \infty$, neboť $\{L_n x\}$ je konvergentní. Podle VĚTY 8.2 máme $\sup\{\|L_n\|;\ n \in \mathbb{N}\} =: C < \infty$.

Potom pro $x \in B_X$ máme

$$\|Lx\| = \lim \|L_n x\| \leq \overline{\lim}\ \|L_n\| \cdot \|x\| \leq C \cdot \|x\|.$$

∎

DEFINICE

Nechť (P,ρ), (Q,σ) jsou metrické prostory, $f: P \to Q$. Řekneme, že f je otevřené zobrazení, jestliže $f(G)$ je otevřená v (Q,σ) pro každou G otevřenou v (P,ρ).

PŘÍKLAD

$\pi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x,y) = x$ ... otevřené zobrazení

KONEC 11. PŘEDNÁŠKY, 14.12.2010

LEMMA 8.4

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Nechť $r, s > 0$ splňují $B(0,s) \subseteq \overline{T(B(0,r))}$. Potom $B(0,s) \subseteq T(B(0,r))$.

DŮKAZ

BÚNO $r = s = 1$, jinak T nahradíme $\frac{r}{s}T$.

Označíme $U_X = B_X(0,1)$, $U_Y = B_Y(0,1)$. Víme $U_Y \subset \overline{T(U_X)}$, a tedy $\overline{U_Y} \subseteq \overline{T(U_X)}$. Platí následující POZOROVÁNÍ:

$$\forall y \in Y\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X: \|x\| \leq \|y\|\ \&\ \|Tx - y\| < \varepsilon.$$

Zvolme $y \in Y$ a $\varepsilon > 0$. Potom $\frac{y}{\|y\|} \in \overline{U_Y}$, a existuje tedy $\tilde{x} \in U_X$ takové, že

$$\left\|T\tilde{x} - \frac{y}{\|y\|}\right\| < \frac{\varepsilon}{\|y\|}.$$

Položme $x := \|y\| \cdot \tilde{x}$. Potom $\|x\| \leq \|y\|$ a $\|Tx - y\| < \varepsilon$.

Zvolme $y_1 \in U_Y$. Budeme hledat $x \in U_X$ takové, že $Tx = y_1$. Nalezneme $\varepsilon_n > 0$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1 - \|y_1\|$. Podle POZOROVÁNÍ nalezneme $x_1 \in X$, $\|x_1\| \le \|y_1\|$ a $\|Tx_1 - y_1\| < \varepsilon_1$.

Budeme induktivně konstruovat x_k, y_k, $k \ge 2$, splňující:

(i) $\|x_k\| \le \|y_k\|$,

(ii) $\|Tx_k - y_k\| < \varepsilon_k$,

(iii) $y_k = y_{k-1} - Tx_{k-1}$.

Máme x_k, y_k a chceme x_{k+1}, y_{k+1}. Položíme $y_{k+1} = y_k - Tx_k$. Podle POZOROVÁNÍ nalezneme $x_{k+1} \in X$ splňující $\|x_{k+1}\| \le \|y_{k+1}\|$, $\|Tx_{k+1} - y_{k+1}\| < \varepsilon_{k+1}$. Tím je konstrukce provedena.

Platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| = \|y_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \|y_{k-1} - Tx_{k-1}\| \le \|y_1\| + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < 1.$$

Položme $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Podle předchozího je definice x korektní a $x \in U_X$. Počítejme

$$Tx = \lim_n T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} Tx_k = \lim_n \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k+1})$$

$$= \lim_n (y_1 - y_{n+1}) = y_1 \qquad (\|y_{n+1}\| < \varepsilon_n \to 0). \qquad \blacksquare$$

VĚTA 8.5 (Banachova věta o otevřeném zobrazení)
Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a T je na. Potom T je otevřené zobrazení.

DŮKAZ
Stačí dokázat, že $T(U_X)$ obsahuje okolí 0. Platí $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} mU_X$, a tedy $Y = T(X) = \bigcup_{m=1}^{\infty} T(mU_X) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{T(mU_X)}$. Podle Baireovy věty existuje $m \in \mathbb{N}$, $y_0 \in Y$, $r > 0$ takové, že $B(y_0, r) \subseteq \overline{T(mU_X)}$.

• $\overline{T(mU_X)}$ je symetrická, tj. $-\overline{T(mU_X)} = \overline{T(mU_X)}$.

• $\overline{T(mU_X)}$ je konvexní.

Ze symetrie dostaneme $B(-y_0, r) \subseteq \overline{T(mU_X)}$. Potom také $B(0,r) \subseteq \overline{T(mU_X)}$, neboť pro $y \in B(0,r)$ platí

$$y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y).$$

Z LEMMATU 8.4 a vztahu $B(0,r) \subseteq \overline{T(mU_X)}$ máme $B(0,r) \subseteq T(mU_X)$, a tedy $B(0, \frac{r}{m}) \subseteq T(U_X)$. ∎

DŮSLEDEK 8.6
Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je prosté a na. Potom je T isomorfismus.

DEFINICE

Nechť $(P,\rho),(Q,\sigma)$ jsou metrické prostory, $f:P\to Q$. Řekneme, že f má uzavřený graf, jestliže množina $\{(x,y)\in P\times Q;\ y=f(x)\}$ je uzavřená v $P\times Q$ s metrikou $\max\{\rho,\sigma\}$.

POZNÁMKA

1) Je-li f spojité, pak má uzavřený graf.

$(x_n,f(x_n))\to(x,y) \overset{?}{\Rightarrow} (x,y)\in \mathrm{graf}(f)$, $\quad x_n\to x \Rightarrow f(x_n)\to f(x)=y$

2) Funkce $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in(0,1];\\ 0, & x=0,\end{cases}$ má uzavřený graf, ale je nespojitá.

VĚTA 8.7

Nechť X,Y jsou Banachovy prostory a $T:X\to Y$ je lineární a má uzavřený graf. Potom $T\in\mathcal{L}(X,Y)$.

DŮKAZ

Označme $F:=\mathrm{graf}(f)\subset X\times Y$. Platí $F\leq\leq X$, F je tedy Banachův prostor. Zobrazení $\pi_1:F\to X$, $\pi_2:F\to Y$ definovaná předpisy $\pi_1(x,y)=x$ a $\pi_2(x,y)=y$ jsou spojitá a lineární. Zobrazení π_1 je navíc prosté a na. Podle VĚTY 8.5 o otevřeném zobrazení je π_1^{-1} spojité. Potom $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, neboť $T=\pi_2\circ\pi_1^{-1}$ $\left(\pi_1^{-1}(x)=(x,Tx),\ \pi_2(x,Tx)=Tx\right)$. ■

VĚTA 8.8

Nechť X je Banachův prostor, $X=Y\oplus Z$ a Y,Z jsou uzavřené. Potom $X=Y\oplus_t Z$.

DŮKAZ

Uvažujme projekci $P_Y:X\to Y$. Stačí ukázat, že P_Y má uzavřený graf. Nechť $x_n\to x$, $P_Y x_n\to y$. Chceme $x\in\mathcal{D}(P_Y)$ a $P_Y x=y$. Potom $\underset{\in Z}{x_n-P_Y x_n}\to \underset{\in Z}{x-y}$. Odtud $x=\underset{\in Z}{(x-y)}+\underset{\in Y}{y}$, a tedy $P_Y x=y$. ■

9. Duální operátory

DEFINICE

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak duálním operátorem $T' \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ rozumíme operátor definovaný předpisem $T'y^*(x) = y^*(Tx)$.

PŘÍKLAD

Nechť $A \in M(m \times n)$, $Tx = Ax$, $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T': \mathbb{R}^{m*} \to \mathbb{R}^{n*}$, $T' \sim B \in M(n \times m)$.
Pro $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*) \in (\mathbb{R}^m)^*$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ máme

$$\left.\begin{aligned} T'y^*(x) &= \sum_{i=1}^{n} (By^*)_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} y_j^* x_i \\ &= y^*(Tx) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} y_j^* a_{ji} x_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow b_{ij} = a_{ji} \Rightarrow B = A^T.$$

VĚTA 9.1

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(i) Zobrazení $T \mapsto T'$ z $\mathcal{L}(X,Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$ je lineární izometrie.

(ii) Pro $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ platí $(TS)' = S'T'$.

(iii) Pro $I \in \mathcal{L}(X,X)$ (identita) platí, že I' je identita na X^*.

DŮKAZ

(i) $(T+S)'(y^*) = y^* \circ (T+S) = y^* \circ T + y^* \circ S = T'(y^*) + S'(y^*)$

$(\alpha T)'(y^*) = y^* \circ (\alpha T) = \alpha y^* \circ T = \alpha T'(y^*)$

(ii) $(T \circ S)'(y^*) = y^* \circ T \circ S = T'(y^*) \circ S = S'(T'(y^*)) = S' \circ T'(y^*)$

(iii) $I'(x^*) = x^* \circ I = x^*$

(iv) $$\|T'\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \|T'(y^*)\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_X} \underbrace{\|T'(y^*)(x)\|}_{= \|y^*(Tx)\|} = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \|T\|$$

■

VĚTA 9.2

Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje právě jeden operátor $S^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že

$$\forall x \in H_1\ \forall y \in H_2 : (Sx, y) = (x, S^* y).$$

Dále platí $S^* = T_1^{-1} S' T_2$, kde $T_1 : H_1 \mapsto H_1^*$, $T_2 : H_2 \mapsto H_2^*$ jsou izometrie z VĚTY 4.2.

POZNÁMKA

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[r, shift left, "S"] \arrow[d, "T_1"'] & H_2 \arrow[l, shift left, "S^*"] \arrow[d, "T_2"] \\
H_1^* & H_2^* \arrow[l, "S'"]
\end{tikzcd}$$

DŮKAZ

Zvolme $y \in H_2$. Potom $x \mapsto (Sx, y)$ je prvkem H_1^*, a tedy existuje právě jedno $z \in H_1$ takové, že $(Sx, y) = (x, z)$ pro každé $x \in H_1$. Položme $S^* y = z$.
Pro $y \in H_2$ a $x \in H_1$ počítejme

$$(x, T_1^{-1} S' T_2(y)) = S' T_2(y)(x) = T_2(y)(Sx) = (Sx, y).$$

Vzhledem k jednoznačnosti máme $S^* y = T_1^{-1} S' T_2(y)$. ∎

DEFINICE

Operátor S^* z předchozí věty nazýváme **adjungovaným operátorem** k S.

PŘÍKLAD

$A \in M_{\mathbb{C}}(m \times n)$, $A^* \in M(n \times m)$

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \overline{y_i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j \overline{a^*_{ji}}\, \overline{y_i}$$

$$a_{ij} = \overline{a^*_{ji}} \implies A^* = \overline{A^T}$$

VĚTA 9.3

Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory, $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ a I je identita na H_1. Potom platí

(i) $(T^*)^* = T$, $(ST)^* = T^* S^*$, $I^* = I$

(ii) $T \mapsto T^*$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.

DŮKAZ

Nechť $x \in H_1$, $y \in H_2$. Potom

$$(T^{**}x, y) = (x, T^* y) = (Tx, y).$$

Odtud plyne $T^{**} = T$. Zbývající tvrzení plynou z VĚT 9.1 a 9.2 ∎

DEFINICE

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pro $A \subset X$, $B \subset X^*$ definujeme **anihilátory** jako

$$A^{\perp} = \{x^* \in X^*;\ \forall a \in A: x^*(a) = 0\},$$
$$B_{\perp} = \{x \in X;\ \forall b^* \in B: b^*(x) = 0\}.$$

POZNÁMKA

(1) $A^{\perp}$ je uzavřený podprostor X^*.

(2) $B_{\perp}$ je uzavřený podprostor X^*.

VĚTA 9.4

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Potom platí:

(i) $\operatorname{Ker} T' = (\operatorname{Rng} T)^{\perp}$,

(ii) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T')_{\perp}$,

(iii) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T')_{\perp}$.

DŮKAZ

(i) Platí: $y^* \in \operatorname{Ker} T' \Leftrightarrow T' y^* = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X: y^*(Tx) = 0 \Leftrightarrow y^* \in \operatorname{Rng} T^{\perp}$.

(ii) Platí: $x \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^*: y^*(Tx) = 0 \Leftrightarrow \forall y^* \in Y^*: T'(y^*)(x) = 0$
$\Leftrightarrow x \in \operatorname{Rng} T'_{\perp}$.

(iii) Stačí dokázat, že pro libovolné $M \subset X$ máme $(M^{\perp})_{\perp} = \overline{\operatorname{span}} M$.

- $\overline{\operatorname{span}} M \subseteq (M^{\perp})_{\perp}$ ... zřejmé
- $x \in (M^{\perp})_{\perp}$. Pro $x^* \in X^*$ splňující $x^*|_{\overline{\operatorname{span}} M} = 0$ máme $x^* \in M^{\perp}$ a $x^*(x) = 0$.

Odtud podle Hahn-Banachovy věty plyne $x \in \overline{\operatorname{span}} M$. ∎

VĚTA 9.5

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Potom platí:

(i) T je izomorfismus do Y, právě když je T' na,
(ii) T je na, právě když T' je izomorfismus do,
(iii) T je izomorfismus právě tehdy, když T' je izomorfismus.

DŮKAZ

(i) $\Rightarrow$ Vezměme $x^* \in X^*$. Potom $x^* \circ T^{-1} \in (\operatorname{Rng} T)^*$. Nalezneme $y^* \in Y^*$ takové, že $y^*|_{\operatorname{Rng} T} = x^* \circ T^{-1}$ (Hahn-Banach). Potom

$$T'y^*(x) = y^*(Tx) = x^* \circ T^{-1}(Tx) = x^*(x), \quad x \in X,$$

neboli $T'y^* = x^*$.

$\Leftarrow$ Podle VĚTY 8.5 je T' otevřené. Existuje tedy $c > 0$ takové, že $cB_{X^*} \subseteq T'(U_{Y^*})$, neboli $B_{X^*} \subseteq \frac{1}{c} T'(U_{Y^*})$. Zvolme $x \in X$. Nalezneme $x^* \in S_{X^*}$ takové, že $x^*(x) = \|x\|$. K x^* nalezneme $y^* \in U_{Y^*}$ splňující $x^* = \frac{1}{c} T'(y^*)$. Potom máme

$$c\|x\| = c\,x^*(x) = T'y^*(x) = y^*(Tx) \leq \|Tx\|.$$

Podle VĚTY 3.3 je T' izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$.

(ii) $\Rightarrow$ Opět podle VĚTY 8.5 existuje $c>0$ takové, že $cB_Y \subseteq T(U_X)$. Zvolme $y^* \in Y^*$. Nalezneme $y \in B_Y$ takové, že $y^*(y) \geq \frac{1}{2}\|y^*\|$. Nalezneme $x \in U_X$ takové, že $cy = Tx$. Potom máme

$$\|T'y^*\| \geq T'(y^*)(x) = y^*(Tx) = c\,y^*(y) \geq \frac{c}{2}\|y^*\|.$$

Podle VĚTY 3.3 je T' izomorfismus Y^* na $\operatorname{Rng} T'$.

$\Leftarrow$ Existuje $c>0$ takové, že pro každé $y^* \in Y^*$ platí $\|T'y^*\| \geq c\|y^*\|$. Zvolme $y_0 \notin \overline{T(U_X)}$. Nalezneme $y^* \in B_{Y^*}$ takové, že

$$y^*(y_0) > |y^*(Tx)| \text{ pro každé } x \in U_X.$$

Zde aplikujeme VĚTU 6.4 (ii) na konvexní množiny $A = \{y_0\}$, $B = \overline{T(U_X)}$. Pro $x \in U_X$ pak platí

$$|T'y^*(x)| = |y^*(Tx)| < y^*(y_0),$$

$$c\|y^*\| \leq \|T'y^*\| \leq y^*(y_0) \leq \|y^*\| \cdot \|y_0\|.$$

Odtud $\|y_0\| \geq c$, a tedy $y_0 \in cU_Y$. Platí tedy $cU_Y \subseteq \overline{T(U_X)}$. Podle LEMMATU 8.4 dostáváme $cU_Y \subseteq T(U_X)$. Odtud plyne surjektivita T.

(iii) $$T \text{ je izo} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} T \text{ je na} \\ T' \text{ je na} \Rightarrow T \text{ je prosté} \end{array}\right\} \Rightarrow T' \text{ je izo}$$

$$T' \text{ je izo} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} T' \text{ je na} \Rightarrow T \text{ je prosté} \\ T \text{ je na} \end{array}\right\} \Rightarrow T \text{ je izo}$$

$\blacksquare$

10. Úvod do spektrální teorie

V této kapitole budeme předpokládat, že prostory jsou Banachovy a nad $\mathbb{C}$.

DEFINICE

Řekneme, že $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je invertovatelný, jestliže existuje $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ takový, že $TS = I_Y$ a $ST = I_X$. Inverzi S značíme T^{-1}.

POZNÁMKA

(1) Inverze je jednoznačně určena.

(2) Platí $(LT)^{-1} = T^{-1}L^{-1}$, pokud jsou T, L invertovatelné.

(3) Operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je invertovatelný, právě když je prostý a na. (Je třeba užít větu o otevřeném zobrazení.)

OZNAČENÍ

místo $\mathcal{L}(X,X)$ budeme psát jen $\mathcal{L}(X)$ a množinu invertovatelných operátorů z X do X budeme značit $\mathcal{G}(X)$.

LEMMA 10.1 (Neumann)

(i) Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T\| < 1$. Potom $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$, přičemž suma konverguje absolutně v $\mathcal{L}(X)$.

(ii) Je-li $T \in \mathcal{G}(X)$ a $S \in \mathcal{L}(X)$ splňuje $\|T-S\| \leq 1/\|T^{-1}\|$, potom $S \in \mathcal{G}(X)$ a

$$\|T^{-1} - S^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \cdot \|S-T\|}{1 - \|T^{-1}\| \cdot \|S-T\|}.$$

DŮKAZ

(i) Označme $S_n = \sum_{j=0}^{n} T^j$. Platí $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|T\|^j = (1-\|T\|)^{-1}$. Platí tedy $S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j \in \mathcal{L}(X)$ a (S_n) konverguje k S v $\mathcal{L}(X)$. Vezměme libovolné $x \in X$.

Potom máme

$$S(I-T)x = \lim S_n(I-T)x = \lim (I-T^{n+1})x = \lim (x - T^{n+1}x) = x,$$
$$(I-T)Sx = \lim (I-T)S_n x = \lim (I-T^{n+1})x = x.$$

Dostáváme také $\|(I-T)^{-1}\| = \|S\| \leq (1-\|T\|)^{-1}$.

(ii) Platí $\|T^{-1}(T-S)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T-S\| < 1$, a tedy $I - T^{-1}(T-S) = T^{-1}S \in \mathcal{G}(X)$.
Odtud plyne $S = \underbrace{T}_{\in \mathcal{G}(X)} \underbrace{T^{-1}S}_{\in \mathcal{G}(X)} \in \mathcal{G}(X)$.

Dále platí

$$S^{-1} - T^{-1} = (I - T^{-1}(T-S))^{-1}T^{-1} - T^{-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1}(T-S))^n T^{-1} - T^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (T^{-1}(T-S))^n T^{-1},$$

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T^{-1}\|^n \|T-S\|^n \cdot \|T^{-1}\| = \frac{\|T^{-1}\|^2}{1-\|T^{-1}\|\|T-S\|} \cdot \|T-S\|.$$ ■

VĚTA 10.2

Množina $\mathcal{G}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ je otevřená a zobrazení $T \mapsto T^{-1}$ je spojité na $\mathcal{G}(X)$.

DŮKAZ

Plyne z LEMMATU 10.1 (ii). ■

DEFINICE

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. Spektrum operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ definujeme předpisem

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - T \text{ není invertovatelný}\}.$$

Bodové spektrum operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ definujeme předpisem

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \exists x \in X \setminus \{0\} : Tx = \lambda x\}.$$

Množina $\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ se nazývá rezolventa a zobrazení $\lambda \mapsto (\lambda I - T)^{-1}$

definované na $\rho(T)$ se nazývá rezolventní funkce. Pro $\lambda \in \sigma_p(T)$ je $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ podprostorem příslušným k vlastnímu číslu λ a jeho nenulové prvky nazýváme vlastními vektory.

VĚTA 10.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je neprázdná kompaktní množina obsažená v kruhu o poloměru $\|T\|$.

DŮKAZ

uzavřenost: Zobrazení $\Phi : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(X)$ definované předpisem $\Phi(\lambda) = \lambda I - T$ je spojité, takže $\Phi^{-1}(G(X)) = \rho(T)$ je otevřená, a tedy $\sigma(T)$ je uzavřená.

omezenost: Pokud $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|T\|$, potom $\|\frac{1}{\lambda} T\| < 1$, a tedy $I - \frac{1}{\lambda} T \in G(X)$ (LEMMA 10.1 (i)). Potom $\lambda I - T \in G(X)$, takže $\lambda \notin \sigma(T)$. Odtud plyne $\sigma(T) \subseteq B(0, \|T\|)$.

neprázdnost: Zvolme $\lambda_0 \in \rho(T)$ pevné. Pro $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|^{-1}$ můžeme psát:

$$(\lambda I - T)^{-1} = \left((I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1})(\lambda_0 I - T) \right)^{-1}$$
$$= (\lambda_0 I - T)^{-1} \left(I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1} \right)^{-1}.$$

Potom máme

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 I - T)^{-(n+1)}.$$

Pro $\varphi \in \mathcal{L}(X)^*$ pak máme

$$f_\varphi(\lambda) := \varphi\left((\lambda I - T)^{-1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \varphi\left((\lambda_0 I - T)^{-(n+1)} \right).$$

Funkce f_φ je tedy holomorfní na okolí bodu λ_0, a tedy je holomorfní na $\rho(T)$. Pokud $|\lambda| > \|T\|$, potom máme

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n$$

$$f_\varphi(\lambda) = \varphi\left((\lambda I - T)^{-1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} \varphi(T^n).$$

Odhadneme

$$|f_\varphi(\lambda)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{-(n+1)} \|\varphi\| \|T\|^n = \|\varphi\| \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \|\varphi\| \frac{1}{|\lambda|-\|T\|}.$$

Pro $|\lambda| \to \infty$ máme $f_\varphi(\lambda) \to 0$. Pokud $\rho(T) = \mathbb{C}$, pak f_φ je omezená celá funkce, a máme $f_\varphi = \text{const} = 0$. Potom ale $(\lambda I - T)^{-1} = 0$, což je spor. ■

VĚTA 10.4

(i) Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. Potom $\sigma(T') = \sigma(T)$.

(ii) Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$, kde H je Hilbertův prostor. Potom

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda};\ \lambda \in \sigma(T)\}.$$

DŮKAZ

(i) Platí $(\lambda I - T)' = \lambda I - T'$, takže $\lambda I - T'$ je izomorfismus, právě když $\lambda I - T$ je izomorfismus (VĚTA 9.5(iii)).

(ii) $T^* = T_1^{-1} \circ T' \circ T_1$

$\bar{\lambda} I - T^* = T_1^{-1} \circ (\lambda I - T) \circ T_1$

$T_1 \dots$ sdružené lineární izometrie H na H^*

$\Rightarrow \bar{\lambda} I - T^*$ je izomorfismus $\Leftrightarrow$ $\lambda I - T'$ je izomorfismus

■

VĚTA 10.5

Nechť $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \neq 0$. Pak $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.

BEZ DŮKAZU

VĚTA 10.6 (Fredholmova alternativa)

Nechť $\lambda \neq 0$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\lambda I - T$ je prostý, právě když $\lambda I - T$ je na.

BEZ DŮKAZU

VĚTA 10.7

Nechť $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak platí:

(i) $\sigma(T) \subseteq \sigma_p(T) \cup \{0\}$,

(ii) $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| > r\}$ je konečná pro každé $r > 0$.

BEZ DŮKAZU

VĚTA 10.8 (druhá Fredholmova věta)

Nechť $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \neq 0$. Pak $\mathrm{Rng}(\lambda I - T) = \mathrm{Ker}(\lambda I - T')_{\perp}$ a $\mathrm{Rng}(\lambda I - T') = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)^{\perp}$.

BEZ DŮKAZU

VĚTA 10.9 (třetí Fredholmova věta)

Nechť $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \neq 0$. Pak

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ker}(\lambda I - T) &= \dim X / \mathrm{Rng}(\lambda I - T) \\ &= \dim \mathrm{Ker}(\lambda I - T') = \dim X^* / \mathrm{Rng}(\lambda I - T') \end{aligned}$$

a toto číslo je konečné.

BEZ DŮKAZU

KONEC 14. PŘEDNÁŠKY, 11.1.2011